H. G. ZEUTHEN

GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM XVI. UND XVII. JAHRHUNDERT

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, ferner **Natur und Schule**, Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 25 000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

Library
of
Mount Holyoke College.
No longer the property of
The Library
Mount Holyoke College
LBE.Z5

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSZ IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XVII. HEFT.

H. G. ZEUTHEN.

GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM XVI. UND XVII. JAHRHUNDERT.

DEUTSCHE AUSGABE
UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS BESORGT
VON
RAPHAEL MEYER.

MIT 32 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

29782

LBE

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Das vorliegende Buch, das gleichzeitig dänisch und deutsch erscheint, ist zunächst eine Fortsetzung meiner 1893 dänisch und 1896 deutsch erschienenen *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* (Kopenhagen bei Andr. Fred. Höst & Sön). Formaliter tritt es jedoch als von dieser Arbeit unabhängig auf und läßt sich auch ohne ihre Kenntnis lesen. Indes ist die Entwickelung der Mathematik in den hier behandelten zwei Jahrhunderten so innig mit den älteren Vorgängen verknüpft, daß man öfters auf diese verweisen muß, wenn man sich des rechten Verständnisses der damit verbundenen neuen Untersuchungen versichern will. Da diejenigen meiner Leser, die über die Verhältnisse, auf welche ich verweise, genauere Auskunft wünschen möchten, eine solche, und zwar in einer mit meiner Darstellung in gegenwärtigem Buche übereinstimmenden Weise, in dem soeben angeführten Werke finden können, habe ich bei solchen Verweisungen die Stellen aus der deutschen Ausgabe angeführt, an denen sich diese Aufschlüsse finden.

Auch dieses neue Buch ist zunächst mehr für Mathematiker und Mathematiklehrer als für Historiker bestimmt. Somit kommt es mir in den Erörterungen der rein geschichtlichen Einzelheiten oder in den Referaten über die verschiedenen auf uns gekommenen Schriften nicht auf Ausführlichkeit an. In dieser Beziehung würde ein verständiger Auszug aus der bereits vorliegenden Literatur der Geschichte der Mathematik genügen. Wenn demungeachtet mein Buch zu einem nicht ganz geringen Umfang angeschwollen ist und hauptsächlich einen Stoff enthält, dessen Zusammentragung und Bearbeitung meinerseits eine recht umfassende Arbeit erforderte, so liegt dies daran, daß dem Kreise, an den ich mich vorzüglich wende, auch eine ausführlichere Behandlung und Darstellung gewisser Einzelheiten vonnöten ist, die aber in höherem Grade mathematischer Natur sind. So läßt es sich zwar mit ganz wenig Worten sagen, wann und von wem dies oder jenes Verfahren, durch das wir heute in der Mathematik eine gewisse Schwierigkeit überwinden oder ein gewisses Ziel erreichen, zum ersten Male in der heute gebräuchlichen Gestalt in Anwendung gebracht worden ist; die geschicht-

liche Darstellung soll aber eben dem Mathematiker und dem Mathematiklehrer einen anderen und für ihn bedeutungsvolleren Ertrag bringen. Denn er wird ein tieferes Verständnis des Verfahrens, das er selbst häufig anwenden und erklären soll, und eine größere Herrschaft darüber gewinnen, wenn er auch einsehen lernt, wie man, bevor dieses Verfahren die heute gebräuchliche Gestalt erhielt, Ziele ähnlicher Beschaffenheit zu errreichen suchte, und in welchem Umfang man sie damals tatsächlich zu erreichen vermochte. Dadurch wird er teils den unentbehrlichen Kern eines solchen Verfahrens von der äußeren Gestalt, die ihm die Verhältnisse allmählich gegeben haben, unterscheiden lernen, teils wird er besser beurteilen können, inwiefern wirkliche Vorzüge oder zufällige Umstände die endgültige Wahl eben dieser Gestalt bewirkt haben. Ab und zu wird der Mathematiker in der Geschichte seiner Disziplin auch Betrachtungsweisen antreffen, die zwar vorläufig durch spätere Fortschritte überflüssig geworden sind, die aber der Mathematik in ihrer ferneren Entwickelung von Nutzen sein können. Diese Bemerkungen finden in hohem Grade auf die beiden hier behandelten Jahrhunderte Anwendung. In ihnen ward das Gebiet der Algebra, und zwar vorzüglich durch Vietas Tätigkeit derart erweitert, daß sie allmählich die Stufe der Entwickelung erreichte, auf der wir sie in der analytischen Geometrie Descartes' stehen sehen. In ihnen wurden die aus dem Altertum ererbten und wieder aufgenommenen Infinitesimaluntersuchungen mit den Hilfsmitteln bereichert, welche Kepler, Galilei und Huygens für den Bedarf ihrer astronomischen und physikalischen Untersuchungen einführten, und erreichten nach und nach eine solche Blüte, daß sie einerseits in Leibnizens Differential- und Integralrechnung die noch heute gültige äußere Gestalt annahmen, andererseits ganz unabhängig von dieser Gestalt die Grundlage der *Principia* Newtons bilden konnten. Ferner zeigte im 2. dieser Jahrhunderte Fermat bei der Behandlung der verschiedenartigsten mathematischen Themata, daß der große Mathematiker keine entwickelte mathematische Technik nötig hat, um die schwierigsten Verhältnisse klar zu durchschauen; Desargues und Pascal schlugen in der Geometrie neue Bahnen ein, die erst anderthalb Jahrhundert später fortgesetzt wurden, während Nepers Logarithmen gleich sowohl praktische Anwendung als Einfluß auf die übrige Mathematik erhielten.

Übrigens wird, was ich so, besonders die Mathematiker und Mathematiklehrer berücksichtigend, darstelle, wenn mir diese Darstellung gelungen ist, auch für die historische Auffassung Bedeutung haben. Mein Ziel ist es nämlich, die Entwickelung der Mathematik klar hervortreten zu lassen. Hier bedaure ich indessen, daß mir weder der Platz noch die Darstellungsform gestattet hat, meine Referate mit Citaten zu belegen, deren Anzahl

und Umfang ja, wenn sie irgendwie von Bedeutung sein sollten, ziemlich groß hätten sein müssen. Wenn ich mit Descartes' Geometrie und dem Anfang von Newtons *Principia* eine Ausnahme gemacht habe, so wollte ich dadurch zunächst die Mathematiker auffordern, es nicht zu versäumen, sich wenigstens mit diesen Hauptwerken persönlich bekannt zu machen. Übrigens habe ich betreffs einzelner Punkte, in denen meine Auffassung von der anderer Schriftsteller abweicht, in meinen *Notes sur l'histoire des Mathématiques* in den „Übersichten" der königl. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften dies ausführlicher begründet und bin natürlich auch zu einer näheren Begründung bereit, wenn in anderen Fällen meine Auffassung jemandem zweifelhaft vorkommen sollte.

Da ich also überhaupt nicht citiere, habe ich auch keine Gelegenheit gehabt, in dem Buche selbst die heutigen Schriftsteller namhaft zu machen, in deren Arbeiten ich Aufschluß über den geschichtlichen Stoff, Anleitung zu seinem rechten Verständnis oder Berichte über bisher ungedruckte Schriften gefunden habe. Unter allen diesen Schriftstellern muß ich wie ein jeder, der größere oder kleinere Abschnitte der Geschichte der Mathematik behandeln will, zuvörderst dankend Moritz Cantor nennen. Ohne seine in seltenem Grade vollständigen Vorlesungen würde mir sicherlich manches, das mit heranzuziehen war, entgangen sein, und ich würde jegliche Kontrolle vermissen, um erachten zu können, ob ich im wesentlichen auch alles das berücksichtigt habe, dessen ich zu meinem Zwecke bedarf. Von v. Braunmühls *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* stand mir bei der Ausarbeitung meines Buches nur der 1. Teil zur Verfügung. Aus dem neuerdings erschienenen 2. Teile ersehe ich, daß eine Formel, die ich S. 127 dem ersten Teile gemäß Schuler zuschreibe, in der Tat Vieta angehört, und daß nur zwei der Neperschen Analogien (S. 143) Neper, die übrigen aber Briggs gehören. Von dem Inhalt dieses 2. Teiles habe ich übrigens benutzt, was von dem Verfasser und seinen Schülern schon früher anderswo veröffentlicht war. Ferner habe ich Mach: *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, Ritters Schrift über Vieta, Curtzes Mitteilungen über das Mittelalter und die beginnende Renaissance, die zahlreichen von P. Tannerys erfahrener Feder herrührenden Aufsätze über französische Mathematiker, Lorias Mitteilungen über Torricelli, Gerhardts über Leibniz und viele andere Arbeiten zu Rate gezogen. Zusammenfassend verweise ich noch auf die Aufsätze in Boncompagnis *Bullettino*, auf die *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, die historische Abteilung der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* und Eneströms *Bibliotheca mathematica* (außer auf Eneströms anderswo erschienene Arbeiten). — In dem ersten Abschnitt meines Buches, in dem ich einen historischen und biographischen Gesamtüberblick

zu bieten suche, um sodann einer Anordnung nach dem mathematischen Stoffe folgen zu können, habe ich die vorzüglichen modernen biographischen Handbücher und bei der kurzen Besprechung der philosophischen Arbeiten einiger Schriftsteller die Geschichte der Philosophie von H. Höffding benutzt.

Einiges ist so spät erschienen oder mir erst so spät zur Hand gekommen, daß ich es nicht mehr habe benutzen können. So erfahre ich jetzt aus einigen Aufsätzen von Bosmans, daß de la Faille ein Schüler von Gregorius von St. Vincentius sei, bei dem er somit auch den sorgfältigen Gebrauch des Exhaustionsbeweises gelernt hat. Der in der *Bibliotheca mathematica* besprochene Wernerfund von Björnbo geschah noch so zeitig, daß ich S. 129 auf meine Vorrede hinweisen konnte. Ich tat es in der Hoffnung, jetzt über die Trigonometrie Werners mehr mitteilen zu können; ich muß mich aber noch jetzt mit dem begnügen, was sogleich dargetan wurde, daß Werner die prosthaphäretische Methode jedenfalls in dem Umfang kannte, in dem sie später von Tycho Brahe und seinen Mitarbeitern angewendet wurde. Aus einem Aufsatz in der *Bibliotheca mathematica* von Wallner, den ich in diesem Augenblick empfange, sehe ich, daß Cavalieris unklarer Begriff der „*indivisibilia*“ von einer Überlieferung aus der Philosophie des Mittelalters herrühre. Es dürften indes nach meiner Darstellung in gegenwärtigem Buche Arbeiten anderer Mathematiker gewesen sein, durch die Cavalieri zu den an diese „*indivisibilia*“ anknüpfenden zuverlässigen Regeln angeregt wurde, die lange eine große Bedeutung behielten, und denen Pascal einen exakten Ausdruck verlieh. Aus den Schriften aus dem 16. Jahrhundert, die Curtze, Abh. z. Gesch. d. Math. XIII, mitteilt, erhellt, daß mit der Setîschmethode eine Überlieferung von ihrem indischen Ursprung verknüpft war. Die in derselben Schrift enthaltenen Andeutungen über eine ältere Kenntnis der algebraischen Lösung von Gleichungen 3. Grades als diejenige, die allgemein und auch von mir angenommen wird, sind zu unbestimmt, als daß man auf sie bauen könnte.

Schließlich danke ich dem Direktor Dr. J. P. Gram, der seinerzeit die die numerische Berechnung und Zahlentheorie behandelnden Abschnitte durchgesehen hat, und auf dessen Rat hin ich einige Verbesserungen eingeführt habe, und Dr. Björnbo für die sorgfältige Ausarbeitung des Registers nach Regeln, für die ich jedoch selbst verantwortlich bin. Auch Herrn cand. phil. R. Kneschke, welcher im Auftrage der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner das deutsche Manuskript in sprachlicher Beziehung durchgesehen und die Hauskorrektur besorgt hat, danke ich im Namen meines Übersetzers, sowie für die Berichtigung einzelner mathematischer Ungenauigkeiten.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Vorwort III

I. Historischer und biographischer Überblick 1

II. Die Analyse des Endlichen 81

1. Die algebraische Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades 81
2. Die algebraische Zeichensprache 93
3. Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen 103
4. Die Trigonometrie und ihre Verbindung mit der Algebra 110
5. Numerische Berechnungen vor Erfindung der Logarithmen 122
6. Erfindung und Berechnung von Logarithmen 130
7. Zahlentheorie, sowie unbestimmte Gleichungen und Kettenbrüche vor Fermat 143
8. Die zahlentheoretischen Sätze Fermats 154
9. Binomialkoeffizienten, Kombinationen und Wahrscheinlichkeitsrechnung . 166
10. Geometrie, Anwendung der Zentralprojektion 173
11. Die algebraischen und analytisch-geometrischen Arbeiten Fermats. Koordinaten 192
12. Die Geometrie Descartes' 201
13. Die Analyse des Endlichen nach Descartes 215

III. Entstehung und erste Entwickelung der Infinitesimalrechnung 234

1. Die Mechanik zu Anfang der neueren Zeit 234
2. Integration vor der Integralrechnung 248
   a) Kepler 248
   b) Cavalieri, Torricelli und Gregorius von St. Vincentius. 256
   c) Fermat, Pascal u. a. 263
   d) Wallis 278
   e) Anwendungen von Integrationen; Rektifikation; reduzierte Pendellängen 289
3. Die Methoden unendlicher Näherung; Reihen 300
4. Die Behandlung der Aufgaben, die heute durch Differentiation gelöst werden 316
   a) Torricellis und Robervals Tangentenmethode; einige spezielle Tangentenbestimmungen von Descartes 321
   b) Descartes' und Huddes Methoden 325
   c) Fermats Methode; Huygens' und de Sluses Regeln 329
5. Die Cykloide; Huygens' mechanische Anwendung derselben; Evoluten . . 338

Seite
6. Die umgekehrte Tangentenaufgabe; Barrows Umkehrungssatz 345
7. Newtons Verhältnis zu Barrow; seine Anwendung von Barrows Umkehrungssatz 357
8. Newtons Reihenentwickelungen; erweiterter Gebrauch der Methode der unbestimmten Koeffizienten 362
9. Ergebnisse der Reihenentwickelungen und der Integrationen Newtons . . 367
10. Newtons Fluxionsmethode 374
11. Newtons Principia 381
12. Leibniz bis zur Grundlegung der Differentialrechnung 394
13. Anfang einer neuen Periode in der Geschichte der Mathematik 413
Verbesserung 426
Namen- und Sachregister 427

I.

Historischer und biographischer Überblick.

Der erste Teil des 16. Jahrhunderts war in der Mathematik wie auf den übrigen Gebieten der Kultur eine Zeit des Durchbruchs, eine Einleitung in „die neuere Zeit", und die Ursachen, die das nunmehr beginnende, üppige Emporblühen der mathematischen Wissenschaft zunächst vorbereitet hatten und dann hervorriefen, decken sich gewissermaßen mit denjenigen, die gleichzeitig in allen Verhältnissen Gärung und neues Leben schufen. Diese Bewegung verpflanzte sich zugleich von dem einen Gebiete auf das andere, und dies kam nicht am wenigsten der Mathematik zu gute, die durch Fragen, die ihr von außen gestellt wurden, gefördert ward.

In den letzten Jahrhunderten des Mittelalters bestand die mathematische Arbeit wesentlich in einer allmählichen Aneignung des früher von Griechen, Indern und Arabern Entwickelten, das dem westlichen Europa nach und nach durch Verbindungen mit den Arabern, die noch damals die Mathematik der Griechen und der Inder sowie ihre eigene zu bearbeiten fortfuhren, und von Konstantinopel aus zufloß, wo allerdings von einem Fortschritte nichts verlautet, wo man aber die Schriften besaß, welche die griechische Mathematik in unvermischter Gestalt enthielten, und wo man von denselben wohl noch ein wenig verstand. Diese Aneignung erfolgte indessen in Westeuropa nur durch eine mehr und mehr selbständige Arbeit. Eine solche war erforderlich, teils wegen der oft sehr mangelhaften Darstellungen, in denen Verfahren und Ergebnisse zuerst überliefert wurden, teils später, als man die griechischen Schriftsteller selbst zu lesen anfing, umgekehrt wegen ihrer strengen Darstellung, die auf Leser berechnet ist, die schon eine bedeutende mathematische Bildung besitzen. Durch diese selbständige Arbeit erwarb man nicht nur den Besitz desjenigen, was die Vorgänger gewußt hatten, sondern man vermochte demselben neue Formen zu verleihen, die man selbst besser zu beherrschen verstand, und die sich nach und nach so entwickeln ließen, daß sie auch einen neuen und größeren Inhalt umfassen konnten. Somit ward man auch in den Stand gesetzt, allmählich dem Studium Euklids, der besonders durch die Übersetzung des Campanus aus dem 13. Jahrhunderte bekannt war, größeren Ertrag abzugewinnen; den Ptolemäus kannte man

durch die Araber, und man erwarb sich einen solchen Grad der Reife, daß man das Studium eines Archimedes, eines Apollonius, eines Diophant und des an Aufschlüssen über die ältere griechische Mathematik so reichen Pappus mit Erfolg in Angriff nehmen konnte. Gleichzeitig hatte man von den Arabern indische Rechenkunst und, in arabischer Gestalt, Gleichungen 2. Grades und deren numerische Anwendung umfassende Algebra gelernt. Endlich hatte Regiomontanus es in der mit der Astronomie verbundenen Trigonometrie recht weit gebracht.*)

Daß man nun gerade zu dieser Zeit zu einer direkten Kenntnis der genannten griechischen Mathematiker wie der übrigen griechischen Literatur gelangte, steht bekanntlich mit der Eroberung Konstantinopels in Verbindung. Andere äußere, sich nach und nach entwickelnde Verhältnisse trugen dazu bei, der wissenschaftlichen Arbeit rascheren Fortgang und größere Verbreitung zu geben. Im früheren Mittelalter war diese Arbeit nur in den Klöstern zu Hause; aber schon von Leonardo von Pisa an sehen wir, daß auch Mitglieder der emporblühenden Handelskreise Italiens sich auf mathematische Untersuchungen einließen, und gerade, weil sie Handelskreisen angehörten, konnten sie nicht nur, wie eben Leonardo, aus vielen Ländern neue Beiträge sammeln, sondern auch andere Länder, Deutschland und Frankreich, an den eigenen Errungenschaften teilnehmen lassen. Die Reformation trug ferner dazu bei, der römischen Kirche das Monopol der Gelehrsamkeit zu entreißen, und zwar nicht nur in den Ländern, wo sie siegte, sondern auch in denen, wo sie allerdings zurückgedrängt wurde, aber doch große geistige Kräfte in Bewegung gesetzt hatte. Die Buchdruckerkunst endlich brachte eine bisher unbekannte Verbindung zwischen den Gelehrten zu stande.

Diejenige der übrigen Wissenschaften, die bisher den größten Einfluß auf die Entwickelung der Mathematik gehabt hatte, war die Astronomie. Außer den noch älteren Anregungen, die sie gegeben, hatten ihre Anforderungen früh die Begründung der Trigonometrie bewirkt und demnächst diese auf eine solche Höhe gebracht, daß sie jetzt im stande war, neben den eigenen Fortschritten auch sehr wesentliche Beiträge zur Algebra zu liefern. Neue Forderungen wurden jetzt durch die neue Lehre des Koppernikus an die Mathematik gestellt und wirkten fördernd auf die Mathematik sowohl bei denjenigen ein, die diese Anschauung verteidigten, als bei denen, die sie noch bekämpften. Dem Koppernikus folgten Tycho Brahe, Galilei, Kepler und Newton, und wir werden sehen, in welch hohem Grade die

*) In dieser Beziehung verweisen wir auf H. G. Zeuthen: Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Kopenhagen 1896, ein Buch, das auch in der Folge öfters citiert werden wird. Den durch Regiomontanus erreichten Standpunkt werden wir jedoch auch später genauer charakterisieren.

bedeutenden astronomischen Leistungen dieser Männer fortfuhren, in der Mathematik während der zwei Jahrhunderte, mit denen wir uns hier beschäftigen werden, die größten Fortschritte hervorzurufen.

Jedoch nicht nur als Weg zu der von diesen großen Männern gegründeten neuen Betrachtung des die Erde umgebenden Weltalls stellte die Astronomie an die Mathematik befruchtende Forderungen. Solche gingen auch von den Seefahrern aus, die jetzt die Erde zu umfahren begannen, und waren außerdem eine Folge des Verlangens nach einem neuen Kalender statt des julianischen, dessen Abweichung von den wirklichen Verhältnissen nunmehr klar geworden war.

Das hier von der Astronomie Gesagte gilt auch von der Mechanik. Die Lehre vom Gleichgewicht, die schon durch Archimedes zur exakten Wissenschaft geworden war, fuhr unter ihrer neuen und starken Entwickelung fort, sich der Mathematik zu bedienen und dadurch diese zu entwickeln und ihr fruchtbare Betrachtungsarten zuzuführen; als nun Galilei anfing, die Bewegung einer ebenso exakten Untersuchung zu unterwerfen, wurden dadurch neue mathematische Hilfsquellen, die namentlich die Entwickelung der Infinitesimalrechnung beeinflußten, sowohl erfordert als eröffnet. Die Fortschritte der Mathematik blieben auch in der Folge dauernd mit der Behandlung dynamischer Fragen, irdischer wie astronomischer, eng verbunden.

Zur Astronomie und Mechanik kamen nun auch die übrigen Naturwissenschaften hinzu. Von ihnen stellte die Optik, die Lehre von der Perspektive mit einbegriffen, ebenso wie im Altertum Fragen, die sich unmittelbar in geometrische Form umsetzen ließen, und später veranlaßte die Strahlenbrechung immer mehr eingehende mathematische Untersuchungen. Dasselbe konnte allerdings mit den andern Naturwissenschaften noch nicht der Fall sein; in dem jetzt hervorsprießenden Studium der Natur aber machten sich überall dieselben neuen und befreienden Ansichten wie in der Astronomie und Mechanik geltend und kamen durch die Forderungen dieser Wissenschaften auch der Mathematik zugute. Der Kern dieser Ansichten war, daß sich unsere Kenntnis der Natur auf Erfahrung und stets auf neue und direkte Erfahrung, nicht auf Deduktionen aus fertigen Prinzipien gründet, die besonders Aristoteles einst aufgestellt hatte oder von denen man oft vielleicht nur glaubte, daß sie von ihm herrührten. Von dem neuen Gesichtspunkt aus bedurfte man jedoch stets der mathematischen Deduktionen, indem man aus jeder neuen Hypothese die genauen Konsequenzen ziehen mußte, damit Beobachtungen oder Versuche, die entweder mit dem Deduzierten übereinstimmen oder demselben widerstreiten konnten, demnächst die Hypothese bestätigen oder entkräften konnten. Auf diesen

Wegen waren Männer wie Kepler und Galilei die Führer, und sie waren in dieser Beziehung ihrem Zeitgenossen Lord Bacon von Verulam voraus, der von philosophischer Seite her ähnliche Prinzipien aufstellte. Die unter dem Kampfe zwischen den alten und den neuen Weltanschauungen entstehenden Probleme wurden sodann von Männern wie Descartes und Leibniz behandelt, deren außerordentliche Verdienste um die Mathematik mit ihren philosophischen Betrachtungen eng verbunden sind.

Die Belebung der Mathematik stand somit in enger Verbindung mit der ganzen geistigen Befreiung, die durch die Namen *Renaissance* und *Reformation* gekennzeichnet ist. Dies ersehen wir auch daraus, daß sich große Maler wie Lionardo da Vinci und Albrecht Dürer, und zwar nicht zufällig, sondern auf Gebieten, die mit ihrer Kunst in enger Verbindung standen, mathematische Verdienste erwarben. Wir begegnen einem bedeutenden Mathematiker, Stifel, in Luthers nächster Umgebung; Vieta befand sich, wenn auch in den religiösen Fragen persönlich indifferent, inmitten des Streites zwischen Hugenotten und Katholiken, während ein anderer französischer Mathematiker, Ramus, in der Bartholomäusnacht als Hugenotte ermordet wurde, und Pascal und Descartes gehörten jeder auf seine Art und Weise zu denen, die innerhalb der römischen Kirche eine ähnliche Befreiung suchten wie die von den Protestanten durch den Austritt aus derselben gewonnene.

Der Durchbruch einer neuen, selbständigen Mathematik, der die Periode, mit der wir uns nun beschäftigen werden, einleitet, fand statt in dem Vaterland der Renaissance, in Norditalien. Er geschah, als man sich auf dem Gebiete der reinen Mathematik im stande sah, eine Aufgabe zu lösen, welche das Altertum und die Araber nicht hatten bewältigen können, nämlich die Gleichungen 3. Grades. Zu dem Kreise, in welchem diese Aufgabe gelöst wurde und demnächst schnell fortschreitende Untersuchungen veranlaßte, werden wir uns jetzt zunächst wenden.

Es war Scipione del Ferro, 1496—1526 Professor zu Bologna, der zuerst die Lösung der Gleichung $x^3 + ax = b$ fand, in der a und b positive Zahlen sind; er vertraute sie aber nur seinem Schwiegersohn und Amtsnachfolger Annibale della Nave und einem gewissen Floridus oder Fiore an. Eine solche Verheimlichung einer Methode kann die natürliche Ursache haben, daß man Ruhe haben will, um seine Methode selbst weiter zu bearbeiten; sie erhielt aber in jener Zeit eine besondere Bedeutung durch die damaligen wissenschaftlichen Wettkämpfe, in denen man sich gegenseitig Aufgaben stellte, wobei es darauf ankam, von den Aufgaben des Gegners möglichst viele zu lösen, die Lösung seiner eigenen aber dem Gegner möglichst zu erschweren. Dadurch gewann man nicht nur den ausgesetzten

Preis, sondern auch Ruhm, der sich in andere Vorteile umsetzen ließ. Indem die Aufgaben, wenn sie algebraisch gelöst werden konnten, sich gewöhnlich an ganz bestimmte Zahlen hielten, war es solcher Wettkämpfe wegen ein größerer Vorteil, eine Formel oder ein Rezept zu besitzen, wonach man viele solche, verschieden eingekleidete Aufgaben stellen konnte, als die Ehre zu gewinnen, die allgemeine Regel bekannt zu machen. Dies sehen wir eben an Fiore, der selbst keine mathematische Einsicht besaß, jedoch im Vertrauen auf seine Kenntnis der Formel Ferros zu dergleichen Wettkämpfen einlud.

In einem solchen trat er Nicolo Tartaglia aus Brescia (1500—1557) gegenüber, einem Manne von mathematischem Genie, der sich aber von Jugend an unter sehr schwierigen, besonders durch die Verheerung seines Vaterlandes durch die Franzosen hervorgerufenen Verhältnissen hatte emporkämpfen müssen. Sein ganzes Leben lang hatte er hieran ein Andenken, da er durch Mißhandlung eines Franzosen bei der Einnahme von Brescia 1512 zum Stotterer geworden war. Ja, das Andenken hieran erhält sich noch in seinem Namen, welcher Stammler bedeutet. Nach dem Tode seines Vaters 1506 lebte die Mutter in bedrängten Verhältnissen, und er erhielt deshalb eine späte und mangelhafte Erziehung. Später ernährte er sich in Venedig und Brescia durch Unterrichten. Sein harter Kampf ums Dasein und um den Ruhm, den sein Genie verdiente, wurde jedoch nicht immer mit ehrenhaften Mitteln geführt. So hat er eine sogenannte Übersetzung von Archimedes' Arbeit über die schwimmenden Körper herausgegeben, die sich später als ein Auszug aus der Übersetzung Mörbeckes ergeben hat, während das griechische Manuskript, auf das er sich berief, gar nicht existierte. Seine wichtigsten Schriften sind *Nuova Scienza* (Mechanik), seine polemischen Arbeiten und diejenigen, in denen er von seinen mündlichen Wettkämpfen Bericht erstattet, sowie schließlich der teilweise erst nach seinem Tode erschienene *General trattato di numeri et misuri.*

Wir werden im folgenden mehrmals seinem Namen begegnen, der jedoch namentlich mit der Lösung von Gleichungen 3. Grades verbunden ist. Als er sich mit Fiore in einen Wettkampf einließ, glaubte er zuerst, daß es ein leichtes sein würde, einen so unwissenden Menschen wie diesen zu überwinden; da er aber, als die Zeit des Kampfes sich näherte, erfuhr, Fiore besitze eine Regel eines verstorbenen Mathematikers, strengte er sich aufs äußerste an und fand selbst — wie früher Ferro — acht Tage vor Verlauf des Termins zur Lösung der gegenseitig gestellten Aufgaben die Regel für die Lösung von Gleichungen von der Form $x^3 + ax = b$. Am Tage des Kampfes, dem 12. Februar 1535, konnte er sämtliche 30 Aufgaben Fiores lösen, während dieser nach dem Berichte Tartaglias von den seinen, die

mit Sorgfalt aus verschiedenen Gebieten zusammengelesen waren, keine einzige löste, ja, nicht einmal eine solche, die er mittels der Regel Ferros hätte lösen können. Tags darauf fand Tartaglia, wie er berichtet, auch die Lösung der Gleichung $x^3 = ax + b$.

Das Glück Tartaglias erweckte besondere Aufmerksamkeit bei Girolamo Cardano (1501—1576), einem Manne, dem man sehr umfangreiche Werke über Philosophie — in denen er sich mit Heftigkeit am Kampfe um die Begründung der Erkenntnis auf Erfahrung, nicht auf der Autorität des Aristoteles, beteiligt — wie auch Werke über Arzneikunde und Mathematik zu verdanken hat; sowohl durch das umfassende Interesse und Studium, das er hierbei betätigt, als durch seine ganze Persönlichkeit erweist er sich als ein echtes Kind der Renaissance. Mit gleichem Eifer gibt er sich seinen Leidenschaften und frommen Betrachtungen hin, die jedoch auch in niedrigen Aberglauben ausarten können. Schon in früheren Arbeiten hatte er sich mit Gleichungen 3. Grades beschäftigt, ohne jedoch weiter kommen zu können als zu äußeren Umformungen oder zur Lösung in solchen einfachen Fällen, wo er es mit rationalen Wurzeln zu tun hatte. Als es bekannt wurde, daß Tartaglia weitergehende Lösungen besitze, wurde er sehr begierig, diese kennen zu lernen. Durch große Zudringlichkeit nötigte er endlich 1539 dem Tartaglia eine kurze Mitteilung über dieselben ab, nachdem er ihm zugeschworen, sie nicht zu veröffentlichen. Er suchte später einige weitergehende Aufschlüsse, besonders nachdem er selbst bemerkt hatte, daß die Regel Tartaglias für die Lösung der Gleichung $x^3 = ax + b$ bei gewissen Werten der Koeffizienten, nämlich in dem sogenannten irreduziblen Falle, unbrauchbar wird; nachdem er aber diesen Fall berührt hatte, stellte Tartaglia seine Mitteilungen ganz ein. Im Jahre 1545 brach Cardano seinen dem Tartaglia geleisteten Eid, indem er ein Gleichungen 3. Grades ausführlich behandelndes Werk *Ars magna de rebus algebraicis* veröffentlichte.

Dies geschah jedoch unter ausdrücklicher Anerkennung der Mitteilungen Tartaglias, und Cardano meinte, ein gewisses Recht zur Veröffentlichung dadurch erlangt zu haben, daß er mittlerweile bei einem Besuche in Bologna von dem oben erwähnten Schwiegersohne Scipio del Ferros die Lösung Ferros kennen gelernt hatte, die mit der Tartaglias übereinstimmte. Es kränkte indessen Tartaglia sehr, daß er nicht selbst der erste war, der etwas über diese Sache veröffentlichte. Seiner Aussage nach bereitete er jedoch schon immer eine Arbeit darüber vor. Diese hat indessen nie das Licht der Welt erblickt, und nur ein einziges Resultat, von ihm im *General trattato* mitgeteilt, bezeugt, daß er es auf diesem Gebiete weiter gebracht hat als zu dem schon dem Cardano Mitgeteilten oder in seiner Polemik Veröffentlichten.

Diese Polemik wurde jedoch nicht von Cardano selbst aufgenommen, sondern von seinem jugendlichen, heftigen Schüler Luigi Ferrari (1522—1565), der den Kampf mit großem Ungestüm führte. Seine eigne große Tüchtigkeit bewies Ferrari dadurch, daß er die Lösung von Gleichungen 4. Grades fand, und zwar so zeitig, daß sie in die *Ars magna* seines Lehrers aufgenommen werden konnte. Sie findet sich, wie die bedeutendsten der übrigen Arbeiten Cardanos, im vierten Bande seiner Werke. Von Italienern, die sich später im nämlichen Jahrhunderte mit algebraischen Gleichungen beschäftigten, werden wir Rafael Bombelli aus Bologna zu nennen haben, dessen Algebra 1572 erschien.

Bevor wir über die algebraischen Arbeiten in andern Ländern berichten, die eine Fortsetzung des in Italien Begonnenen bilden, wollen wir von anderen mächtigen Anregungen reden, die ein wenig später von eben diesem Lande ausgingen. Als eine solche müssen wir die engere Anknüpfung an die weitergreifenden Untersuchungen der Alten erwähnen, eine Errungenschaft von Federigo Commandino aus Urbino (1509—1575), dem Übersetzer des Pappus, und Francesco Maurolico aus Messina (1494—1575), dem Übersetzer des Archimedes, um nur die bedeutendsten Übersetzer und deren bekannteste Übersetzungen anzuführen. Nicht nur sind diese im Gegensatze zu früheren Übersetzungen griechischer Mathematiker mit klarem Verständnis der griechischen Vorlagen ausgeführt, sondern dies Verständnis wird von diesen Männern auch bei ihren eigenen Arbeiten an den Tag gelegt, die solche Fragen behandeln, die von den Alten gestellt sind. Dies gilt namentlich von Maurolico, einem Geistlichen, der sich übrigens auch als Geschichtschreiber und als physischer und meteorologischer Beobachter ausgezeichnet hat.

Ganz neue Ideen, die nur in einzelnen Punkten durch die mechanischen Untersuchungen von Tartaglia und Guido Ubaldo (1545—1607), dem Schüler Commandinos, sowie durch die Widerlegung aristotelischer Behauptungen von Cardano und besonders von Benedetti (1530—1590) vorbereitet waren, wurden von dem zu Pisa geborenen Galileo Galilei (1564—1642) angeregt. Sein Vater war ein angesehener Musikhistoriker, von dem er den Sinn für diese Kunst geerbt hatte. In seiner Kindheit lag er übrigens der Konstruktion von ihm selbst erfundener Maschinen ob. An der Universität seines Geburtsortes, wo er dem Wunsche seines Vaters gemäß die Medizin als Brotstudium wählte, wandte er sich jedoch bald der Philosophie, Physik, Mathematik und Astronomie zu. Bei dem Studium dieser Fächer nahm der eben erwähnte Guido Ubaldo sich seiner an. Früh trat er gegen den damaligen blinden Anschluß an die Lehren des Aristoteles in der Physik ein, da er selbst Beobachtungen machte, die diesen Lehren

widersprachen. So nahm er die Unabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit von dem Gewicht des Körpers wahr. In einem Alter von 19 Jahren bemerkte er, indem er im Dome einen in allmählich abnehmende Schwingungen geratenen Kronleuchter beobachtete, daß die Dauer der Schwingungen von der Größe des Ausschlages unabhängig sei. Diese und andere Verhältnisse prüfte er ferner durch selbständig ersonnene Versuche. Auf ähnliche Art und Weise wurde in der Astronomie sein Vertrauen auf das künstliche ptolemäische System erschüttert. Ein Gegengewicht gegen die hier genannten Autoritäten suchte er im Studium Platos und Archimedes.

Obgleich er sich unter diesen Umständen bald dem koppernikanischen Systeme anschloß, hielt er sich doch, als er 1589 zu Pisa Professor wurde, in seinen Vorlesungen an das ptolemäische, ja, tat es, wenigstens vorläufig noch, als er 1592 zu einer besseren Stellung an der Universität Padua berufen wurde. Hier genoß er jedoch, unter der Herrschaft der mächtigen Republik Venedig, einer weit größeren wissenschaftlichen Freiheit als in seiner vom Klerus mehr abhängigen Heimat. Er bediente sich dieser Freiheit nicht nur zu seinen eigenen Studien über alle möglichen zur Physik und Astronomie gehörigen Verhältnisse, sondern auch, um seine Gedanken hierüber durch seine Schüler sowie durch Abhandlungen und Briefe in weiteren Umlauf zu setzen. So beginnt hier sein Briefwechsel mit Kepler. Die Erfindung des Fernrohres lieferte Beweise für das koppernikanische System, nämlich die Monde Jupiters, die Achsenumdrehung unseres eigenen Mondes, die Phasen der Venus und die Sonnenflecke.

Angesehen, wie er jetzt war, wurde er 1610 zum ersten Mathematiker in Pisa ernannt, nahm aber gleichzeitig Aufenthalt in Florenz als Philosoph des Großherzogs. Vorläufig kam es auch hier nicht zu einem Bruche mit Rom; er wurde in die päpstliche Akademie *„dei Lincei“* aufgenommen, und sogar eine Anklage bei der Inquisition von seiten der Jesuiten, die vielleicht an ihm ihre eigene Vertreibung aus Padua rächen wollten, vermochte er, was seine eigene Person betraf, im Augenblicke abzuwenden. Jedoch wurde die Schrift des Koppernikus *De revolutionibus* 1616 in die Liste der verbotenen Bücher eingetragen, und zugleich wurde Galilei eine geheime Warnung erteilt. Diese hinderte ihn jedoch nicht, weiter zu arbeiten, und 1632 veröffentlichte er sein Werk über die beiden Weltanschauungen in Form von Dialogen, in denen die Gründe für und wider das ptolemäische und das koppernikanische System dargelegt werden. Diese Gründe führen entschieden zu dem Schluß, daß das letztere das rechte sei; jedoch vermeidet Galilei, diesen Schluß ausdrücklich auszusprechen, indem er nur sagt, er wolle zeigen, daß die Italiener zwar die Beweise für das koppernikanische System verständen, aber von religiösen Gründen zurückgehalten würden.

Auf einer Reise nach Rom, wo er freundlich empfangen wurde, hatte er geglaubt, die päpstliche Billigung der Herausgabe gewonnen zu haben; sie wurde aber wieder rückgängig gemacht, und nach der Herausgabe wurde er vor die Inquisition geladen. Der 69jährige wurde nach Rom gerufen und durch Androhen der Folter gezwungen, das abzuschwören, was man falsche Lehre nannte. Demungeachtet wurde er zu 3jährigem Gefängnis und einer strengen Kirchenbuße verurteilt. Ersteres wurde ihm zwar erlassen, aber er verlebte den Rest seines Lebens unter steter Aufsicht. Zudem wurde er von Sorgen und zuletzt von Blindheit heimgesucht.

Dennoch geschah es in diesem letzten Abschnitt seines Lebens, daß er, auf den in seiner Jugend unternommenen Versuchen und Untersuchungen fußend, das uns hier am meisten interessierende Werk ausarbeitete, nämlich dasjenige, in dem er die wissenschaftliche Dynamik begründete, so wie Archimedes die Statik begründet hatte. Das Werk erschien 1638 der Zensur wegen in Holland. Es trägt den Titel: *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* und ist in Form von Gesprächen zwischen den nämlichen drei Personen wie in der obengenannten Schrift über die beiden Weltanschauungen abgefaßt. Durch die genauen Beobachtungen und Versuche, auf denen die darin benutzten Voraussetzungen aufgebaut werden, bildet diese Schrift den Ausgangspunkt der modernen Experimentalphysik; nicht geringere Bedeutung hat sie aber für die Mathematik durch die in ihr gegebene exakte Begründung der Schlüsse, die man aus diesen Voraussetzungen ziehen kann und muß, wie die Bestimmung des bei einer gleichmäßig wachsenden Geschwindigkeit zu durchlaufenden Weges. Diese völlig bewußte Verbindung von Erfahrung und mathematischer Schlußfolgerung gab neben den gleichzeitigen und in ähnlicher Richtung sich bewegenden Untersuchungen Keplers der Philosophie eine neue und sichere Erkenntnisgrundlage.

Für die Entwickelung der Mathematik wurde es von großer Bedeutung, daß das jetzt betretene neue Gebiet neue mathematische Untersuchungsmethoden, namentlich infinitesimaler Natur erheischte. Diese wurden in der Folge mit der Erweiterung des neuen Gebietes und durch die somit entstandenen neuen Forderungen entwickelt. Ja, sogar die Betrachtungsweisen der Lehre von der Bewegung drangen in die reine Mathematik ein und trugen viel dazu bei, die Auffassung der steten Veränderlichkeit zu klären.

Die auf diesem Wege gewonnenen neuen Anschauungen wurden besonders von einem der Schüler Galileis — oder vielmehr einem Schüler von Galileis Freund und Schüler Castelli — nämlich Evangelista Torricelli (1608—1647) wissenschaftlich benutzt, der, nachdem er sich

1641 in einer Schrift *De motu* den Betrachtungsweisen Galileis angeschlossen hatte, von dem blinden Greise als Mitarbeiter aufgenommen wurde. Dies dauerte jedoch nur 3 Monate, bis zum Tode Galileis, worauf Torricelli in dessen Stellung als Mathematiker des Großherzogs eintrat. Am meisten bekannt ist er als Entdecker des Luftdruckes und Erfinder des Quecksilberbarometers; daß er aber zugleich ein großer Mathematiker war, erhellt nicht nur aus seinen Schriften, die 1644 unter dem Gesamttitel *Opera geometrica* erschienen, sondern auch aus den Arbeiten und den von ihm selbst gefundenen Resultaten, die man nach und nach aus Bibliotheken und Archiven hervorgeholt hat. Galileis und sein Einfluß ist besonders in den Formen zu spüren, unter denen die Infinitesimaluntersuchungen sich später in England weiter entwickelt haben.

Bei den Untersuchungen über den Luftdruck erhielt Torricelli Beistand von einem anderen, noch jüngeren Schüler Galileis, nämlich Vincenzo Viviani (1622—1703), der sich gleichfalls als Mathematiker ausgezeichnet hat. Wir werden später seine Schrift *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum librum Apollonii Pergaei adhuc desideratum* (1659) zu besprechen haben.

Früher von Galilei beeinflußt war auch ein anderer Gelehrter, der aus anderen Gesichtspunkten als dem hier erwähnten mechanischen oder kinematischen ausführlich infinitesimale Fragen behandelt hat, nämlich Bonaventura Cavalieri (1591?—1647). Er war zu Mailand geboren, wo er früh in ein Hieronymitenkloster aufgenommen wurde. Zu Pisa, wohin er gesandt wurde, um Theologie zu studieren, ward er von demselben Castelli, der später in Rom der Lehrer Torricellis wurde, in die Mathematik eingeführt, die ihn dermaßen in Anspruch nahm, daß er in ihr Linderung fand gegen stete und heftige Gichtschmerzen, die ihn schon seit frühen Jahren gequält hatten. Hier wurde er auch Nachfolger Castellis. 1629 wurde er auf die eindringliche Empfehlung Castellis und besonders Galileis als Professor nach Bologna berufen.

In einer seiner Schriften teilt er schon 1632 unter Hinweis auf Galilei als Entdecker, aber ohne dessen Genehmigung, den Satz mit, daß die Wurfbewegung in Parabeln verlaufe. Seine eigenen wichtigsten Untersuchungen, die solche infinitesimale Bestimmungen betreffen, die jetzt durch Integralrechnung ausgeführt werden, finden sich in der 1635 erschienenen *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (2. verbesserte Ausgabe 1653) und in den *Exercitationes geometricae sex* (1647). Auch bei diesen Arbeiten zeigt er einige Fühlung mit Galilei, der sich selbst mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt haben muß. Dies erhellt aus einem Briefe von Cavalieri, in welchem dieser, der damals — nämlich

1626 — sein Werk über „die indivisiblen Größen“ ausgearbeitet hatte, Galilei antreibt, seine Bearbeitung des nämlichen Stoffes erscheinen zu lassen. Diese aber, der Cavalieri anscheinend damals nicht zuvorkommen wollte, vielleicht, weil er selbst Galilei gewisse Ausgangspunkte zu verdanken hatte, ist jedoch niemals erschienen. Einen Vorgänger in diesen Untersuchungen, den Cavalieri selbst in der Vorrede seines ersten Werkes nennt, hatte Cavalieri jedenfalls an Kepler. Als eine der frühesten und als die umfassendste Gesamtbehandlung der betreffenden Themata erlangten die hier angeführten Werke Cavalieris große Verbreitung und Bedeutung, bis die Fluxions- und Differentialrechnung solchen Untersuchungen einen neuen Ausgangspunkt darboten.

Von italienischen Mathematikern werden wir noch Cataldi († 1626) zu nennen haben; auch ist wohl Ghetaldi in Ragusa (1566—1627) zu ihnen zu rechnen.

Nördlich der Alpen hatte sich in den letzten Jahrhunderten des Mittelalters sowohl Kenntnis der Algebra als auch Sinn für arithmetische und zahlentheoretische Fragen verbreitet. Sie waren gewiß eine Folge der lebhaften Handelsverbindungen, die damals zwischen Norditalien und den deutschen Städten stattfanden. Was besonders die Algebra betrifft, so zeigte schon der deutsche Name derselben, die *cossische* Kunst, daß sie aus Italien gekommen war. Hier wurde die Unbekannte nämlich *cosa*, Ding, genannt, während ihr Quadrat *census* hieß, ein Name, der durch Übersetzung von Muhammed ibn Mûsâs *mâl* (Vermögen) entstanden ist, also dem griechischen *δύναμις* (potentia) entspricht. Auch das Wort *census* fand den Weg in die deutschen Lehrbücher der Algebra. Unter den bedeutendsten *Cossisten* werden Johannes Widmann, Ende des 15. Jahrhunderts, Adam Riese (1492—1559) und der ungefähr gleichzeitige Rudolff genannt. Daß das Interesse für Algebra nicht auf einen ganz engen Kreis beschränkt war, sieht man daraus, daß Widmann darüber hat Vorlesungen halten können, und von der Verbreitung der Rechenkunst zeugen Drucke deutscher Rechenbücher.

Viel selbständiger wird sowohl Arithmetik als Algebra von Michael Stifel (1486 oder 87—1567) behandelt. In Eßlingen in Württemberg geboren, trat er in jungen Jahren in ein Augustinerkloster dieser Stadt. Er schloß sich früh der durch seinen Ordensgenossen Luther begonnenen Bewegung an, mußte, da er seine Ansichten frei und mutig aussprach, 1522 dem Kloster entfliehen und kam nach Wittenberg, von wo aus Luther ihm erst als Kapellan bei Adligen, später als Landpfarrer Anstellung verschaffte. Mit dem im Kloster angefangenen Studium der Bibel

hatte er mystische Spekulationen über die bei Daniel und in der Offenbarung Johannis vorkommenden Zahlen verbunden, die er in Wörter umsetzte, deren Buchstaben den Dreieckszahlen entsprechen sollten. Die Fortsetzung solcher Untersuchungen veranlaßte ihn, den Weltuntergang auf den 19. Oktober 1533 vorherzusagen, zu nicht geringer Verwirrung seiner eigenen Verhältnisse und der seiner Pfarrkinder und zu seiner eigenen Beschämung, da der Tag ohne jegliche Katastrophe verging. Luther bemerkte hierzu: „Er Michel hat ein kleines Anfechtlein bekommen; aber es soll ihm nicht schaden, gottlob, sondern nütze sein". Er wurde dadurch denn auch auf eine bessere Anwendung seiner großen mathematischen Begabung gebracht, die in seiner *Arithmetica integra* 1544 mit einer Vorrede Melanchthons fruchtbringend geworden ist. Ihr folgte eine für den gemeinen Mann bestimmte *Deutsche Arithmetica* 1545 und später 1553 eine Ausgabe von Rudolffs *Coss,* der er nebst bedeutenden Verbesserungen die mystische „Wortrechnung", zu der er in seinem Alter zurückgekehrt war, hinzugefügt hat. Seine letzten Jahre verbrachte er in Jena.

Wir werden später bestimmte mathematische Fortschritte, die Stifel zu verdanken sind, zu besprechen haben. Hier wollen wir noch bemerken, daß, wenn er Überliefertes behandelt, dies mit selbsterworbenem, eingehendem Verständnis des ganzen Zusammenhanges geschieht. Dies setzte ihn in den Stand, die zerstückelten Regeln der früheren Rechner und Cossisten für jeden einzelnen Fall durch allgemeine Rechenregeln zu ersetzen und sich eine für jene Zeit klare Auffassung von irrationalen Größen, ja, von infinitesimalen Bestimmungen zu verschaffen, und zwar, obgleich er, der wesentlich Autodidakt war und nicht Griechisch konnte, von der griechischen Literatur kaum anderes als die Elemente Euklids kannte. Daß er das in seiner eigenen Zeit Erscheinende mit Aufmerksamkeit verfolgte, ergibt sich daraus, daß er in die *Arithmetica integra* nach Cardano die von den Italienern gefundene Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades mit aufnehmen konnte.

Noch weniger Anleitung hat gewiß ein späterer deutscher Arithmetiker Johann Faulhaber in Ulm (1580—1635) bekommen. Erst war er Weber, ernährte sich aber später als Rechenmeister. Wie Stifel war er dem mystischen Gebrauche der Zahlen ergeben, wobei er den Pyramidalzahlen eine ähnliche Rolle zuteilte wie Stifel den Dreieckszahlen. Er lag auch der Goldmacherei ob.

Eine Stadt, in der sich die Verhältnisse besonders geltend machten, die mit Ausgang des Mittelalters die in Norditalien wiedergeborene Wissenschaft und Kunst nach Deutschland brachten, war Nürnberg. Sie stand in lebhaftem Handelsverkehr mit Italien, und innerhalb ihrer Mauern bildete

sich eine Handelsaristokratie, die sich durch Reisen die erforderliche Bildung erworben hatte und auch hinlänglich wohlhabend war, um Wissenschaft und Kunst einen Platz einzuräumen. Beide wurden damals hier von nicht wenigen gepflegt. Von Mathematikern, die hauptsächlich dort Anhalt fanden, haben wir schon (s. S. 2 unten) den bedeutendsten, nämlich Regiomontanus (1436—76) erwähnt, dessen hinterlassenes Manuskript zu dem Werke über Dreiecke nach seinem Tode in Nürnberg aufbewahrt, ja, so gut aufbewahrt wurde, daß es erst 1533 durch die Fürsorge des als Mäcen und Bibliophile hervorragenden Pirckheimer im Druck erschien. In dem Hause dieses Mannes sammelte sich ein Kreis von Gelehrten und Künstlern, unter letzteren der große Maler Albrecht Dürer (1471—1528), dessen 1525 herausgegebene Schrift *Unterweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt* ihn berechtigt, auch in der Geschichte der Mathematik erwähnt zu werden. Was ihm hierin namentlich Ehre macht, ist außer der ihn als Maler besonders interessierenden geometrischen Behandlung der Perspektive sein sicheres Scheiden zwischen geometrisch genauen und genäherten Konstruktionen. Dem Kreise Pirckheimers gehörte auch der Pfarrer Johannes Werner (1468—1528) an, der in der Trigonometrie ein Nachfolger von Regiomontanus war. Sein Werk *De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis* blieb jedoch ungedruckt und ist verloren gegangen, ist aber anderen Schriftstellern bekannt gewesen und von denselben benutzt worden, wodurch man das eine und andere von seinem Inhalt weiß. Seine rein geometrischen Arbeiten sind mit denen Dürers etwas verwandt, indem er in dem *Libellus super viginti duobus elementis conicis* zu geometrischen Untersuchungen die Perspektive verwendet.

Ein späterer Mathematiker, Daniel Schwenter (1585—1636), stammt auch aus Nürnberg, in dessen Nähe, nämlich in Altdorf, er Professor der orientalischen Sprachen und der Mathematik war. Er ist Verfasser einer *Geometria practica* und der *Deliciae physico-mathematicae oder Mathematische und philosophische Erquickstunden.*

Trigonometrie und Berechnungskunst wurden im 16. und 17. Jahrhundert nicht nur durch das Buch des Regiomontanus gefördert, sondern es mußten auch aus den durch die gewaltigen Fortschritte der Astronomie gestellten Forderungen große uud neue Antriebe erwachsen. Diese rühren her von Koppernikus in Polen, dem Dänen Tycho Brahe und dem Deutschen Kepler, deren mächtiger Einfluß, wie wir es bei der Erwähnung Galileis gesehen haben, sich schnell über die ganze civilisierte Welt erstreckte. Obgleich die größten Errungenschaften der beiden ersteren der Astronomie angehören, wollen wir doch hier ihres Lebenslaufes gedenken und sodann von Kepler reden, dessen Arbeiten nicht nur in der Geschichte

der Astronomie, sondern auch unmittelbar in der Geschichte der Mathematik eine Hauptrolle spielen.

Nikolaus Koppernikus (1473—1543) ist zu Thorn geboren und wurde, nachdem er zu Krakau und Bologna studiert hatte, Domherr zu Frauenburg, setzte jedoch auch nach dieser Zeit besonders seine juristischen Studien in Italien fort, bevor er 1505 oder 1506 wieder nach Frauenburg zurückkehrte, um daselbst zu bleiben. Hier hatte er bei vielen verschiedenen anderen Arbeiten Muße, das große Werk *De revolutionibus orbium coelestium* auszuarbeiten, welches das koppernikanische Weltsystem enthält mit der rotierenden Erde und der stillstehenden Sonne, um die die Erde und die Planeten sich bewegen. Nach einer vorläufigen Anzeige, die Koppernikus 1533 an verschiedene Gelehrte hatte ergehen lassen, wurde er zu Frauenburg von Rhaeticus (1514—1576) aufgesucht, der damals Professor zu Wittenberg, später zu Leipzig und Krakau war. Dieser veröffentlichte 1539 einen ausführlicheren Bericht und brachte 1541 das vollständige Manuskript von Koppernikus' Werk nach Nürnberg, wo der Druck desselben 1543, in dem nämlichen Jahre, in dem der Verfasser starb, beendigt ward.

Wir berührten schon bei der Besprechung Galileis den indirekten Einfluß auch auf die Gebiete der mathematischen Untersuchungen, den der große und befreiende Gedanke des Koppernikus dadurch ausübte, daß er andere Gedanken wachrief, die mathematische Untersuchungen erforderten, ja, diesen sogar einen gewissen Schwung verliehen. Mehr unmittelbar wurden sowohl die Astronomen, die sich Koppernikus anschlossen, als diejenigen, die das Alte aufrecht zu erhalten suchten, auf eine genauere Beobachtung der astronomischen Fakta und eine genauere trigonometrische Behandlung verwiesen, wodurch dieser Zweig der Mathematik, sowie die Ausarbeitung von Tafeln und deren Gebrauch gewaltig gefördert wurde. Dies wurde, wie wir sehen werden, wieder von Einfluß auf die übrige Mathematik und die Berechnungskunst. Zu solcher trigonometrischer Arbeit hat Koppernikus selbst, vielleicht jedoch unter Beihilfe von Rhaeticus, in einigen Kapiteln seines großen Werkes beigetragen, die Rhaeticus 1542 mit einer etwas vollständigeren Sinustafel als der von Koppernikus selbst gegebenen besonders herausgab. Rhaeticus hat danach 1551 den ausführlicheren *Canon doctrinae triangulorum* herausgegeben, der später von Tycho Brahe benutzt wurde und Vieta bekannt war. Dabei ließ Rhaeticus es jedoch nicht bewenden, sondern begann die Ausarbeitung von weit umfangreicheren Tabellen im *Opus Palatinum*, das 20 Jahre nach seinem Tode von seinem Schüler Otho vollendet und herausgegeben wurde. Ungedruckte Berechnungen von Rhaeticus, die in wichtigen Punkten die Tabellen noch mehr erweitern, gerieten demnächst in die Hände des pfälzischen Hof-

predigers Bartholomäus Pitiscus (1561—1613), der nicht nur Theologe, sondern auch ein tüchtiger Mathematiker war. Er hat einesteils ein gutes und viel benutztes trigonometrisches Lehrbuch herausgegeben, anderenteils im *Thesaurus mathematicus* das große Tabellenwerk des Rhaeticus berichtigt, erweitert und neu geordnet.

Trigonometrische Arbeiten haben wir auch dem zu Bamberg geborenen Christoph Clavius (1537—1612) zu verdanken. Er war Jesuit, wurde an dem Kollegium seines Ordens zu Rom als Lehrer angestellt und ward hier ein eifriger Mitarbeiter an der Kalenderreform. Die trigonometrischen Arbeiten des Pitiscus und Clavius fallen übrigens später als die unten zu erwähnende Arbeit des dänischen Mathematikers Thomas Fincke, von der sie auch beeinflußt sind.

Wir wenden uns nun zu dem nächsten großen Astronomen Tycho (gewöhnlich Tyge) Brahe (1546—1601). Er ist auf dem Rittergute Knudstrup in Schonen aus altem adeligen Geschlecht geboren. Nach Studien an der Universität Kopenhagen wurde er von seiner Familie unter Leitung des späteren Historikers Anders Sörensen Vedel früh ins Ausland gesandt, um sich für den Staatsdienst vorzubereiten; er benutzte aber die Zeit meistens, um das Studium der Astronomie in Angriff zu nehmen und auf eigene Faust Untersuchungen anzustellen. Diese Beschäftigung fand in den adeligen Kreisen, denen er angehörte, nur wenig Sympathie. Er hielt sich deshalb meistens im Auslande auf und setzte an verschiedenen Orten seine Studien und Beobachtungen fort, bis die Krankheit und der Tod seines Vaters und die Übernahme des väterlichen Gutes (in Gemeinschaft mit seinem Bruder) ihn nach Hause riefen. Hier lag er besonders der Chemie ob, bis die Erscheinung des neuen Sternes im Sternbild der Kassiopeia 1572 ihn wieder zur Astronomie zurückführte. Den Beruf, diese Wissenschaft zu betreiben, empfand er jetzt so deutlich, daß er sich über die Vorurteile seiner Standesgenossen, die ihn bisher zurückgehalten, hinwegsetzte, und daß er, was namentlich Bedenken hervorrief, obgleich von Adel, eine Schrift *De nova stella* über die mit diesem Sterne verbundenen Beobachtungen und Untersuchungen herausgab. Das Aufsehen, welches diese Schrift bei den Sachverständigen im Auslande machte, erregte denn auch in der Heimat Aufmerksamkeit für seine Arbeit, und, vom König aufgefordert, hielt er einige astronomische Vorlesungen. Er ging jedoch wieder ins Ausland, besonders um Verhältnisse zu finden, unter denen er in seinem Fache in einem solchen Umfange arbeiten könnte, wie es seinen Plänen entsprach. Dennoch war es sein Vaterland, das ihm in reichem Maße die Mittel zur Durchführung derselben spendete, indem König Friedrich II. ihm 1576 ein Jahresgehalt verlieh, ihm die Insel Hveen als abgabenfreies Lehen schenkte und ihm ferner durch andere Be-

lehnungen und direkte Unterstützungen zur Erbauung seiner Uranienburg und zur Bestreitung der großen Kosten verhalf, welche die Beschaffung der von ihm ersonnenen Instrumente und der Betrieb des Observatoriums erforderten. Unter ungewöhnlich günstigen Verhältnissen verbrachte Tycho Brahe hier 20 Jahre, umgeben von zahlreichen Schülern und Mitarbeitern aus verschiedenen Schichten der Bevölkerung seiner Heimat und aus fremden Ländern. Durch diese wurden hier mit bisher unbekannter Genauigkeit Beobachtungen ausgeführt, die auch den größten theoretischen Fortschritten den Weg bereiten sollten, und die der späteren Beobachtungskunst als Vorbilder gedient haben. Diese glückliche Zeit fand jedoch ihr Ende. Dazu gab teils Brahe selbst Veranlassung, indem er die Lehen, welche die großen Kosten für den von ihm geleiteten Betrieb aufbrachten, schlecht verwaltete; teils sammelte sich um den jungen König Christian IV. ein Kreis von Ratgebern, die diese Wirksamkeit nicht zu würdigen verstanden und sich durch die Eigenmächtigkeit Tycho Brahes verletzt fühlten. Lehen wurden ihm auf rücksichtslose oder sogar ungerechte Art und Weise genommen, und Unterstützungen hörten auf, sodaß Tycho Brahe, zugleich durch Aussicht auf Anstellung bei dem Kaiser Rudolf angelockt, sich veranlaßt fühlte, Uranienburg zu verlassen und kurz darauf mit Büchern, Instrumenten und Handschriften ins Ausland zu gehen. Ein Anerbieten von seiner Seite, zurückzukehren, führte zu keinem Resultate, da der ebenso selbstbewußte König dadurch verletzt wurde, daß Tycho Brahe Bedingungen stellte. Erst jetzt folgte dieser dem ehrenvollen Rufe des Kaisers, unter günstigen Bedingungen seine Tätigkeit nach Prag zu verlegen. Hier kam Tycho Brahe mit Kepler in engeren Verkehr. Trotz seiner Dankbarkeit für den guten Empfang aber konnte er sich nicht recht in die neuen Verhältnisse hineingewöhnen. 1601 starb er.

Tycho Brahe war einer der Bahnbrecher, die unserer Naturerkenntnis Erfahrung und Beobachtung, also weder die vererbte Autorität eines Aristoteles noch die eines Ptolemäus zu Grunde legen wollten. In dieser Beziehung war er ein Vorgänger Keplers und Galileis; das bei ihm jedoch besonders Hervorzuhebende ist die Beschaffenheit der Beobachtungen und Erfahrungen, auf denen er bauen wollte. Diese werden charakterisiert durch die außerordentliche Genauigkeit, die er durch seine neuen Instrumente und Methoden erzielte, und durch die bisher unbekannte Fülle und Stetigkeit von Beobachtungen, die unter seiner Leitung auf Hveen gewonnen wurden.

Tycho Brahe war jedoch nicht sehr leicht bereit, mit den alten Ansichten zu brechen. Wie diese durch Beobachtungen zu prüfen waren, so konnten auch nur solche neue Anschauungen seinen Beifall erhalten, die durch die gewonnenen Erfahrungen gestützt wurden. Er verwarf nicht die

Möglichkeit, am Sternenhimmel Voranzeichen über Schicksal oder doch wenigstens über Witterung finden zu können; er wollte aber durch die Erfahrung auf diesem Gebiete sicheren Grund und Boden finden. Die Frage nach Voranzeichen letzterer Art veranlaßte ihn, zusammenhängende Witterungsbeobachtungen zu unternehmen, die ihn allerdings nicht zu dem erstrebten Ziele haben führen können, aber in der Gegenwart Bedeutung bekommen haben, indem sie uns darüber aufklären, daß die Witterungsverhältnisse heutzutage die nämlichen sind wie damals.

Daß das koppernikanische System vor seiner Prüfung nicht bestehen konnte, war unter diesen Umständen nicht so sonderbar, wie man jetzt leicht glaubt. Sogar bei seinen Beobachtungen, die viel feiner waren als diejenigen früherer Zeiten, zeigten nämlich die Fixsterne von jährlicher Parallaxe keine Spur. Sie mußten sich also, falls die Erde sich bewegte, in Entfernungen befinden, die mit einigem Grund als unermeßlich erscheinen mochten, ja, sie mußten, da sie, vor dem Gebrauch des Fernrohres, eine sichtbare Ausdehnung zu haben schienen, geradezu widersinnige Dimensionen haben. Diese Schwierigkeit suchte Tycho Brahe zu vermeiden, indem er die Erde stille stehen ließ, gleichzeitig erzielte er in Bezug auf die Erklärung wirklich zu beobachtender Erscheinungen die nämlichen Vorteile wie Koppernikus, indem er der Sonne und den Planeten dieselben relativen Bewegungen im Verhältnis zur Erde beilegte, wie dieser in seinem System. Da hingegen seine eigenen Beobachtungen eines Kometen zeigten, wie gewaltig dessen Entfernung von der Erde variiere, so trug er kein Bedenken, mit den festen Wölbungen, an denen die Himmelskörper sitzen sollten, zu brechen. Die Bedeutung so vollständiger und genauer Beobachtungen, wie sie Tycho Brahe forderte und durchführte, zeigte sich jedoch am besten darin, daß Kepler die von ihm gesammelten zusammenhängenden Beobachtungsreihen verwendete, um die Haupträtsel der theoretischen Astronomie zu lösen.

In der Geschichte der Mathematik interessiert uns jedoch nicht nur diese mehr mathematisch durchgeführte Anwendung der Beobachtungen Tycho Brahes, sondern auch der Gebrauch, den er selbst und seine Schüler von der Trigonometrie machen mußten, um den Berechnungen, die sie bei Ortsbestimmungen mit den Beobachtungen verbinden mußten, dieselbe Genauigkeit wie diesen zu geben. Hierüber findet man Auskunft in einer hinterlassenen Handschrift von Tycho Brahe (herausgegeben von Studnička); diese gibt Regeln für trigonometrische Berechnung von ebenen und sphärischen Dreiecken mit 3 gegebenen Stücken und zeigt, daß man hierzu zweckmäßig die damals vorliegende Trigonometrie mit Ausnahme des erst neuerdings von Vieta Gefundenen zu verwenden wußte. Man gebrauchte z. B. die

sogenannte prosthaphäretische Methode. An der Einführung derselben hat ein Mitarbeiter Anteil, der Deutsche Paul Wittich, dessen mathematischen Beistand Tycho Brahe besonders hochschätzte. Derselbe Wittich übermittelte sie auch dem Gönner und Freunde Tycho Brahes, dem Landgrafen Wilhelm von Hessen, und so dem zweiten großen Observatorium damaliger Zeit, wo Bürgi sie weiter entwickelte.

Unter den dänischen Schülern Tycho Brahes haben wir Christian (Christen) Longomontanus (1562—1647), von 1605 Professor an der Kopenhagener Universität, zu nennen. Er war es, der das Observatorium auf dem „Runden Turme" einrichtete. Mit westjütischer Treue schloß er sich Tycho Brahe an, solange dieser lebte, und hielt auch nach dessen Tode an seinen Beobachtungs- und Berechnungsmethoden wie an seinen Ansichten fest. In Bezug auf erstere blieb er den durch Gebrauch von Fernrohr und Logarithmen gestatteten Fortschritten ziemlich verschlossen, in Bezug auf letztere ließ er sich nur auf die durch genaue Beobachtungen erforderten Änderungen ein. Daß er in seinen Forderungen an mathematische Beweisführung weniger streng war, zeigt sich darin, daß er an seinem Glauben an eine von ihm selbst angenommene Quadratur des Kreises festhielt.

Ein Zeitgenosse von Tycho Brahe war ein anderer dänischer Mathematiker, der Flensburger Thomas Fincke oder, wie er sich in jüngeren Jahren schrieb, Fink (1561—1656), der lange Zeit hindurch, von 1591 bis zu seinem Tode, an der Kopenhagener Universität erst für Mathematik, später für Arzneikunde Professor war, wenn er auch in seinen letzten Lebensjahren keine Vorlesungen mehr hielt. Seine eigentlich mathematische Tätigkeit fällt jedoch in seine Studienjahre im Auslande, besonders in Straßburg, und der bedeutendste Ertrag dieser ist das trigonometrische Werk *Geometria rotundi*, 1583.

Wir wollen hier zugleich einen anderen Dänen erwähnen, dessen Namen wir jedoch erst gegen Ende der Periode antreffen werden, die hier behandelt werden soll, nämlich Olaf (Ole) Roemer (1644—1710). Nach astronomischen Arbeiten in der Heimat, und besonders nachdem er sich in Verbindung mit dem Franzosen Picard bemüht hatte, die geographische Lage der Uranienburg wieder aufzufinden, ging Roemer 1672 mit Picard nach Paris, um für den Druck der Manuskripte Tycho Brahes Sorge zu tragen. Hier erhielt er zugleich Anstellung am Observatorium als Gehilfe, und seine Beobachtungen der Jupitermonde führten ihn auf die Entdeckung der Geschwindigkeit des Lichtes. Diese Entdeckung unterbreitete er der Akademie der Wissenschaften, von der er ein tätiges Mitglied war. Daneben wirkte er auch als Ingenieur. 1681 kehrte er zur Heimat zurück und übernahm die Professur der Astronomie, zu der er im voraus bestimmt war

aber gleichzeitig verstand man es auch hier, seine glänzenden praktischen Fähigkeiten in vielen öffentlichen Aufträgen zu verwerten. Er fand jedoch Muße, um als würdiger Nachfolger Tycho Brahes die astronomischen Hauptinstrumente zu konstruieren und zu benutzen, welche die Erfindung des Fernrohres und der Pendeluhr nunmehr ermöglichten, und die sich durch ihre große Zweckmäßigkeit bis auf den heutigen Tag bewährt haben. Seine eigenen Instrumente und seine meisten Beobachtungen gingen jedoch durch die große Kopenhagener Feuersbrunst (1728) zu Grunde.

Nach dieser Abschweifung über die Mathematiker meines Vaterlandes kehren wir nach Deutschland zurück und wenden uns demjenigen der drei großen Astronomen zu, der zugleich Mathematiker ersten Ranges war, Johannes Kepler (1571—1630). Wie Stifel war er ein Württemberger, geboren zu Weil. Er lernte schon in der protestantischen Klosterschule Arithmetik und sphärische Astronomie; später im sogenannten „Stift" zu Tübingen, wo er übrigens Theologie studierte, war Maestlin sein Lehrer in der Mathematik und Astronomie. Dieser, der sich dem koppernikanischen System anschloß, obgleich er über das ptolemäische Vorlesungen hielt, war ihm später ein getreuer Freund. Als Kepler, der ein überzeugter Protestant war, sich aber der starren württembergischen Orthodoxie nicht unterordnen konnte, in seiner Heimat auf Anstellung keine Aussicht hatte, nahm er 1594 eine Professur für Mathematik und Moral zu Graz an. Von hier wurde er von den Katholischen verdrängt und begab sich 1600 auf Wunsch Tycho Brahes nach Prag, um dessen Gehilfe zu werden. Im Jahre darauf wurde er beim Ableben Tycho Brahes sein Nachfolger als kaiserlicher Hofastronom und verbrachte zu Prag, wo ihm Tycho Brahes reiches Beobachtungsmaterial zur Verfügung stand, seine ruhigste Zeit, bis er 1612 nach Linz versetzt ward. Hier blieb er zwar kaiserlicher Hofastronom, aber in Ermangelung des ihm zukommenden Gehalts mußte er sich durch allerlei kleine astronomische und astrologische Arbeiten ernähren, die ihm alle seine Zeit raubten; gleichzeitig hatte er unter den Verfolgungen der Katholiken zu leiden. Da der Kaiser Keplers gerechte Forderungen zu befriedigen nicht vermochte, mußte er ihm gestatten, bei Wallenstein Dienste zu nehmen, dessen Interesse an der Astronomie ausschließlich von astrologischem Aberglauben herrührte. Kepler starb zu Regensburg, wohin er sich begeben hatte, um vor dem Reichstage seine Sache zu führen. Persönlich hat er jedoch den neuesten Untersuchungen zufolge keine Not gelitten; er mußte aber hart kämpfen, um das zur Herausgabe seiner Werke nötige Geld zu erlangen.

Kepler, der wie Koppernikus davon ausging, die Welt müsse nach

einfachen Gesetzen gebaut sein, die vor allem einfache quantitative Ausdrücke finden müßten, gab 1596 zu Graz eine Schrift heraus, *Mysterium cosmographicum,* in der er die Entfernungen der verschiedenen Planeten von der Sonne dadurch charakterisierte, daß die Bahnen von Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn auf einer Reihe von Kugelflächen mit der Sonne als Zentrum liegen, um und in welche die 5 regulären Polyeder: Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Tetraeder und Hexaeder sich der Reihe nach beziehungsweise um und einschreiben lassen. Er sah jedoch bald, daß die einfachen quantitativen Zusammenhänge nicht in solchen Spekulationen zu suchen seien, sondern auf strenge und sorgfältige Beobachtungen gebaut werden müßten, wie die Tycho Brahes, von dem Kepler in einem Briefe an Maestlin gesagt hat, er besitze Reichtümer, verstände aber, wie so viele Reiche, nicht, sie auf die rechte Art und Weise zu benutzen. In Prag wurde es nun Kepler selbst beschieden, diese Schätze zu verwerten. Dies tat er dadurch, daß er aus denselben die Keplerschen Gesetze herleitete. Die beiden ersten, die sich auf einen einzelnen Planeten beziehen, hat er in der 1609 zu Prag erschienenen *Astronomia nova de motibus stellae Martis* dargestellt, das dritte über die verschiedenen Umlaufszeiten und mittleren Entfernungen in dem 1619 zu Linz erschienenen Werke *Harmonice mundi.* Der Weg, den er einschlägt, um aus Erfahrungen Gesetze herzuleiten, ist ungefähr derselbe wie der Galileis, mit dem Unterschiede, daß Kepler wesentlich ein fertiges Erfahrungsmaterial benutzte, während Galilei allmählich durch neue Versuche vorwärts kommen mußte. Kepler selbst hat in seiner Lehre von der wissenschaftlichen Hypothese über diesen Weg Rechenschaft abgelegt.

Die Wissenschaft fängt mit Beobachtungen an, baut darauf ihre Hypothesen und sucht demnächst die Ursachen zu ermitteln, die den angenommenen Zusammenhang bewirken. Der letzte Schritt gelang allerdings, was die Planetenbewegung betrifft, erst Newton; aber die dazu notwendige Beschreibung von dem zu geben, was sich bei der Bewegung der Planeten ereignet, das erreichte Kepler vollkommen. Er ging von der Hypothese des Koppernikus aus und verbesserte sie allmählich unter steter Benutzung der Beobachtungen Tycho Brahes, bis er zu einer Beschreibung der Bewegungen kam, die zugleich einfach und mit den Beobachtungen übereinstimmend war.

Die ungeheure Arbeit, die Kepler dabei ausführen mußte, besteht durchaus in Mathematik und Rechnen. Um zu prüfen, ob die Beobachtungen mit einer Hypothese übereinstimmen, ist zu untersuchen, was die Hypothesen mit sich führen, die sodann ebenso zu behandeln sind, wie die Mathematik ihre Voraussetzungen behandelt. Auch in diesen sieht Kepler Hypothesen

derselben Natur wie die astronomischen, wie denn auch Euklid sie nur auf diese Weise behandelt, ohne zu fragen, woher man sie hat. Die mathematische Prüfung der Hypothesen Keplers stellte große Anforderungen: Fertigkeit in der Geometrie des Raumes, da der Stern von einem beweglichen Punkt aus beobachtet wird, Bekanntschaft mit den Kegelschnitten und infinitesimale Bestimmungen. Diesen Anforderungen konnte die Mathematik nur gerecht werden, indem sie selbst unter der Hand Keplers Forschritte von größter Bedeutung machte. Da die Beobachtungen in Zahlen vorlagen, wurde auch fortwährendes Rechnen erfordert, weshalb wir auch sehen werden, daß Kepler mit den Fortschritten, die zur Erleichterung des Rechnens dienen, genau bekannt war; ja, er hat in der 1624 erschienenen *Chilias logarithmorum* zu solchen Fortschritten selbst beigetragen. Logarithmen benutzt er auch bei der Ausarbeitung der 1627 erschienenen *Rudolphinischen Tafeln,* die auf Tycho Brahes Beobachtungen gegründet sind. Außer der Astronomie gab die Frage nach der ökonomischsten Form von Weinfässern ihm Veranlassung zu infinitesimalen Untersuchungen von grundlegender Bedeutung in der 1615 erschienenen *Stereometria doliorum.*

In Prag kam Kepler mit einem anderen merkwürdigen und bedeutenden Mathematiker in Berührung, dem Schweizer Jobst Bürgi (1552—1632). Dieser gehörte nicht zur Zunft der Gelehrten, konnte deshalb auch kein Latein, sondern war Mechaniker und Uhrmacher. 1579 wurde er am Observatorium des Landgrafen Wilhelm IV. zu Cassel als Hofuhrmacher und astronomischer Instrumentenmacher angestellt. Hier hatte er jedoch bald Gelegenheit, auch an den Beobachtungen und Berechnungen teilzunehmen, und an letztere knüpfen sich seine wichtigsten mathematischen Verdienste. 1603 wurde er von Kaiser Rudolf II. als kaiserlicher Kammeruhrmacher nach Prag berufen, wo Kepler seine Tüchtigkeit hochschätzte, jedoch damit unzufrieden war, daß er seine Erfindungen nicht bekannt machte. Eine Art von Logarithmen (oder vielmehr Antilogarithmen) erschien somit erst 1620, lange Zeit, nachdem er sie ersonnen und berechnet hatte, und nachdem Nepers Logarithmen erschienen und bekannt geworden waren. Sie finden sich in dem Werke: *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabuln, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol.* Der in diesem Titel versprochene gründliche Unterricht ist erst 1856 aufgefunden und herausgegeben worden. Die übrige Kenntnis, die man sonst von Bürgis Arbeiten hat, verdankt man teils einer gleichfalls später aufgefundenen *Arithmetica,* teils den Mitteilungen Keplers.

Wir können hier noch einen anderen schweizerischen Mathematiker erwähnen. Paul Guldin (1577—1643), der sich wie Kepler mit infinitesi-

malen Untersuchungen beschäftigte und in dieser Beziehung zu Kepler und besonders zu Cavalieri in scharfe Opposition trat, jedoch sicher von Keplers Arbeiten stark beeinflußt war und, was die Zuverlässigkeit der Resultate betrifft, hinter diesem weit zurückstand. Er war zu St. Gallen geboren. In einem Alter von 20 Jahren vertauschte er das reformierte Bekenntnis mit dem Katholizismus, wurde Jesuit und veränderte gleichzeitig seinen früheren Vornamen Habakuk in Paul. 1609 wurde er Lehrer der Mathematik an den Schulen der Jesuiten, zuerst in Rom, später in Graz, wo er starb. Die 4 Bände seines Hauptwerkes *Centrobaryca* erschienen nach und nach in den Jahren 1635—41.

Vor allen anderen bezeugt Kepler, wie weit die deutsche Mathematik es vor dem dreißigjährigen Kriege gebracht hat. Die Wirkungen dieses Krieges fängt man schon an, in den Schwierigkeiten zu spüren, mit denen Kepler zu kämpfen hatte, wie tiefgehend aber die Verheerungen desselben waren, das zeigt sich an dem weiten Sprung bis zu dem nächsten deutschen Mathematiker, den wir zu nennen haben, nämlich Leibniz, und darin, daß dieser sich in den westlichen Ländern und im Anschluß an die dort so kräftig blühende Wissenschaft zu dem großen Gelehrten entwickelte, der er war. Deshalb müssen wir uns, bevor wir auf ihn übergehen, mit den Mathematikern dieser Länder beschäftigen.

In Frankreich wirkte am Ausgang des Mittelalters derjenige, der es vor den algebraischen Fortschritten, die den Eintritt in die neuere Zeit bezeichnen, in der Arithmetik und Algebra am weitesten gebracht hatte, nämlich Chuquet. Ebenda werden wir auch in Vieta den größten Mathematiker des ersten der beiden Jahrhunderte antreffen, mit denen wir uns zu beschäftigen haben; auch gehört ein großer Teil seiner Arbeiten den hier genannten Gebieten an. Weder historisch, noch in der Behandlungsweise läßt sich indessen irgendwelche Verbindung zwischen Chuquet und Vieta nachweisen. Eine solche Verbindung wird auch nicht durch den französischen Mathematiker angeknüpft, der sich in der Zwischenzeit einen Namen gemacht hatte, Pierre de la Ramée (1515—1572), gewöhnlich Petrus Ramus genannt, Professor der Philosophie zu Paris. Sein Ansehen ist nämlich auf ganz anderen Gebieten errungen und beruht besonders auf allgemeinen reformatorischen Bestrebungen, sowie darauf, daß er sich von solchen vererbten Prinzipien losriß, die wir Vieta mit großer Strenge behaupten sehen werden. Als Philosoph war Ramus der Vorgänger Bacons im Kampfe gegen die aristotelische Logik, und einen ähnlichen Bruch mit Autoritäten zeigte er in seinem Streben, der Mathematik eine andere und mehr arithmetische Grundlage als die euklidische zu geben. Zwar waren weder er noch seine

Zeit reif genug, um eine Grundlage aufzuführen, die irgend einen Vergleich mit der euklidischen hätte ertragen können, ja, sie waren nicht einmal im stande, dasjenige, was sie verwerfen wollten, ganz zu verstehen; aber solche Bestrebungen waren ein natürlicher Ausfluß desselben Selbständigkeitstriebes, der zugleich die großen Fortschritte jener Zeit trug und von ihnen aufrechterhalten wurde. Die neuen Gedanken, die Ramus in Bewegung setzte, besonders jedoch die philosophischen, fanden zu Paris sowohl heftige Gegner als eifrige Anhänger. Sein mathematischer Einfluß, der sich durch seine Schriften und eine größere Reise nach Deutschland auch hier verbreitete, wird z. B. in Thomas Finckes *Geometria rotundi* sichtbar, die eben auf seinen Voraussetzungen aufgebaut ist. Ramus, der Hugenotte war, wurde in der Bartholomäusnacht ermordet.

Eng mit vornehmen hugenottischen Familien verbunden, aber ohne selbst seinen Glauben zu wechseln, war François Viète (1540—1603), gewöhnlich Vieta genannt. Er ist zu Fontenay in Bas-Poitou geboren, wo er sich von 1559 an als Anwalt ernährte. Als solcher nahm er sich mit großer Tüchtigkeit der Sache einer adeligen Dame aus dem Hause Soubise an und hatte zugleich Gelegenheit, deren begabte Tochter Catherine de Parthenay in der Astronomie zu unterrichten. Bei diesem Unterricht entstand sein Plan zu einem großen astronomischen Werke *Harmonicum coeleste,* das im Gegensatz zu dem koppernikanischen System, das er nicht exakt genug fand, eine Verbesserung und weitere Entwickelung des ptolemäischen enthalten sollte. An diesem Werke, das nie erschienen ist, arbeitete er sein ganzes Leben hindurch. Vorläufig hatte er eine verbesserte Trigonometrie nötig, und an dieser arbeitete er zu Fontenay mit großem Fleiß und Eifer. Durch die Ehe seiner Schülerin kam er demnächst mit Heinrich von Navarra (dem späteren Heinrich IV.) und dessen Mutter in Verbindung.

Im Jahre 1571 ließ er sich als Rechtsanwalt in Paris nieder. Er suchte ohne Zweifel sowohl Verbindung mit den dortigen Mathematikern, z. B. Ramus, als Gelegenheit, seine trigonometrische Arbeit zum Druck zu befördern. Dieselbe oder vielmehr nur zwei der vier Teile, aus denen sie bestehen sollte, erschien indes erst 1579 unter dem Titel *Canon mathematicus.* Mittlerweile war er 1573 erst Parlamentsrat in der Bretagne, sodann privater Ratgeber bei Heinrich III. geworden, in dessen Dienst er 1580 *Maître des requêtes* (Berichterstatter über Bittschriften) wurde. 1584 verdrängten die Guisen ihn aus dieser Stellung; 1589 kehrte er aber zu Heinrich III. zurück, als dieser sich selbst als Flüchtling in Tours niederließ. Hier zeichnete er sich unter anderem durch seine Deutung einiger wichtigen kryptographischen Depeschen zwischen den Gegnern des Königs und den Spaniern aus. Nach dem Tode Heinrichs III. in dem nämlichen

Jahre trat er in die Dienste Heinrichs IV. über. In diesen feierte er 1594 zu Fontainebleau einen mathematischen Triumph, von dem wir später Bericht erstatten werden. Kurz vor seinem Tode erhielt er auf sein Gesuch wegen Schwäche seinen Abschied.

Wie wir sehen, war Vieta den größten Teil seines Lebens von seiner tüchtigen und hoch geschätzten juristischen Tätigkeit so stark in Anspruch genommen, daß es schwer zu verstehen sein mag, wie er die Ausarbeitung seiner großen mathematischen Werke hat bewältigen können, die die Frucht tiefgreifender mathematischer Untersuchungen sind und umfassende Studien nicht zum wenigsten in den Schriftstellern des Altertums verraten. Es wird indessen erzählt, daß er die Zeit zu nutzen verstand und drei ganze Tage, von Untersuchungen in Anspruch genommen, an seinem Arbeitstische verbringen konnte. Die vorhin berührte Zwischenzeit, 1584—89, ist gewiß besonders benutzt worden, um den Plan seines Hauptwerkes, der *Ars analytica*, zu vollführen und um verschiedene der einzelnen Teile auszuarbeiten. Diese Teile sind jedoch erst nach und nach als selbständige Arbeiten erschienen, und zwar in anderer Reihenfolge als der, die sie nach Vietas Plan haben sollten, ja, ein großer Teil ist erst nach dem Tode Vietas von seinen Schülern herausgegeben, besonders von dem schottischen Mathematiker Anderson (1582—1619), der zu Paris lebte und unterrichtete. Dieser hat an mehreren Stellen mit gleich großer Pietät wie Tüchtigkeit das von Vieta nicht Vollendete vervollständigt.

Gesammelt wurden diese Arbeiten, die für die Algebra und Trigonometrie der neueren Zeit von grundlegender Bedeutung sind und zugleich wichtige geometrische und zahlentheoretische Themata umfassen, erst 1646 von Franz van Schooten. In Übereinstimmung mit dem Titel: *Francisci Vietae Opera mathematica* sind auch andere Arbeiten als die von ihm im Plane der *Ars analytica* genannten mit aufgenommen, leider jedoch nicht der oben erwähnte *Canon mathematicus*. Schooten hatte nämlich eine bedauernde Äußerung Vietas darüber, daß dies Werk erschienen sei, und seinen Wunsch, es in neuer Ausgabe erscheinen zu lassen, dahin mißverstanden, als wären seine Tabellen unzuverlässig. Die Wünsche Vietas dagegen gingen nur auf Verbesserung der Darstellung und der Bezeichnungen aus.

Die übrigen Schriften, die Vieta selbst veröffentlichte, erhielten durch die Freigebigkeit, mit der er sie an die Mathematiker Europas versandte, große Verbreitung. Sie machten jedoch, wie schon erwähnt, nur einen Teil seines großen Werkes aus, und das Lesen seiner Arbeiten wird durch die etwas gesuchte Form erschwert, in der seine große Gelehrsamkeit überall auftritt, sowie durch die große Menge von griechischen Kunstausdrücken,

die er konstruiert, und die nie durchgedrungen sind. Deshalb war sein Einfluß nicht in demselben Grade schnell, wie für die gesamte Mathematik der folgenden Zeiten groß und bedeutungsvoll.

Da es in Frankreich selbst einige Zeit dauerte, bevor die Mathematiker auftraten, die würdige Nachfolger Vietas sind, werden wir zuvor einiger Mathematiker gedenken, die zu seiner und in der zunächst folgenden Zeit in den Nachbarländern diesseits und jenseits des Kanals lebten.

In den Niederlanden übten die Freiheitskriege gegen Spanien keineswegs, ebensowenig wie später die Beteiligung am dreißigjährigen Kriege, denselben zerstörenden Einfluß auf die Wissenschaft wie der letztere Krieg in Deutschland. Als sehr hervorragenden Gelehrten haben wir zuerst Simon Stevin (1548—1620) zu nennen. Er ist zu Brügge geboren und war erst Kaufmann, später aber besonders als Ingenieur tätig und bekleidete namentlich die Stellung eines Generalquatiermeisters am Wasserbau. Er stand in enger Beziehung zu Fürst Moritz von Nassau-Oranien, dem Nachfolger des Prinzen von Oranien als Verteidiger der nationalen Freiheit. Das Verhältnis zu diesem Fürsten macht sich sogar in seinen mathematischen Werken geltend, auf die er dem Fürsten einen gewissen Einfluß zuschreibt. Im Gegensatze zu Vieta bewährt er sich in seiner mathematischen Schriftstellertätigkeit als praktischer und volkstümlich veranlagter Mann. Ersteres zeigt sich nicht nur in der Wahl der Stoffe, wie in seinen Rechentabellen, einem populären Werke über Zehnteilung samt Arbeiten über praktische Geometrie und das Gleichgewicht fester und flüssiger Körper, sondern auch in seiner Behandlung der Arithmetik und Algebra. Die Volkstümlichkeit zeigt sich darin, daß er in seiner Muttersprache schreibt, und in seiner Verwendung holländischer Übersetzungen von mathematischen Kunstausdrücken, wie er überhaupt die Fähigkeit seiner Muttersprache für klare und verständliche Darstellung rühmt. Seine diesbezüglichen Gedanken haben sich in seinem Vaterlande erhalten, das gewiß z. B. noch das einzige Land ist, das für Mathematik einen eigenen Namen hat, nämlich Wiskunde.

Nach und nach wurden mehrere der Arbeiten Stevins ins Lateinische und Französische übertragen; die bedeutendsten sind nach seinem Tode von seinem Schüler Girard in einer französischen Ausgabe zusammengestellt, die 1635 nach dem frühen Tode des Herausgebers erschien. Albert Girard (1595—1633), der in Lothringen geboren ist, die meiste Zeit aber in Holland verbrachte, wo er als Protestant Zuflucht suchte, war selbst ein hervorragender Mathematiker. Sein Hauptwerk *Invention nouvelle en l'algèbre,* erschienen 1629, enthält wesentliche Fortschritte und zeichnet sich zugleich durch klare Darstellung aus. Er hat auch trigonometrische

Arbeiten herausgegeben und die Werke Stevins mit Anmerkungen versehen.

Von in den Niederlanden tätigen Mathematikern werden wir noch Ludolph von Ceulen (1539—1610) zu erwähnen haben; er war zu Hildesheim geboren, wurde aber Professor der Kriegsbaukunst zu Leyden; ferner Adriaen Romanus oder v. Roomen (1561—1615), Professor zu Löwen, später zu Würzburg und in Polen, und schließlich Willebrord Snellius (1581—1626). Dieser ist zu Leyden geboren und ward wie sein Vater Professor daselbst. Besonders bekannt ist er als der erste, der das Gesetz von der Strahlenbrechung ausgesprochen hat. Übrigens hat er sich mit Gradmessung und Regeln für die Seefahrt beschäftigt; sein mathematisches Hauptwerk ist eine Trigonometrie, *Doctrinae triangulorum canonicae,* nach seinem Tode 1627 erschienen.

In England, wo im Mittelalter Bradwardinus (1290—1349) geometrische Studien betrieben und z. B. die Winkelsumme von Sternvielecken untersucht hatte, war im Anfang der neueren Zeit die Mathematik durch den königlichen Leibarzt Robert Recorde (1510—1558) vertreten. Bedeutender waren die Leistungen von Thomas Harriot (1560—1621), der zu Oxford geboren und an der dortigen Universität ausgebildet ist. Nach der Zurückkunft von einer Reise nach Nordamerika, wo er bedeutende kartographische Arbeiten unternahm, lag er mit Glück der Astronomie, Physik und Mathematik ob. In letztgenanntem Fache hat er eine *Artis analyticae praxis* geschrieben, die aber erst 1631, also lange nach seinem Tode, herauskam. In diesem Werke wird die Theorie der Gleichungen im Anschluß an Vieta behandelt, dessen Verdienste er in seiner Vorrede völlig anerkennt, so daß er daran unschuldig ist, daß sein Landsmann Wallis ihn später als Nebenbuhler Vietas aufgestellt hat. Wirkliche Fortschritte hat man jedoch, wie wir sehen werden, auch ihm selbst zu verdanken, besonders hinsichtlich der Bezeichnungen, die sein Buch viel leserlicher machen als die Arbeiten Vietas, und die sich teilweise bewährt haben. Aus hinterlassenen Manuskripten erhellt übrigens, daß Harriot vieles kannte, was erst später von anderen wieder entdeckt worden ist.

Neue Wege wurden zu dieser Zeit von Neper, dem Erfinder der Logarithmen, und Briggs angebahnt und weiter ausgebaut. John Napier oder Neper (1550—1617) ist auf Merchistone in Schottland geboren. Bei dem Tode seines kaum 16 Jahre älteren Vaters 1608 ward er Baron von Merchistone; vor dieser Zeit hatte er selbst ein kleineres Landgut besessen. Er war früh auf Reisen auswärts und ist auf ihnen oder nach seiner Zurückkunft mit einem Teil der Arbeiten der bedeutendsten trigonometrischen

Schriftsteller von Regiomontanus bis auf Pitiscus, jedoch, wie es scheint, nicht mit denen Vietas, bekannt geworden. Seine Interessen gingen nach verschiedenen Richtungen. So hat er in seinen eifrigen Kämpfen gegen die Katholiken eine Auslegung der Offenbarung Johannis geschrieben, die ins Holländische und Deutsche übertragen ist. Auf seinem Gute trug er Sorge für den Ackerbau und ersann dazu mechanische Instrumente, wie er auch Kriegsmaschinen erfunden hat. In der Mathematik scheint er einem Briefe nach schon 1594 das Prinzip der Bildung und Anwendung der Logarithmen gekannt zu haben; erst 1614 aber erschienen seine Tafeln mit einer Erläuterung des Gebrauches derselben in der *Descriptio mirifici logarithmorum canonis.* Die früher verfaßte *Mirifici logarithmorum canonis constructio,* in der er die Berechnung der Tafeln erklärt, erschien erst 1619 nach seinem Tode mit Anmerkungen von Briggs. Diese Arbeiten enthalten auch wichtige trigonometrische Verbesserungen, und die Art und Weise, wie er die Logarithmen definiert, hat nicht nur ein ausgezeichnetes Rechenmittel geschaffen, sondern enthält auch den Keim der Fortschritte in der mathematischen Theorie, die später an die Logarithmen anknüpfen sollten.

Das Erscheinen der neuen Tabellen erregte sogleich großes Interesse für dieses Rechenmittel bei zweien seiner Landsleute, nämlich Wright, der die *Descriptio* ins Englische übersetzte, kurz darauf aber starb, und Briggs, der sein Werk weiterführte. Auch auf dem Festlande erregte die *Descriptio* bald Aufmerksamkeit, besonders bei Kepler, wie wir schon erwähnt haben.

Der soeben genannte Henry Briggs (1561—1630) ist in Yorkshire geboren, studierte zu Cambridge und war hier als Lehrer tätig; er war 1596—1619 Professor der Geometrie am Gresham College in London, von wo er durch Savile zu der von diesem gestifteten Savileschen Professur in Oxford als der erste nach dem Stifter selbst berufen wurde. Als Astronom bekämpfte er die Astrologie. Beim Erscheinen der *Descriptio* bekleidete er die erwähnte Stellung in London; er wurde von diesem Werk so entzückt, daß er sich möglichst bald nach Schottland begab, um den Verfasser kennen zu lernen, und später seinen Besuch erneuerte. Neper und Briggs hatten somit Gelegenheit, die neue und für praktische Zwecke bequemere Grundlage zu verabreden, auf der Briggs demnächst die Ausarbeitung neuer Logarithmentafeln großen Umfangs in Angriff nahm. Schon 1617 konnte er die ersten 1000 Logarithmen mit acht Decimalstellen veröffentlichen. 1624 erschien die *Arithmetica logarithmica* mit 14stelligen Logarithmen der ersten 20000 Zahlen und der Zahlen von 90000 bis 100000, eine Arbeit, die später von dem holländischen Buchhändler Adriaen Vlack vervollständigt wurde. Briggs hat ferner außer astronomischen und geographischen Arbeiten

kleinere Schriften über die Logarithmen und deren Gebrauch verfaßt, und die in seinem großen Werke angegebenen Rechnungsverfahren haben weitergreifende Bedeutung erhalten. — Als Mathematiker nennen wir hier noch den Landprediger William Oughtred (1574—1660).

Wir wenden uns jetzt wieder nach Frankreich, wo wir in der Zeit zwischen Vieta und den großen Mathematikern des 17. Jahrhunderts Bachet de Méziriac (1587—1638), geboren in Bourg-en-Bresse, antreffen. Er studierte zu Paris und Rom die Dichtkunst, hielt sich aber später in seinem Geburtsort auf. Er selbst war in französischer, italienischer und lateinischer Sprache kein schlechter Dichter und studierte zugleich griechische Sprache und Literatur. 1635 wurde er Mitglied der neu gegründeten *Académie française*. Möglicherweise sind es auch seine ästhetischen Interessen, die ihm Geschmack beigebracht haben für die überlieferten, teilweise uralten, zahlentheoretischen und algebraischen Aufgaben in anekdotenmäßiger, mehr oder weniger pikanter Einkleidung, die er in seinen *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* gesammelt hat (1612; 2. verb. und verm. Ausg. 1624). Gleichzeitig bewährt er sich indessen als tüchtiger Mathematiker, indem er das mathematisch Interessante an den Aufgaben hervorhebt und auf allgemeine Gesichtspunkte bezieht. Hierzu gehört die Behandlung unbestimmter Gleichungen 1. Grades. Seine vielseitige Bildung setzte ihn ferner in den Stand, 1621 Diophant griechisch und lateinisch mit beigefügten mathematischen Porismen und Anmerkungen herauszugeben. Bei seinem Tode hinterließ er einige nicht veröffentlichte arithmetische Elemente.

Bachet bahnte der Entdeckung tiefliegender und weitgreifender zahlentheoretischer Ergebnisse und der Lösung äußerst schwerer zahlentheoretischer Aufgaben den Weg. Auf diesem Gebiete ragte Fermat über alle anderen weit empor; aber dank dem gut bearbeiteten Boden konnte er nicht nur für die Bedeutung seiner Entdeckungen Verständnis finden, sondern auch bald in dieser, bald in jener Untersuchung selbständige und bedeutende Mitarbeiter. Unter diesen befanden sich nicht nur Leute wie Descartes, sondern auch solche, deren mathematische Leistungen ausschließlich in zahlentheoretischen Untersuchungen bestanden. Von diesen mag Sainte-Croix erwähnt werden, so benannt nach einem Kloster, dessen Prior er war; der bedeutendste von ihnen aber war Frénicle de Bessy (1602?—75), der am Münzamte angestellt war. Fermat bewundert die großen und allgemeinen Resultate, die dieser ohne Algebra zu erzielen vermochte, also nicht durch exakte, mathematische Behandlung, sondern indem er seinen wunderbaren Zahlensinn benutzte, um durch stetes Versuchen vor-

wärts zu kommen. Die von ihm später in den Schriften der französischen Akademie der Wissenschaften publizierten Schriften sind dagegen kaum von besonderem Interesse.

Pierre de Fermat (1601—1665), der Sohn eines Lederhändlers, ist in der Nähe von Montauban geboren. Er studierte die Rechtswissenschaft zu Toulouse und wurde, nachdem er einige Zeit Anwalt gewesen, Parlamentsrat daselbst. In dieser Stellung verfloß sein Leben ohne große äußere Ereignisse, die wir hier zu erwähnen hätten; in ihr fand er aber für die Untersuchungen Muße, die in fast allen Teilen der Mathematik neue Bahnen eröffneten und zu weitgreifenden Ergebnissen führten. Diese Untersuchungen nehmen öfters von der Mathematik des Altertums, mit der er sehr vertraut war, ihren Ausgangspunkt. Die Algebra gebraucht er gewöhnlich in der Gestalt und mit den Zeichen, die Vieta eingeführt hatte, und legte auf die zu seiner Zeit eingeführten formellen Erleichterungen keinen Wert; sein scharfer Blick setzte ihn in den Stand, ihrer entraten zu können. Das Ergebnis seiner Arbeit ist, was die Zahlentheorie betrifft, durch Briefe, besonders an Frénicle, und durch Anmerkungen in seinem Exemplare von Bachets Diophant bekannt geworden. Die Resultate seiner anderen mathematischen Untersuchungen schickte er öfters an die Mathematiker in Paris, teils in Briefen, teils in kleineren, handschriftlichen Aufsätzen, und auf diese Weise wurden sie nicht nur zu Paris bekannt, sondern auch bei denen im Auslande, die mit den Pariser Mathematikern in Verbindung standen. Durch diese wurde er seinerseits in den Stand gesetzt, das sich in der mathematischen Welt überhaupt Ereignende verfolgen zu können. Nur ganz einzelne seiner Schriften wurden sogleich publiziert, und zwar nur auf eifrige Antriebe anderer hin. Die übrigen Schriften und eine große Menge seiner wissenschaftlichen Briefe erschienen erst in seinen *Varia opera,* die sein Sohn 1679 herausgab. Eine Ausgabe von allem, was man von ihm hat aufbringen können, ist vor kurzem unter dem Titel *Oeuvres de Fermat* erschienen.

Die Titel seiner einzelnen Aufsätze werden wir angeben, wenn wir im folgenden ihren Inhalt zu erörtern haben, in den Abschnitten, in die jeder für sich hingehört. Wir werden sodann den durchgreifenden Einfluß wahrnehmen, den er außer auf die Zahlentheorie auch auf die Grundlegung teils der Integralrechnung durch seine Quadraturen, teils der Differentialrechnung und auf die Entwickelung der Geometrie und der Algebra gewonnen hat. Hier wollen wir ferner nur bemerken, daß der erwähnte Briefwechsel in der Regel zwar einen freundlichen Charakter hatte, in den Jahren 1637—38 aber in eine heftige Polemik mit Descartes ausartete. Fermat kritisierte erst scharf dessen Dioptrik, indem er ihm gleichzeitig seine Schrift

De maximis et minimis übersandte, in der er die von uns jetzt Differentiation genannte Operation sowohl auf die im Titel genannten Aufgaben als auf Tangentenbestimmung anwendet. Descartes antwortete mit gewaltiger Heftigkeit und beurteilte letztere Schrift sehr unbillig. Der Streit, an dem sich Roberval und der ältere Pascal auf Seiten Fermats beteiligten, wurde jedoch teils durch die Vermittelung des Pater Mersenne, dessen wir später gedenken werden, und durch den der Briefwechsel geführt wurde, teils durch das besonnene Auftreten Fermats geschlichtet. Sowohl hier als einem ungeschickten Auftreten Frénicles gegenüber, bevor dieser Fermat recht kannte (siehe Abschnitt II, 8), bewährt sich Fermat als ein Geist, dessen berechtigtes Gefühl seines eigenen Wertes von kleinlicher Eitelkeit ganz frei war.

Ein bewegteres Leben und ein heftigeres Temperament hatte sein Gegner in dem erwähnten Streite, derjenige seiner Zeitgenossen, der ihm als Mathematiker am nächsten kommt, und der einen ebenso großen Namen in der Philosophie wie in der Mathematik hat, nämlich René Descartes, lateinisch Cartesius (1596—1650). Er ist in der Touraine geboren und war aus adliger Familie. Seine Erziehung erhielt er im Jesuitenkollegium La Flèche, wo er sowohl Naturwissenschaft als scholastische Philosophie lernte, besonders aber für die Mathematik Interesse an den Tag legte. Nachdem er eine Zeitlang an dem lustigen Pariser Leben teilgenommen, zog er sich plötzlich zu einsamen Studien zurück. Darauf trat er, um das praktische Leben kennen zu lernen, in Kriegsdienste. Erst stand er als Freiwilliger und auf eigene Kosten in Diensten bei Moritz von Oranien und nahm sodann unter dem Kurfürsten von Bayern am 30jährigen Kriege teil. Die philosophischen Grübeleien folgten ihm jedoch, und, während er bei Neuburg im Winterquartier lag, gewannen seine Gedanken mittels eines plötzlichen Durchbruches, dessen Datum er selbst genau als den 10. November 1619 anzugeben vermochte, „die Grundlage einer wunderbaren Wissenschaft", wie er selbst sagt. Was er hier in seinem entzückten Geiste erblickte und sodann sorgfältig durchdachte, das war die analytische Methode in allgemein philosophischem Sinn, die darin besteht, jede Schwierigkeit in ihre einzelnen Teile zu zerlegen und sodann von dem Einfachsten und Leichtesten zu dem Zusammengesetzteren vorzuschreiten, was gewöhnlich dasselbe ist wie ein Übergang vom Allgemeinen zum Speziellen. Das augenscheinliche Vorbild dieser Methode war die Mathematik, die in den eigentlichen Untersuchungen so zu Werke geht, selbst wo ihre Darstellungsform in einer allmählichen synthetischen Bildung des Zusammengesetzteren besteht. Descartes erschuf doch auch in der Mathematik selbst die in besonderem Sinne analytische Geometrie. Sie gehört deshalb zu seiner allgemeinen analytischen Methode,

weil die Behandlung der räumlichen Größen zu einer speziellen Anwendung der allgemeinen Größenlehre gemacht wird. Dieser Gesichtspunkt war indes vielleicht nicht so sehr viel allgemeiner als derjenige der Alten, wie Descartes selbst glaubte, indem diesen die Geometrie eben eine Form der allgemeinen Größenlehre war. Sowohl durch seinen Mangel an Verständnis hierfür als durch die Art und Weise, wie er überhaupt seine Methode derjenigen der Alten gegenüberstellt, zeigt er den nämlichen Mangel an Erkenntnis desjenigen, was er anderen zu verdanken hat, den man ihm auch auf philosophischem Gebiete vorgeworfen hat. Dies ist ein nicht ungewöhnlicher Fehler großer Geister, die das von anderen Übernommene durch eine neue und selbständige Bearbeitung sogleich in ihr eigenes System mit aufnehmen.

Entzückt, wie er es war, von den Gedanken, die er sich von der Begründung seiner neuen und wunderbaren Wissenschaft gebildet hatte, gelobte er der heiligen Jungfrau eine Wallfahrt nach Loreto, damit sie dieser Wissenschaft Gedeihen spende. Er selbst widmete ihrer Ausarbeitung sein Leben. Nachdem er noch einige Zeit am Kriege teilgenommen hatte, kehrte er nach Frankreich zurück, wo er einige Güter geerbt hatte, und ging 1629 nach Holland, damit er daselbst seinem Wahlspruche *Bene vixit qui bene latuit* gemäß in größerer Ruhe seine Studien fortsetzen konnte. Ruhe und Frieden suchte er hauptsächlich wohl der Mißbilligung, ja, Verfolgung gegenüber, der seine freie Forschung von seiten der katholischen Geistlichen gewärtig sein mußte. Gegen ihre Mißbilligung, die ihn als aufrichtigen Katholiken und dankbaren Schüler der Jesuiten schmerzte, konnte jedoch auch die Entfernung ihn nicht sicher stellen, und um des Friedens willen gestand er deshalb mehr zu, als er hätte tun sollen, indem er nach der Verurteilung Galileis durch Hinweis auf die Relativität der Bewegung über seinen Anschluß an Galilei zu täuschen suchte und eine auf mechanischen Gesetzen beruhende Schrift über das Universum zu veröffentlichen unterließ. In Holland traf er übrigens andrerseits auf Widerstand, nämlich von seiten der protestantischen Theologen, die gleichfalls an der scholastischen Philosophie festhielten.

Während seines Aufenthaltes in Holland veröffentlichte Descartes seine Schriften, von denen als erste 1637 die *Essays philosophiques* zu Leyden erschienen. Sie enthalten vier Aufsätze, den *Discours de la méthode*, die *Dioptrique*, die *Météores* und als vierte die *Géométrie*. Der letztgenannte Aufsatz, der jetzt so leserlich ist, weil die dort eingeführte algebraische Behandlung in den noch jetzt gebrauchten Formen verläuft, erforderte damals, um Eingang zu finden, teils Einübung der Buchstabenrechnung, teils Kommentare. Erstere wurde in einer unter seinen Auspizien ausgearbeiteten, aber

ungedruckten Anleitung dargeboten, letztere sind von seinen Freunden, unter denen sich der holländische Mathematiker Franciscus van Schooten befand, zusammengestellt und nebst Arbeiten selbständigen Wertes von Verfassern, von denen wir später zu reden haben, der lateinischen Ausgabe der Geometrie van Schootens einverleibt.

Die übrigen sogleich herausgegebenen Werke Descartes' sind meist philosophische und berühren die Mathematik nicht; was diese Wissenschaft ihm außer dem in der Geometrie Enthaltenen zu verdanken hat, ist durch seinen Briefwechsel, der selbstredend in den späteren Ausgaben seiner sämtlichen Werke Aufnahme gefunden hat, in Umlauf gesetzt worden. Zu seinen Korrespondenten auf dem Gebiete der Philosophie gehörten zwei begabte Fürstinnen, Elisabeth von der Pfalz und die schwedische regierende Königin Christine. Auf ihre Aufforderung hin zog er nach Schweden, wo er im nächsten Jahre starb.

Wir finden hier keine Veranlassung, uns auf den Gottesbegriff Descartes' oder auf seine Auffassung des Verhältnisses zwischen Seele und Leib einzulassen. Dagegen müssen wir, da er wie Kepler und Galilei zu denjenigen gehört, die damit angefangen, die Mathematik auf das Studium der Natur anzuwenden, ganz kurz besprechen, wie er damit zu Werke ging. Die Induktion von den beobachteten Erscheinungen und Zahlen, also den Weg von der Wirkung zur Ursache, und die empirische Prüfung des allmählich aus den aufgestellten Hypothesen Deduzierten, fordert auch er; er räumt ihnen aber bei weitem nicht den Platz ein wie die genannten Gelehrten. Auf dem psychischen Gebiete kommt er über den Zweifel, mit dem man seiner Behauptung nach jede wissenschaftliche Forschung beginnen soll, schnell dadurch hinaus, daß er auf den Satz *„Je pense, donc je suis"* verweist; ganz ebenso gelangt er auch in seinem Naturstudium schnell von der induktiven Aufnahme der Erfahrungen zu der unmittelbaren Anschauung, zur Intuition, die späterhin den Ausgangspunkt seiner Deduktionen der physikalischen Sätze bildet. Die allererste, unmittelbar angeschaute Grundlage, auf der er die Erklärung aller Erscheinungen aufbauen will, besteht in der Ausdehnung, Teilbarkeit und Beweglichkeit des Stoffes. Diese Voraussetzungen einer mechanischen Naturauffassung sind so einfach und so ursprünglich, daß sie mit den Axiomen der Mathematik zu vergleichen sind. Seine Hauptaufgabe ist es, die Erscheinungen der Natur aus ihnen herzuleiten. Allerdings sind sie durch Erfahrung und Versuche zu prüfen, besonders damit man sehen kann, ob nicht andere Ursachen als die vorausgesetzten sich bei der Erzeugung der wirklichen Erscheinung geltend gemacht haben; diese Versuche aber in größerem Maßstabe zu veranstalten, gestatteten seine Verhältnisse ihm nicht. Dagegen war die Deduktion, durch

die man stets von einer Ursache mit, soweit möglich, mathematischer Klarheit und Sicherheit auf die Wirkungen schließt, seine Sache. Als Beispiel, wie er die Voraussetzungen, welche die Wörter Ausdehnung, Teilbarkeit und Beweglichkeit nur andeuten, benutzt und festhält, mag die Behauptung erwähnt werden, daß die bei der Erschaffung der Welt hervorgebrachte Summe von Bewegung bei der Erhaltung derselben bewahrt werde. Wenn wir den unklaren Begriff „Summe von Bewegung", der ja — und in dieser Verbindung mit Unrecht — zunächst auf die Bewegungsmenge hindeutet, mit dem modernen Begriffe „Energie" vertauschen, so haben wir eins der wichtigsten Grundprinzipien der heutigen Naturwissenschaft vor uns. Diesem kam jedoch, wie wir sehen werden, Leibniz auf eine richtigere Art und Weise nahe. Der Glaube Descartes' an die Möglichkeit einfacher mechanischer Erklärungen aller Naturerscheinungen, sogar der die lebendige Natur betreffenden, wurde durch Harveys Entdeckung des Blutkreislaufes bestätigt. Bei der Durchführung seiner eigenen mechanischen Erklärungen mußte er öfters die Mathematik verwenden. So werden wir sehen, daß einige seiner wichtigsten mathematischen Untersuchungen mit der Dioptrik in Verbindung stehen.

Der wichtigste Teil des mathematischen Briefwechsels Descartes' war der mit Paris stattfindende, welche Stadt damals ein mathematisches Zentrum von großer Bedeutung bildete. Hier fanden sich hervorragende Mathematiker, die zu wöchentlichen Sitzungen zusammenkamen, und dieser Kreis stand in Verbindung sowohl mit den noch größeren französischen Mathematikern außerhalb Paris, nämlich Fermat und Descartes, als mit auswärtigen Mathematikern, unter anderen Huygens. Dadurch gerieten auch alle diese, wie wir es schon bei Fermat und Descartes gesehen, in gegenseitigen Verkehr. Der bedeutendste Vermittler bei diesem ganzen Briefwechsel war lange der Pater Mersenne (1588—1648) aus dem Orden der Minoriten, der seit 1620 in Paris wohnhaft war. Er war im Kollegium La Flèche Descartes' Mitschüler gewesen und war ihm stets ein treuer Freund, der ihn auch vor dem ausschweifenden Jugendleben zu Paris gewarnt hatte. Descartes war auch der erste, der Mersenne zu seinem Geschäftsführer in Paris wählte. Dieser, der selbst als Vorkämpfer des Glaubens aufgetreten war und andererseits stets bereit war, seinen alten Freund zu verteidigen, mußte auch am besten dazu geeignet sein, Descartes vor Verketzerung von seiten der theologischen Fakultät zu Paris und seiner früheren Lehrer, der Jesuiten, zu beschützen. Dagegen hat Mersenne kaum besonders viel dazu beigetragen, die Streitigkeiten Descartes' mit den Pariser Mathematikern abzuwenden, mit denen, z. B. mit Roberval, Mersenne auf ebenso freundschaftlichem Fuße stand. Er vermittelte jedenfalls treu und redlich die beiderseits fallenden heftigen Äußerungen. Die *Cogitata physico-mathe-*

matica von Mersenne selbst sind keine Arbeiten erster Hand, erhalten aber dadurch Bedeutung, daß in ihnen verschiedene Entdeckungen seiner Freunde und Korrespondenten wie die Fermats zum ersten Male erschienen. Sie offenbaren auch das mathematische Interesse und Verständnis, das ihn zum Vermittler zwischen Mathematikern geeignet machte. Von denen außerhalb Paris hatte er viele auf Reisen kennen gelernt; in Paris war er an den erwähnten wöchentlichen Sitzungen ein steter Teilnehmer.

Nachfolger Mersennes als mathematischer Generalkorrespondent war Pierre de Carcavy († 1684). Er war früher zu Toulouse Fermats Kollege und durch gemeinschaftliche mathematische Interessen mit diesem eng verbunden gewesen. Er war zugleich ein eifriger Büchersammler, wurde einige Zeit nach seiner Ankunft in Paris, wo er sich Roberval und Pascal anschloß, Bibliothekar des Königs und erwarb sich als solcher bedeutende Verdienste. Im Jahre 1666 war er dem Minister Colbert bei der Gründung der *Académie des Sciences* behilflich, welche die aus Mersennes privatem Kreise, der sich mitunter auch Akademie genannt hatte, Übriggebliebenen unter ihren ersten mathematischen Mitgliedern zählte. Der erste Leiter der neugegründeten Akademie war Huygens, der deswegen nach Paris gekommen war. Die Arbeiten, von denen die ersten Protokolle Nachricht geben, sind hauptsächlich teils physikalische und physiologische Experimente, die man gemeinschaftlich unternahm, teils bedeutungsvolle astronomische Untersuchungen; die Akademie hat aber sicherlich auch unter den Mathematikern ein dauerndes Band gebildet. Erst mit Ende des Jahrhunderts begann die Herausgabe der Arbeiten der Mitglieder, die auch der Mathematik zu gute kamen.

Im Jahre vor der Gründung der Akademie hatte übrigens die Wissenschaft an der gleichfalls von Colbert unterstützten Zeitschrift *Journal des Savants* bereits ein Organ gewonnen, das Auszüge aus erschienenen Büchern, teilweise mit Kritik verbunden, enthielt. Gegen Ende des Jahrhunderts und bis ins nächste hinein, als der Mathematiker Pierre Varignon (1654—1722) daran beteiligt war, bekam diese Zeitschrift Bedeutung als ein besonders von den Gebrüdern Bernoulli benutztes Organ für die neue Infinitesimalrechnung.

Nachdem wir die wissenschaftlichen Organe in Frankreich bis Ende des Jahrhunderts verfolgt haben, wenden wir uns den französischen Mathematikern gegen und um die Mitte desselben, den Zeitgenossen Fermats und Descartes', wieder zu. Unter den zu damaliger Zeit in Paris lebenden und tätigen haben wir zuerst Claude Mydorge (1585—1647), den Freund des um 11 Jahre jüngeren Descartes, zu nennen. Er gehörte dem höheren Beamtenstande an und war Jurist, lebte aber in einer nur nominell amtlichen Stellung von seinem Vermögen. Dieselbe ermöglichte

es ihm, Descartes Beistand zu leisten, indem er zu seinen dioptrischen Versuchen Gläser schleifen ließ. Mydorges eigene Hauptarbeit ist ein 1631—39 erschienenes Werk über die Kegelschnitte. Eine von ihm selbst ausgearbeitete Fortsetzung dieses Werkes ist verloren gegangen. Dagegen liegt im Manuskript eine große Menge von Konstruktionsaufgaben vor, teils im Anschluß an Euklid solche, die mittels Lineals und Zirkels gelöst werden können, teils solche, die durch Näherungskonstruktionen gelöst werden müssen und es, was diejenigen betrifft, bei denen die Lösung mitgeteilt wird, auch sind.

Während Mydorge sich in seiner Behandlung der Kegelschnitte hauptsächlich den Alten anschloß, wurden von Girard Desargues (1593—1662) ganz neue Bahnen gebrochen. Er war zu Lyon geboren und war Architekt und Ingenieur. Von seiner Tätigkeit in diesen Beziehungen weiß man teils, daß der Plan des Rathauses seines Geburtsortes ihm zur Begutachtung zugesandt wurde, und daß er auf die endliche Gestalt desselben keinen geringen Einfluß hatte, teils daß er sich als Kriegsbaumeister an der Belagerung von La Rochelle beteiligte, wo Descartes ihm 1628 einen Besuch abstattete. Die Zeit von 1626—1650 verbrachte er übrigens zu Paris, wo er dem fein gebildeten Kreise angehörte, aus dem die *Académie française* 1635 ihre Mitglieder wählte, und sich zugleich öfters bei den schon erwähnten Sitzungen der Mathematiker und Physiker einfand. Von seiner allseitig wissenschaftlichen Bildung zeugt der Wert, den Descartes seinem Urteil auch in Betreff seiner eigenen philosophischen Arbeiten beimaß.

Die mathematische Tätigkeit Desargues' nahm indessen von seinem praktischen Lebensberuf ihren Ausgangspunkt. 1630 gab er eine Lehre von der Perspektive heraus, wozu er später Schriften über Steinschnitt und Sonnenuhren fügte; er gibt in denselben genaue, geometrische Begründungen der praktischen Operationen. Daß er in diesen Schriften und Methoden, die später vervollständigt in einer Arbeit seines Schülers, des Kupferstechers Bosse, an den Tag kamen, wirklich etwas Neues leistete, zeigt sich teils an dem treuen und feurigen Anschluß, den er bei fähigen Schülern fand, unter denen er außer Bosse einen Maler und einen Maurer nennt, teils an dem gewaltigen Widerstand seitens der vielen Praktiker, die ihn nicht verstanden und die gewohnten, weniger zweckmäßigen und oft geradezu unrichtigen Verfahren nicht aufgeben wollten. Diesen Widerstand zu bekämpfen, war um so schwerer, da er von Leuten herrührte, denen es an allen Bedingungen gebrach, um auch nur die von ihm gegen sie vorgebrachten Argumente zu verstehen. Bosse erhielt allerdings außer in der genannten Schrift Gelegenheit, durch Vorlesungen in der *Académie de la Peinture* seine Gedanken zu verbreiten. Dadurch wurde zwar seitens einzelner Künstler Anschluß gewonnen; der Widerstand war indessen

so stark, daß es zuletzt Bosse verboten wurde, sich der Methoden Desargues' zu bedienen, was ihn veranlaßte, um seine Entlassung zu bitten.

Nicht nur praktische Konstruktionsregeln und exakte geometrische Erklärungen und Beweise derselben hat man indessen Desargues zu verdanken, sondern er war auch der Entdecker der für die Entwickelung der Geometrie weitgreifenden Anwendung, die man von den praktischen Anschauungsweisen machen kann. Dies zeigt er in seinem mathematischen Hauptwerke: *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cone avec un plan* (1639). Von dem Schicksal dieser Arbeit und der in ihr niedergelegten reichen Gedanken werden wir in Verbindung mit unserer Erörterung ihres Inhaltes ausführlicher reden. Hier soll nur erwähnt werden, daß auch diese Schrift einerseits zwar bei den großen Mathematikern damaliger Zeit, bei Fermat, teilweise bei Desargues' Freund Descartes, der jedoch von seiner eigenen sehr verschiedenen Auffassung der Geometrie in Anspruch genommen war, und schließlich, wie wir bald sehen werden, bei dem ganz jungen Pascal, feurige und verständnisvolle Anerkennung gewann, daß sie aber andererseits in einem größeren Kreise nie Aufnahme fand. Man verstand den Grundgedanken nicht und wurde durch die vielen neuerfundenen technischen Ausdrücke abgestoßen. Die Schrift wurde so schnell vergessen, daß man sie im 19. Jahrhundert, nachdem dieselben Gedanken sich entwickelt und festen Fuß gefaßt hatten, nach einer aufbewahrten Abschrift hat abdrucken müssen.

Nach diesen Männern, die persönlich zu Descartes in freundschaftlichem Verhältnis standen, deren mathematische Arbeiten aber von ihm nicht beeinflußt sind, werde ich — obgleich ich dadurch Paris einen Augenblick verlasse — Florimond de Beaune (1601—1652) nennen; er war Offizier und später juristischer Beamter in Blois und der erste Franzose, der sich der Descartesschen Behandlung der Mathematik völlig anschloß. Seine eigenen mathematischen Arbeiten haben deshalb in der Ausgabe der Geometrie Descartes' von van Schooten, die durch die eine derselben kommentiert wird, ihren natürlichen Platz gefunden. Sein Name ist außerdem mit einigen Aufgaben verbunden, die er 1639 „den berühmten Mathematikern in Paris und Toulouse" stellte, und die Descartes zu einer neuen Art Untersuchungen veranlaßte, nämlich Untersuchungen über „inverse Tangentenaufgaben".

In dieser für die Mathematik in Frankreich so glänzenden Periode bekleidete Giles Personne (1602—72), der nach seinem Geburtsorte in dem nordwestlichen Frankreich den Namen Roberval annahm, unter dem er auch am meisten bekannt ist, von 1632 ab die von Ramus gestiftete Professur der Mathematik am *Collège de France*. Deswegen ist es natürlich, daß wir ihn als eine der Hauptpersonen bei den mathematischen Sitzungen und später als eins der ursprünglichen Mitglieder der *Académie*

des Sciences antreffen; eben in den Schriften der Akademie finden sich seine bedeutendsten Arbeiten (erst 1693 gesammelt und 1730 in den *Mémoires* der Akademie wieder abgedruckt); wie diejenigen Fermats fanden sie jedoch sogleich durch den Kreis, dem er angehörte, und bei den Korrespondenten desselben Verbreitung. Wie wir sehen werden, verdankt man ihm fruchtbare Gedanken und verschiedene bedeutende Ergebnisse besonders auf dem Gebiete der Infinitesimaluntersuchungen; mit seiner Tüchtigkeit verband er aber eine Eitelkeit, die ihn denjenigen gegenüber unbillig und anspruchsvoll machte, die ihm mit Entdeckungen zuvorkamen, zu denen er zwar selbst die Pläne mag besessen haben, ohne sie jedoch immer durchführen zu können. Diese Eitelkeit veranlaßte auch bisweilen Bloßstellungen, aus denen sein Gegner Descartes nicht ermangelte, in ihren Streitigkeiten Nutzen zu ziehen. Wenn Descartes öfters spöttisch Roberval als den offiziellen Repräsentanten der Mathematik darstellt, so deutet dies darauf, daß die tiefste Ursache seines Unwillens und Spottes gegen Roberval darin zu suchen ist, daß dieser beim Unterricht den neuen Ansichten Descartes' den Platz, der ihnen zukam, nicht einräumte, ja, einzelne Stellen der Geometrie sogar kritisierte. Roberval ist bei weitem nicht so rücksichtslos, und wir werden sehen, daß er in seiner und — Etienne Pascals — Verteidigung der Tangentenmethode Fermats das Recht auf seiner Seite hat, und daß er es in der Frage bezüglich der Oscillationszentren wenigstens weiter gebracht hat als sein Gegner. Unrecht hatten dagegen Roberval und der jüngere Pascal in ihrem heftigen Angriff gegen Torricelli, der, wie jetzt klargelegt ist, selbständig zu der nämlichen Tangentenmethode gekommen ist wie Roberval.

Der soeben erwähnte Etienne Pascal war Präsident des Kammergerichts in Clermont-Ferrand gewesen, hatte aber nach dem Tode seiner Frau 1631 diese Stellung aufgegeben und war nach Paris gezogen, wo er sich mit Interesse und Glück auf Mathematik und Physik warf, vor allem aber der Erziehung und dem Unterricht seiner drei Kinder große Fürsorge widmete. Eins von ihnen war ein Sohn, Blaise Pascal (1623—1662), der unter der Beaufsichtigung des Vaters zu einer außerordentlich frühen Entwickelung heranreifte. In der Mathematik hielt ihn der Vater jedoch anfangs zurück, da er voraussah, daß sie ihn von anderen Studien abhalten würde; erst als er sah, wie weit das aufgeweckte Kind es auf eigene Faust brachte, gab er ihm nicht nur völlige Freiheit, sondern führte den Knaben sogar mit in die Mathematikersitzungen, wo dieser mit großem Eifer, und wie es sich sogleich zeigen sollte, mit großem Erfolg zuhörte. Da nämlich das eben erwähnte Hauptwerk Desargues' erst 1639 erschien, muß es gewiß dieser Kreis gewesen sein, der Pascal die Gelegenheit geboten hat,

dermaßen in die den meisten der Zeitgenossen so verschlossenen Ansichten Desargues' einzudringen, daß er in demselben Jahre in einem Alter von 16 Jahren eine aus diesen Ansichten hervorgegangene, übrigens aber in ihrem Plane ganz originale Schrift über die Kegelschnitte auszuarbeiten vermochte, in der ihre Eigenschaften aus dem nunmehr sogenannten Pascalschen Sechseck hergeleitet werden. Diese Schrift fand bei Desargues und Descartes volle Anerkennung, von denen letzterer erst gar nicht glauben wollte, daß ein so junger Mann sie verfaßt habe. Leider ist nur ein Bruchstück, *Essai sur les coniques*, gedruckt (1640), während man den Plan des Übrigen aus einem Auszug kennt, den Leibniz von dem später verloren gegangenen Manuskript gegeben hat, das er von der Familie Pascals geliehen hatte. Pascal, der die Zeit von 1641—49 in Rouen verbrachte, wo der Vater angestellt worden war, erfand als 18jähriger eine Rechenmaschine. Er beschäftigte sich demnächst mit physikalischen Untersuchungen und erbrachte den Beweis für Torricellis Annahme, daß die früher dem „*horror vacui*" zugeschriebenen Erscheinungen vom Luftdrucke herrührten. Ein nach seiner Anleitung angestellter Versuch ergab nämlich, daß das Barometer auf dem Puy de Dôme niedriger stand als in der Tiefebene. Aus dieser Zeit stammt auch seine Schrift über das sogenannte arithmetische Dreieck und einige andere mathematische Schriften, die nach seinem Tode gedruckt, aber unherausgegeben vorgefunden wurden.

Zu den mathematischen Fragen, die, nachdem Pascal nach Paris zurückgekehrt war, seine Aufmerksamkeit auf sich lenkten, gehörten auch Wahrscheinlichkeitsaufgaben, zu denen er durch einige Anfragen veranlaßt wurde, die ein Bekannter, De Méré, der ein eifriger Spieler war, übrigens aber auf seine humane Bildung Einfluß gehabt hat, an ihn richtete. Über diese neue Art von mathematischen Untersuchungen korrespondierte er 1654 mit Fermat. Zu dieser Zeit geschah indessen ein plötzlicher Umschlag, seine sogenannte zweite Bekehrung, die auch seine Tätigkeit in andere Bahnen leitete. Man hat verschiedene äußere Veranlassungen dazu genannt und erraten; man weiß, daß eine plötzliche Lebensgefahr starken Eindruck auf ihn ausgeübt hat. Aus der Art und Weise, wie er in seinen *Pensées* skeptische Weltmenschen dazu zu bewegen sucht, im Glauben Frieden zu suchen, erhellt, daß er sich selbst von der Eitelkeit des weltlichen Lebens, in das er hineingeraten war, tief ergriffen fühlte. Als Gegensatz schlägt er jetzt in die strengste Askese über. Er befliß sich nicht nur der Enthaltung von Speise, Trank und Vergnügungen, ja, fügte zu den durch seine äußerst schwache Gesundheit verursachten Qualen noch Selbstquälereien hinzu, sondern enthielt sich lange Zeit hindurch sogar der Fortsetzung seiner mathematischen und physikalischen Untersuchungen,

und zwar, obgleich er, wie aus einem kurz vorher abgefaßten Programm hervorgeht, damals verschiedenartige und bedeutende Arbeiten fertig oder unter Vorbereitung hatte. Müßig war er deshalb jedoch nicht. Er ward nämlich in den sogenannten Provinzialbriefen *(Lettres à un provincial)* der bedeutendste Wortführer der sogenannten Jansenisten, denen er sich in ihrem Kampfe gegen die Jesuiten anschloß, und entfaltete hier das glänzendste Darstellungsvermögen. Dies setzte ihn in den Stand, die Selbstwidersprüche, die in den dogmatischen Angriffen der Jesuiten und Dominikaner auf die Jansenisten enthalten sind, auf eine Weise zu widerlegen, die das ganze gebildete Frankreich anziehen und von demselben verstanden werden konnte; sein Angriff auf die kasuistische Moral der Jesuiten war zerschmetternd, und die Briefe sind noch heute klassische Vorbilder der französischen Sprache, auf deren Entwickelung sie großen Einfluß gehabt haben. Er schrieb unter dem Pseudonym Louis de Montalte, gewiß im Andenken an die Barometermessung auf dem hohen Berg. Jedoch nicht in den Provinzialbriefen, sondern in den als Denksprüche und Vorarbeiten aufgeschriebenen und nach seinem Tode erschienenen *Pensées* tritt seine eigene, tiefe Religiosität am stärksten hervor.

Die mathematische Laufbahn Pascals war jedoch keineswegs beendigt. 1658 fand er einige Sätze über die Cykloide, oder, wie er und andere französische Mathematiker sie nannten, die Roulette. Seine Schwester hebt in ihrer Biographie hervor, daß die diesbezüglichen Gedanken in Nächten, in denen er durch Zahnweh wachgehalten wurde, ihren Anfang nahmen und sich ihm geradezu mit Gewalt aufdrängten, und scheint damit diese Rückkehr zur Mathematik entschuldigen zu wollen. Derart haben er und seine gläubigen Freunde jedoch wenigstens damals die Sache nicht betrachtet. Durch Beistand eben eines dieser Freunde vermochte er, öffentlich einen Preis auszusetzen für die Lösung gewisser Aufgaben innerhalb einer gewissen Frist, welche gerade auf den von ihm gefundenen Sätzen beruhten. Der Preis, sowie Pascals eigene Lösung war bei Carcavy deponiert, der gemeinschaftlich mit Roberval die Beurteilung ausüben sollte. Von Beantwortungen lief eine ziemlich bedeutungslose von dem Jesuiten Lalouvère und eine von Wallis ein. Letztere kann wohl kaum so vollständig gewesen sein, wie die später gedruckte dieses Verfassers; denn auch sie erhielt den Preis nicht. Die Preisfrage veranlaßte übrigens, daß andere hervorragende Mathematiker, Huygens, de Sluse und Wren, ohne die gestellte Frage selbst zu beantworten, Mitteilungen über andere von ihnen selbst gefundene Eigenschaften der Cykloide einsandten, von denen besonders die von Wren über ihre Rektifikation sogleich auf die französischen Mathematiker anregend einwirkte. Pascal veröffentlichte zu

dieser Zeit seine *Histoire de la roulette,* die teils die früher erwähnten Angriffe auf Torricelli zu Gunsten Robervals, teils Angriffe auf Lalouvère enthält. 1659 erschienen Pascals eigene Aufsätze, die nicht nur die Beweise der verlangten Sätze über die Cykloide, sondern auch die allgemeine Methode der Quadraturen oder Integrationen enthalten, von der diese nur Anwendungen sind. Bei der Herausgabe dieser Aufsätze benutzt Pascal, der seine Fragen anonym gestellt hatte, das Pseudonym Amos Dettonville, das aus den nämlichen Buchstaben wie Louis de Montalte der Provinzialbriefe besteht.

Unter den hinterlassenen Schriften Pascals werden wir noch ein Fragment nennen, das sowohl mit seiner religiös-philosophischen als mit seiner mathematischen Geistesrichtung Fühlung hat, nämlich: *De l'esprit géométrique.* Wie Descartes, aber in noch genauerem Anschluß an das geometrische System Euklids, will er auf dem von der Mathematik eingeschlagenen Wege eine zuverlässige Erkenntnis gewinnen. Dies soll durch Definitionen, Axiome und darauf begründete Beweise geschehen. Was er darüber ausspricht, ist dem, der mit der Geometrie bekannt ist, zwar nichts Neues; er zeigt aber, wie notwendig es ist, die Forderung einer solchen Strenge auch in der Behandlung anderer Fragen zu erheben, und eben seine eigene Beobachtung dieser logischen Forderungen macht seine Provinzialbriefe so überzeugend. Beispielsweise wollen wir die Forderung nennen, daß man jedesmal, wenn man der Kürze wegen ein definiertes Wort verwendet, in Gedanken die ganze Definition zu wiederholen hat, um nichts zu erschleichen, was nur dem Gebrauche des nämlichen Wortes in der gewöhnlichen Sprache oder bei anderen Leuten angehört, aber nicht in die Definition mit aufgenommen ist. Est ist eben ein Versehen gegen diese Regel, das er mit so großer Kraft in dem ersten Provinzialbriefe rügt, da Jesuiten und Dominikaner sich dahin geeinigt hatten, im Kampfe gegen die Jansenisten ein und dasselbe Stichwort zu verwenden, das sie jedoch ganz verschieden definierten, die Dominikaner auf eine solche Art und Weise, die sie in der Wirklichkeit mit den Jansenisten ganz einig machen würde. Obgleich Pascal auf die Mathematik, als seiner Regel folgend, verweist, muß doch zugegeben werden, daß sie sich nach seiner Zeit wohl gegen diese Regel mag versündigt haben, nicht zum wenigsten in der Infinitesimalrechnung, an deren Begründung er selbst teilhatte. Besonders hat der Gebrauch der Benennung „unendlich kleine Größen" ohne genaue Begrenzung dieses Begriffes unzuverlässige Beweise veranlaßt.

Mit dem ungefähr gleichzeitigen Tode Fermats, Desargues' und Pascals war die glänzendste Periode der französischen Mathematik im 17. Jahrhundert vorbei, und in der 1666 gegründeten Akademie spielte der

Fremdling Huygens eine größere Rolle als die eingeborenen französischen Mathematiker. Unter diesen mag jedoch noch aus dem Schluß des Jahrhunderts ein Geometer von Bedeutung erwähnt sein, nämlich Philippe de la Hire (1640—1718). Erst war er wie sein Vater Maler und eröffnete nach einem Aufenthalt in Rom zu Paris eine Malerschule, warf sich jedoch bald auf die Astronomie und Mathematik und war Mitglied der Akademie (1678) und Professor am Collège de France. Sein erster Beruf mag ihn zur Beschäftigung mit der Perspektive veranlaßt haben, die er wie Desargues auf die Kegelschnitte anwendete, ohne sich jedoch in demselben Grade wie dieser von den alten Methoden loszureißen. Dies tat er nicht einmal, nachdem er mit dem Hauptwerke des damals fast schon vergessenen Desargues bekannt geworden war. Vielleicht hat diese Behutsamkeit neuen Anschauungsweisen gegenüber dazu beigetragen, daß seine Werke über Kegelschnitte, die 1673 und 1679 erschienen, und schließlich das Hauptwerk *Sectiones conicae* 1685 in weiteren Kreisen haben Verständnis finden und dem Geschicke der Werke Desargues' haben entgehen können. — Algebraische Untersuchungen verdankt man Michel Rolle (1652—1719), der von 1685 an besoldetes Mitglied der Akademie war. 1690 hat er einen *Traité d'algèbre* herausgegeben.

Während de la Hire am besten als ein sehr hervorragender Epigone der vorigen Periode zu betrachten ist, gehören der früher (S. 34) erwähnte Varignon und der Marquis de l'Hospital (1661—1704), der, nachdem er Offizier gewesen war, der Wissenschaft lebte, ganz und gar der neuen, von Newton und Leibniz wachgerufenen Periode an. Letzterem schloß sich eben L'Hospital als Gelehrter an. Er machte früh Bekanntschaft mit der ersten öffentlichen Darstellung der Differentialrechnung von Leibniz (1684), stand seit 1692 mit ihm in brieflichem Verkehr und war in persönlicher Verbindung mit einem der ersten Männer der von ihm gebildeten Schule, Johann Bernoulli, während dieser sich in Paris aufhielt. Diese Bekanntschaft ist ihm bei der Aneignung der Leibnizschen Differentialrechnung sehr förderlich gewesen, von der er als erster eine Gesamtdarstellung, *Analyse des infiniment petits* (1696), herausgegeben hat. Er sagt selbst, daß er darin darstelle, was Leibniz und die Brüder Bernoulli ihm beigebracht. Johann Bernoulli dagegen hat weit später geltend machen wollen, die Darstellung im ganzen beruhe nicht nur auf mündlichen, sondern sogar auf schriftlichen Mitteilungen seinerseits, eine in mehreren Beziehungen wenig zuverlässige Behauptung, die nicht zu kontrollieren ist, und für die der Charakter Johann Bernoullis keineswegs hinlänglich bürgt.

Von Frankreich wenden wir uns wieder den nördlichen Nachbarländern, Holland und dem Grenzgebiete, zu, das den Hauptbestandteil des heutigen

Belgien ausmacht. Aus letzterem Lande treffen wir im Laufe des 17. Jahrhunderts drei katholische Geistliche an, die zur Förderung der beginnenden Infinitesimalrechnung wesentlich beigetragen haben. Der erste von ihnen, der Jesuit Jean Charles de la Faille, hat 1632 zu Antwerpen eine Schrift herausgegeben: *De centro gravitatis partium circuli et ellypsis.* Sie zeichnet sich sowohl durch sinnreiches Verfahren und antike Strenge als auch durch Vollständigkeit der Begründung aus, Eigenschaften, die später von Huygens gewürdigt wurden, dessen viele durchgreifende Untersuchungen ebendieselben Vorzüge besitzen.

Von weit größerem Umfang ist das *Opus geometricum* von 1647, das man einem anderen Jesuiten, Gregorius von St. Vincentius (1584 bis 1667), zu verdanken hat. Zu Brügge geboren, studierte er in Rom unter Clavius und ward Professor in Prag, innerhalb dessen Mauern er sich befand, als Descartes an der Belagerung teilnahm. Bei der Eroberung verlor er seine mathematischen Papiere. Demnächst kam er nach Wien, später wieder ins Vaterland zurück, wo er sich bis zu seinem Tod in Gent aufhielt. Hier gab er das genannte große Werk heraus, teilweise auf Grund einiger der erwähnten Papiere, die nach 10 Jahren wieder in seinen Besitz gekommen waren. Das Hauptziel der Arbeit ist die Quadratur des Kreises und der Kegelschnitte, von denen er erstere genau ausführen zu können glaubte. Trotz der von Descartes und Huygens nachgewiesenen Fehler enthält das Werk viele Methoden und Betrachtungen, die sowohl die große Erfindungsgabe des Verfassers kundgeben, als mit denjenigen nahe verwandt sind, die unter der Hand anderer Verfasser (Fermat, Pascal) große Bedeutung erlangt haben. Wenn man in einer Übereinstimmung mit Untersuchungen Cavalieris ein Plagiat bei Gregorius hat erblicken wollen, so hat man dazu sicher keine Ursache. Der betreffende Vergleich zwischen der Spirale des Archimedes und der Parabel liegt schon von der Arbeit Archimedes' selbst aus so nahe, daß derselbe Gedanke leicht bei verschiedenen entstehen konnte und auch in der Tat noch bei anderen als den beiden genannten Gelehrten entstanden ist.

Der dritte hier zu nennende Belgier ist René de Sluse (1622—1685), in der Nähe von Lüttich geboren. Er studierte in Rom, wo er verschiedene Verbindungen anknüpfte, lebte aber später still und von anderen Mathematikern abgeschieden als Kanonikus zu Lüttich. Er folgte indessen eifrig den großen mathematischen Fortschritten seiner Zeit teils an der Hand von Büchern, um deren Beschaffung er sich sehr bemühte, teils durch den Briefwechsel, den er nach und nach mit den hervorragendsten Mathematikern, wie Huygens und Pascal, später durch Vermittelung des Schriftführers der englischen *Royal Society*, Oldenburgs, mit englischen Gelehrten einging.

Diese Gesellschaft nahm ihn auch als Mitglied auf. Aus den Briefen de Sluses ersieht man, daß er die damals auftauchenden infinitesimalen Fragen auf selbständige Art und Weise zu behandeln wußte. Dagegen hat er nicht viel veröffentlicht. Seine wichtigste Arbeit *Mesolabum* ist 1659 und in erweiterter Gestalt 1668 erschienen. Sie behandelt die Bestimmung zweier geometrischer Mittel durch Kegelschnitte; de Sluse kommt hier aber auch auf infinitesimale Fragen zu reden. Seine Tangentenmethode, die er schon 1652 besaß und später verbesserte, ist in ganz kurzer Abfassung und auf die nachdrückliche Aufforderung Oldenburgs 1673 in den *Philosophical Transactions* gedruckt. Der bescheidene de Sluse, der sich ob der Anerkennung freute, die ihm seine berühmten Korrespondenten zollten, erfreute sich auch verdienten Ansehens als Sprachforscher, besonders als Kenner der orientalischen Sprachen, wodurch er mit der neu entdeckten arabischen Ausgabe der bisher verschollenen Bücher des Apollonius, bevor sie in Übersetzung erschienen, Bekanntschaft machen konnte; schließlich hat man von ihm gründliche geschichtliche Untersuchungen; er war zugleich rechtskundig und dem Fürstbischof ein geschätzter Ratgeber.

Schon die Gegenwart Descartes' in Holland mußte eine Verbindung zwischen der Entwickelung der Mathematik in Frankreich und in diesem Lande hervorrufen, das sich nach dem Freiheitskriege in allen Beziehungen so hoch erhoben hatte. Hier fand der große französische Philosoph und Mathematiker innigen Anschluß bei Franz van Schooten (1615—1660), der Professor der Mathematik zu Leyden war, welche Stellung auch sein Vater innegehabt hatte. Seine eigenen *Exercitationes mathematicae* haben meist Bedeutung durch die in ihnen enthaltenen Auszüge aus anderen Schriftstellern; die größten Verdienste hat er sich erworben durch die schon erwähnte Herausgabe der Schriften Vietas 1646 und der Geometrie Descartes' auf lateinisch, zuerst 1649 und später 1659 mit Kommentaren und Anhängen von ihm selbst und anderen. Die bedeutendsten dieser Anhänge rühren von zwei jüngeren holländischen Mathematikern her, den Freunden van Heuraet und Hudde, die wir ihn auch mit der Lösung schwieriger Infinitesimalaufgaben, die ihm von seinem berühmtesten Schüler Huygens zugesandt wurden, beschäftigen sehen. Von Heinrich van Heuraet ist jedoch nur der erwähnte kleine Anhang bekannt, die erste gedruckte Arbeit, die eine Rektifikation einer algebraischen Kurve enthält. Johannes Hudde (1628—1704) ist in Amsterdam geboren. Er studierte Rechtswissenschaft, widmete sich aber auch der Mathematik. Er verwertete diese Wissenschaft auch praktisch, indem er z. B. bei Schleusenbauarbeiten beschäftigt gewesen ist. Übrigens hatte er wesentlichen Anteil an der Verwaltung Amsterdams, wo er sogar 19mal Bürgermeister war. Seine Tätig-

keit als mathematischer Schriftsteller beschränkt sich auf die beiden Anhänge zur Geometrie Descartes': über *Reduktion von Gleichungen* und über *Maxima und Minima*, die wir genauer zu besprechen haben werden. Sie werden übrigens als Auszüge aus einem größeren Werke bezeichnet, das jedoch nie erschienen ist, vielleicht weil die Arbeiten Newtons und Leibniz' sie überflüssig machten. Er hat indessen Gelegenheit gehabt, mit den verschiedenen Mathematikern, die ihn nach und nach in Amsterdam besuchten, wie auch mit Leibniz darüber zu reden.

Einem auch auf anderen Gebieten berühmten Manne, nämlich Jan de Witt (1623—1672), begegnen wir gleichfalls unter den Verfassern der Anhänge der Geometrie Descartes', der er, der 1641—45 zu Leyden studiert hatte, die *Elementa curvarum linearum* einverleibt hatte. Einige Zeit darauf trat er als Leiter der republikanischen Partei an die Spitze der Verwaltung seines Vaterlandes und setzte nunmehr durch seine Klugheit, seine Tüchtigkeit und seine zu jener Zeit seltene Unbestechlichkeit dem Vordringen Ludwigs XIV. gegen Norden eine Grenze; später aber, als Ludwig XIV. die Existenz des Landes selbst aufs äußerste gefährdete, wurde er von seinen eigenen Landsleuten zerrissen. Die umfassende Tätigkeit hatte ihm jedoch die Muße gelassen, eine Schrift über den *Wert von Leibrenten* auszuarbeiten, die im Jahre vor seinem Tode erschien. Sie hat zwar einen praktischen Zweck, beruht aber auf mathematischen Untersuchungen, deren Gültigkeit er in einer Nachschrift durch Hudde bewahrheiten ließ.

Am höchsten unter den niederländischen Mathematikern steht jedoch Christian Huygens (1629—1695), dessen Name in der Geschichte der Physik, wie in der der Mathematik gleich berühmt ist. Er entstammte der adeligen Familie van Zulichem, und sein Großvater und Vater gehörten zu den treuesten Anhängern des Hauses Oranien. Der Vater, Constantin Huygens, war Diplomat, jedoch in den verschiedenen Wissenschaften, wie auch in der Mathematik wohlbewandert, zudem ein Freund der Kunst und im Besitze nicht geringer poetischer Anlagen. Descartes schätzte ihn als geistreichen Mann sehr hoch. Er gab seinen Söhnen, von denen Christian sein Liebling war, eine sehr sorgfältige und sehr frühe Ausbildung, teilweise persönlich, wenn seine vielen Reisen ihm die Zeit dazu übrig ließen. Die Übungen im Dichten lateinischer Verse interessierten bei diesem Unterricht Christian Huygens weniger als die Mechanik und die Konstruktionen und praktischen Arbeiten, die er selbst mit diesem Studium verband. 16 Jahre alt verließ er mit seinem Bruder Constantin, der ihm auch später bei vielen Arbeiten ein treuer Gehilfe war, das Daheim im Haag und begab sich nach Leyden an die Universität, 2 Jahre später nach Breda. Das juristische Studium war allerdings der Zweck, die Mathematik ward aber

Christian Huygens die Hauptsache; in Leyden hatte er an van Schooten einen Lehrer und Freund, der ihn sowohl mit Descartes, als mit Mersenne und durch letzteren mit allen großen Mathematikern damaliger Zeit in Verbindung brachte.

Nach einer kurzen Reise mit einer niederländischen Gesandtschaft nach Dänemark und einem Aufenthalt am dortigen Hofe, der damals in Flensburg gehalten wurde, machte er sich im Haag seßhaft, wo er sich eifrig mit wissenschaftlichen Untersuchungen beschäftigte. Was die Mathematik betrifft, nahm er mit gleich viel Interesse wie Glück die verschiedenartigen Fragen, welche die Mathematiker jener Zeit beschäftigten, in Angriff. Hiervon zeugen einzelne Schriften, wie die über die Quadratur der Kegelschnitte unter Benutzung von Schwerpunkten; die Schrift *De ratiociniis in ludo aleae,* die neben gleichzeitigen Arbeiten von Fermat und Pascal die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründete, und die van Schooten in seine *Exercitationes mathematicae* aufnahm; ferner *De circuli magnitudine inventa.* Sehr verschiedenartige Proben seiner Tätigkeit finden sich ferner in seiner umfassenden Korrespondenz mit van Schooten, den Pariser Mathematikern, de Sluse und anderen. Hierbei offenbart er oft großes Geschick in der Behandlung vorfallender infinitesimaler Aufgaben, ohne jedoch eine besondere Methode aufzustellen; eben diese größere Freiheit in der Behandlungsweise aber ist mit größerem Reichtum an Anschauungsweisen verbunden. Dieser hat später viele wichtige Ergebnisse zur Reife gebracht, die jetzt unter die Infinitesimalrechnung gehören, deren Begründung er aber durch elegante Benutzung solcher Hilfsmittel durchzuführen weiß, die sich schon in der antiken Geometrie finden. Die feine Kritik, die die Behandlung jeder einzelnen Frage erheischt, wenn man nicht im voraus allgemeine infinitesimale Methoden besitzt, denen man sie unterwerfen kann, hatte er schon in Leyden an den Tag gelegt, indem er nachwies, daß Galilei in der Annahme irre, daß ein schwerer und homogener Faden die Form einer Parabel annehme, und indem er demnächst selbst die Verteilung der Masse angab, durch die diese Form bedingt wird. Im Haag richtete er eine öffentliche Kritik gegen die Quadratur des Kreises von Gregorius von St. Vincentius, gab ihr aber eine solche Form, daß sie ein späteres freundschaftliches Verhältnis mit dem viel älteren belgischen Gelehrten nicht hinderte. Huygens selbst, dem wir so viele wichtige Resultate verdanken, hat geäußert, daß er auf die Resultate weniger Wert lege, als auf die Sicherheit der Schlußfolgerung und die Klarheit des Beweises.

Während Huygens' Kritik über Galilei und Gregorius und eine ähnliche über Cavalieri die Bewunderung seines Lehrers van Schooten erregte, wagte dieser eifrige Cartesianer nicht, sich auf eine Kritik der

Bewegungsprinzipien Descartes' einzulassen oder eine solche zu verbreiten. Eben die neuen Prinzipien aber, die Huygens statt der Descartesschen aufstellt, nämlich das Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes und eine beschränkte, aber korrekte Aufstellung des Prinzips der lebendigen Kraft, sind unter Anschluß an das Fallgesetz Galileis die Grundlage seiner mathematischen Untersuchungen des Stoßes elastischer Körper, der Zentrifugalkraft und der reduzierten Pendellängen. Die letzteren finden sich in seinem mathematischen Hauptwerke: *De horologio oscillatorio,* das von mathematisch Wichtigem zugleich die Untersuchung des Falles auf der Cykloide und die Lehre von den Evoluten enthält. Dies Werk erschien allerdings erst 1673; von seinem Inhalt war aber vieles schon im voraus auf verschiedene Art und Weise bekannt geworden.

Die mathematischen Untersuchungen bilden indessen nur eine Seite der hier genannten Arbeiten. Die Ergebnisse der Untersuchungen wurden durch Versuche geprüft, und die Veranlassung zu den mathematischen Untersuchungen in dem soeben erwähnten Werke war Huygens' Erfindung der Pendeluhr, über deren Bedeutung im täglichen Leben, in der Astronomie und als Mittel zur Messung der Schwere wir uns nicht zu äußern brauchen. Neben den mechanischen Studien unternahm er im Haag optische Untersuchungen, und durch seine verbesserten Fernrohre entdeckte er die Trabanten und den Ring des Saturn.

Vom Haag aus hatte er mehrmals teils Paris, teils England besucht, wo er 1663 Mitglied der neu gestifteten *Royal Society* wurde. In Paris ließ er sich 1666 auf die Dauer nieder, indem er der ehrenden Berufung zum ersten wissenschaftlichen Leiter der *Académie des Sciences* folgte. Als solchem gebührt ihm ein wesentlicher Teil der Ehre für die großen astronomischen Unternehmen, welche die eine Klasse der Akademie bewerkstelligte. Ebenso trug er dazu bei, daß die mehr zufälligen Versuche der naturgeschichtlichen Klasse doch immerhin etwas ergaben. So hatte er die Gelegenheit, an einer Leiche, die der Akademie zur Untersuchung übergeben war, die Accomodation des Auges, die jedoch erst viel später vollständig untersucht ist, wahrzunehmen. Im Laboratorium der Akademie konstruierte er eine Pulvermaschine nach einem ähnlichen Prinzip wie dem 200 Jahre später bei der Gasmaschine verwendeten. Sein Gehilfe bei dieser Arbeit war der junge Papin, später einer der Erfinder der Dampfmaschine.

Übrigens setzte Huygens zu Paris seine eigenen Arbeiten fort, gab hier, wie schon erwähnt, die Schrift über das *Horologium* heraus und schrieb hier seinen *Traité de la lumière* (erschienen 1691), in dem die Wellentheorie zum ersten Male dargestellt und den wichtigsten Lichtwirkungen zu Grunde gelegt wird. Wie diese Theorie zu der gleichzeitigen Emissionstheorie

Newtons einen Gegensatz bildet — und zwar einen glücklichen —, so nahm Huygens auch von der Anziehungslehre Newtons insofern Abstand, als er die Fernwirkung nicht als mechanische Erklärung anerkannte, wofür Newton sie eigentlich auch nicht ausgibt. Übrigens war das Verhältnis zwischen den beiden Gelehrten ein gutes; Newton bewunderte z. B. die fein ausgearbeiteten Beweise Huygens'. Mit Huygens enger verknüpft war Leibniz; aber Huygens, der schon so viele infinitesimale Untersuchungen ohne die Technik der Differentialrechnung ausgeführt hatte, konnte sie sich in seinem Alter nicht zu eigen machen.

Aus Gesundheitsrücksichten begab sich Huygens 1681 aus Paris in die Heimat; die Aufhebung des Edikts von Nantes hinderte ihn, wieder zurückzukehren.

Nach seinem Tode sind seine wichtigsten Arbeiten 1724 gesammelt und als *Opera varia* herausgegeben. Hierzu ist in den letzten Jahren eine Ausgabe sämtlicher erhaltenen Briefe von ihm und an ihn hinzugekommen, eine Ausgabe, die sowohl seinem Vaterlande, das die Kosten getragen, als ihm selbst zur Ehre gereicht, indem er, wie es gewiß mit vielen anderen großen Geistern der Fall sein würde, durch eine so genaue Kenntnis seiner ganzen Tätigkeit nicht verliert, sondern gewinnt.

Der außerordentliche Aufschwung, den die Mathematik in der Mitte des 17. Jahrhunderts auf dem westeuropäischen Festlande genommen, erhielt im letzten Teile des Jahrhunderts jenseits des Kanals seine Fortsetzung, indem hier sowohl neue Bahnen gebrochen, als neue und große Resultate gewonnen wurden. Derjenige, der in dieser Beziehung voranging und auf seine Nachfolger einen nicht geringen Einfluß gewann, war John Wallis (1616—1703), der Sohn eines Pfarrers aus Kent. Er wurde in den alten Sprachen gut unterrichtet, machte aber nur gelegentlich Bekanntschaft mit der Arithmetik und der Rechenkunst, denen er demnächst in seinen Mußestunden zu seinem Vergnügen oblag. Hierzu war er im Besitze eines phänomenalen Zahlengedächtnisses, so daß er späterhin einmal in einer schlaflosen Nacht aus dem Kopfe 27 Ziffern der Quadratwurzel einer 53ziffrigen Zahl ausrechnete und sie am Morgen darauf diktierte. Als Autodidakt las er solche mathematische Bücher, deren er zufällig habhaft wurde, meistens solche, die einen praktischen Zweck hatten. Er lernte jedoch auch die infinitesimalen Untersuchungen Torricellis und Cavalieris und die Geometrie Descartes' kennen und war späterhin mit den antiken Mathematikern vertraut. Wenn man sein etwas später wachgerufenes Interesse für die Kryptographie und seine Tüchtigkeit in derselben und ihrer Dechiffrierung hinzunimmt, so hat man einige Beiträge zum Verständnis seiner Eigen-

tümlichkeiten als Mathematiker. Seine größte Bedeutung hat er nämlich durch seine Fähigkeit in numerischer Induktion — Interpolation, wie er sie nannte — und durch seinen Sinn für Analogie und Kontinuität errungen. Hierdurch brachte er es zu bedeutungsvollen allgemeinen Resultaten, von denen freilich einige gleichzeitig von anderen Mathematikern streng bewiesen wurden, während die volle Richtigkeit anderer erst später dargetan ist.

Indem wir uns nun wieder seinem Lebenslaufe zuwenden, haben wir zu bemerken, daß er, nachdem er in Cambridge studiert hatte, erst an verschiedenen Orten das Amt eines Kaplans bekleidete. Darauf wurde er als „Fellow" in Cambridge angestellt, gab diese Stellung aber sogleich wieder auf, um heiraten zu können, und lebte jetzt einige Zeit von seinen eigenen Mitteln in London. Hier setzte er, sich einem Kreis von Männern anschließend, die wir bald zu besprechen haben, seine Studien fort, beschäftigte sich aber außerdem mit der Politik. Schon als Kaplan hatte er einmal der Parlamentspartei durch die Dechiffrierung einer Depesche einen Dienst geleistet, und von dieser Partei war er in London ein moderater Anhänger; er war z. B. gegen die Hinrichtung des Königs. Oliver Cromwell respektierte ihn indessen und machte ihn 1649 zum Savilian Professor der Geometrie in Oxford, welche Stellung Briggs früher bekleidet hatte. Diese Stellung behauptete er nach der Restauration und verband mit ihr eine geistliche Stellung als königlicher Hofkaplan, indem die königliche Partei die Mäßigung anerkennen mußte, mit der er seine Kenntnis solcher aufgefangener Briefe, die Personen hätten schädlich sein können, benutzt hatte. Auch später unter der Herrschaft der Oranier bewahrte er sein Ansehen; er fuhr fort, bei kryptographischen Arbeiten Beistand zu leisten, und auf seinen Rat hin verzichtete man aus Furcht vor römischem Einfluß darauf, den Gregorianischen Kalender einzuführen.

Sein Hauptwerk, *Arithmetica infinitorum,* erschien 1655. Demselben schloß sich eine analytisch-geometrische Untersuchung der Kegelschnitte an. Sein *Commercium epistolicum* 1658 enthält besonders die Behandlung zahlentheoretischer Aufgaben von Fermat. In der Schrift *De cycloide* 1659 löst er die Aufgaben Pascals über diese Kurve. 1685 erschien sein *Treatise of Algebra.* Eine Gesamtausgabe seiner Werke erschien 1693—99.

Der soeben erwähnte Kreis, von dem Wallis eins der bedeutendsten Mitglieder wurde, sammelte sich seit ungefähr Mitte des Jahrhunderts teils in London, teils in Oxford, besonders um gemeinschaftlich physikalische Versuche zu planen und auszuführen; hiermit verband sich jedoch selbstredend wie in Paris eine umfassendere, gegenseitige wissenschaftliche Beeinflussung. Dieses gemeinschaftliche Arbeiten, das sich durch Briefwechsel auch auf auswärtige Gelehrte erstreckte, erwies sich als so fruchtbar, daß man es nach

der Restauration am geratensten fand, demselben mittels königlicher Bestätigung als *Royal Society*, die bald darauf die Herausgabe ihrer *Philosophical Transactions* in Angriff nahm, ein bleibendes Dasein zu sichern.

Unter denen, die diese Gesellschaft vorbereiteten und begründeten und ihr sogleich eine große Bedeutung verliehen, nahm gewiß der Chemiker und Physiker Robert Boyle den ersten Platz ein. Ein anderer ihrer Physiker war Robert Hooke (1635—1703), der Sohn eines Pfarrers aus Wight, der früh sowohl große mechanische Geschicklichkeit als große mathematische Fähigkeiten offenbarte. Der Gesellschaft erwies er sich als unermüdlicher Experimentator und ideenreicher Forscher, der öfters im voraus ahnte, was andere erst später streng begründeten. Dies in Verbindung mit einem reizbaren Gemüt brachte ihn oft in heftige Streitigkeiten über die Urheberschaft, z. B. mit Newton. Der bedeutendste Mathematiker dieses Kreises war Wallis; er enthielt aber außer ihm noch mehrere, denen man wichtige mathematische Fortschritte zu verdanken hat.

Unter diesen werden wir Christoph Wren (1632—1723) nennen, bei dem der Kreis in London zusammenkam, während er am *Gresham College* Professor der Astronomie war. Später (1660—73) war er Savilian Professor der Astronomie zu Oxford. Er ward ein besonders nützliches Mitglied der Gesellschaft durch seine Fähigkeit, praktisch zweckmäßige Beobachtungen teilweise mittels selbstregistrierender Instrumente zu bewerkstelligen und praktische Versuche auszuführen. Er unternahm unter anderem Versuche über den Stoß elastischer Körper (Phil. Trans. 1669), dessen Gesetze Huygens jedoch schon früher entdeckt hatte. Bei den naturgeschichtlichen Untersuchungen endlich war seine Tüchtigkeit im Zeichnen von großem Nutzen. Auch als Astronom bediente er sich graphischer Konstruktionen, und die Cykloide, deren Bogenlänge er als der erste gefunden, hat er zur Lösung des sogenannten Problems Keplers angewendet. Kurz nach der Stiftung der *Royal Society,* deren Vorsitzender er 1680—82 war, stellte er in einer Rede ein umfassendes Programm ihrer Wirksamkeit auf. Übrigens hatte er schon damals die Bahn betreten, auf der er sich am meisten hervorgetan hat, nämlich als Architekt. Er hat die große Kuppel der Paulskirche gebaut.

Der erste Vorsitzende der *Royal Society* war der Viscount William Brouncker (1620—1684), der in Oxford Mathematik studiert hatte, übrigens aber nach der Restauration bei Karl II. in verschiedene hohe Stellungen eintrat. Auskünfte über seine zahlentheoretischen Untersuchungen und seinen Gebrauch der unendlichen Kettenbrüche finden sich bei Wallis, seine Arbeit über die Quadratur der Hyperbel in den *Philosophical Transactions.*

Ferner werden wir William Neil (oder Neile, 1637—1670) zu erwähnen haben, der, wie von Wallis mitgeteilt wird, in Oxford, wo er studierte, 1657 die erste Kurvenlänge gefunden hatte, nämlich die der semikubischen Parabel, bevor van Heuraet und Fermat von ihm unabhängig dasselbe Resultat fanden. Er ward 1663 ein eifriges Mitglied der *Royal Society*, ein früher Tod aber zerstörte die auf ihn gesetzten Hoffnungen. Unter den zu derselben Gesellschaft gehörigen Mathematikern haben wir auch den Holsteiner Nikolaus Mercator (Kaufmann) zu nennen, der in Kopenhagen und Rostock studiert hatte; zu London nämlich und als Mitglied der Gesellschaft schrieb er das bedeutendste seiner mathematischen Werke *Logarithmotechnia* (1667). Später reiste er nach Frankreich, wo er sich an den Wasserleitungsarbeiten in Versailles beteiligte und 1687 starb.

Endlich haben wir neben diesen Mathematikern aus London und Oxford schon hier den etwas jüngeren Edmund Halley (1656—1742) zu nennen, obgleich er meist Astronom war und seine Tätigkeit teilweise hinter den hier behandelten Zeitraum fällt. Er war der Sohn eines reichen Seifensieders in London und kam 1673 als Student nach Oxford, wohin er die Instrumente mitbrachte, die er schon als Knabe zu astronomischen Beobachtungen gebraucht hatte. Von seinem Vater unterstützt, beobachtete er später auf St. Helena den südlichen Fixsternhimmel und unterbreitete nach seiner Zurückkunft 1678 der *Royal Society*, von der er in demselben Jahre Mitglied wurde, den aus den Beobachtungen hervorgegangenen Sternkatalog. Von seinem Anteil daran, daß Newton seine physikalischen Erklärungen der Planetenbewegung und schließlich die vollständigen *Principia* veröffentlichte, werden wir später reden. Hier soll nur erwähnt sein, daß er, als er für dies große Werk die Kosten trug, kein reicher Mann mehr war, da sein Vater damals eben arm gestorben war. Später konnte er jedoch Newton mitteilen, daß der Verkauf die Kosten gedeckt habe. Materialistischer Ansichten verdächtig, wurde er 1691 nicht Savilian Professor der Astronomie in Oxford, wurde aber doch 1703 der Nachfolger Wallis' als Savilian Professor der Geometrie. Seine großen Verdienste als Astronom und seine Untersuchungen über Meteorologie und Erdmagnetismus werden wir hier nicht besprechen, dagegen seine Übersetzung der Schrift des Apollonius vom „Verhältnisschnitt" aus dem Arabischen und seine Herausgabe der Kegelschnitte des Apollonius, darunter der aus dem Arabischen übersetzten Bücher 5—7 anführen. Diese Ausgaben und seine Mutmaßungen über das 8. Buch letzteren Werkes offenbaren ein Eindringen in den Gedankengang der griechischen Mathematiker, wie es Gelehrte wie Fermat, Huygens und Newton, später Robert Simson noch besaßen, das aber

seitdem viel seltener geworden ist, da man im Vertrauen auf die großartigen formalen Hilfsmittel der Gegenwart, deren Erschaffung damals begonnen wurde, das Verständnis dafür eingebüßt hat, was die älteren Formen enthalten können. Halleys Sterblichkeitslisten, die wir zu besprechen haben werden, finden sich in den Philosophical Transactions XVII.

Zwei Mitglieder des Kreises, mit dem wir uns hier beschäftigt haben, können mit demselben Recht genannt werden wie früher Mersenne und Carcavy in Paris, nämlich Oldenburg und Collins. Heinrich Oldenburg (1615?—1677) ist in Bremen geboren, hielt sich aber 1640—48 in London auf. Zum zweiten Male kam er dorthin in einer diplomatischen Gesandtschaft an Cromwell; später hielt er sich in Oxford auf, wo er mit Boyle und Wallis eng verbunden war und sich an den gemeinschaftlichen naturwissenschaftlichen Untersuchungen beteiligte. Bei der Stiftung der *Royal Society* wurde er einer ihrer ersten Schriftführer. Als solcher hatte er eine umfassende Arbeit zu bestreiten, indem ihm die Führung der Journale über die Arbeiten der Gesellschaft, die Herausgabe der *Transactions* und besonders ein ausgedehnter Briefwechsel mit den vielen auswärtigen und fremden Gelehrten oblagen, die mit der Gesellschaft in Verbindung standen. Er wurde auch das Bindeglied dieser unter sich. So war der wichtige Briefwechsel, der 1676 zwischen Newton und Leibniz geführt wurde, an Oldenburg als den Schriftführer der Gesellschaft gerichtet und erhielt dadurch einen weit öffentlicheren Charakter, als ein nur persönlicher Gedankenaustausch zwischen den beiden großen Männern unter sich gehabt haben würde.

Eine weniger offizielle Stellung nahm John Collins (1625—1683) ein, der den Buchhandel erlernt hatte, während der Bürgerkriege aber zur See gefahren war. Nach der Restauration erhielt er verschiedene kleine Stellungen und eine kleine Pension; seine Einkünfte suchte er zu erhöhen, indem er schwierige Rechenarbeiten übernahm. Nicht seine eigenen Arbeiten über die Mathematik und ihre Anwendungen geben ihm das Recht, hier genannt zu werden, sondern das innige Interesse, mit dem er die mathematischen Fortschritte seiner Zeit verfolgte und den Gelehrten mit Rat und Tat beistand. Teils war er ihnen bei der Herausgabe ihrer Bücher behilflich, teils führte er einen außerordentlich ausgedehnten Briefwechsel, durch den er sie stets von den verschiedenen Fortschritten unterrichtet hielt.

Unter denen, die im Auslande durch die hier erwähnten Männer mit den Mathematikern in London und der *Royal Society* in Verbindung standen, haben wir de Sluse und Huygens genannt. Innerhalb Großbritaniens können wir in dieser Beziehung mit dem Schottländer James Gregory (1638—1675) beginnen, dem Sohne eines Pfarrers aus der Nähe von Aberdeen; mütter-

licherseits war er mit Vietas Schüler Anderson verwandt. In der *Optica promota,* die 1663 in London erschien, entwirft er den ersten Plan eines Spiegelteleskops. 1664—1667 hielt er sich in Padua auf, wo er 1667 *Vera circuli et hyperbolae quadratura* herausgab, ein Werk, das von Huygens einer nicht gerechten Kritik unterworfen wurde; später kam *Geometriae pars universalis* hinzu. 1668 wurde er Mitglied der *Royal Society* und Professor an der Universität St. Andrews, 1674 Professor an der Universität Edinburg. 1668 gab er *Exercitationes geometricae* und 1672 *Tentamina quaedam geometrica de motu penduli et projectarum* heraus. Wir werden sehen, daß er sich in den hier genannten Arbeiten hervorragend an den beginnenden infinitesimalen Untersuchungen beteiligte, und wie Newton, mit dem er durch Collins in Verbindung stand, namentlich den umfassenden Gebrauch von unendlichen Reihen einführte. Ein früher Tod hinderte ihn, Newton ferner auf seiner glänzenden Bahn zu folgen.

Bekanntlich führte Newton seine unvergleichlichen Arbeiten in Cambridge aus; vor ihm haben wir aber seines Vorgängers im Lucasischen Lehramt an der Universität dieser Stadt, seines Lehrers und Freundes Isaac Barrows (1630—1677), zu gedenken. Dieser vielfach hervorragende Mann, der zum Aufschwung der Mathematik gewichtige Beiträge geleistet hat, war der Sohn eines Leinwandhändlers in Diensten Karls I. Die Treue gegen seinen König brachte den Vater ins Verderben, und ebenso bereitete die Treue gegen die Stuarts und die episkopale Kirche dem Sohne in der Zeit vor der Restauration Schwierigkeiten. Durch fremde Hilfe ward er jedoch in den Stand gesetzt, die in Cambridge unter günstigeren Verhältnissen begonnenen Studien fortzusetzen; durch seinen politischen Standpunkt aber verschuldete er es wohl, daß er hier die Professur im Griechischen nicht erlangte, auf die er trotz seiner Jugend Aussicht hatte. Außer den alten Sprachen studierte er Mathematik, für die Wallis Professor war. Sogar die Mathematik betrachtete er als ein Nebenfach der Theologie; denn „um ein guter Theologe zu sein, muß man Chronologie verstehen, welche Kenntnis der Astronomie verlangt, die hinwiederum die der Geometrie erfordert." Die heimatlichen Verhältnisse trieben ihn in die Ferne, auf eine Reise (1655—59), auf der er außer nach Frankreich, Italien und Deutschland auch in die Morgenlande gelangte und verschiedene Abenteuer erlebte. Vielleicht hat er sich auf dieser Reise die für seine eigenen Arbeiten so bedeutende Kenntnis der Werke Galileis und Torricellis erworben, die übrigens auch vom Einfluß Wallis' herrühren mag.

Gleich nach seiner Zurückkunft empfing er die priesterliche Weihe, erhielt sodann, nachdem sich erst die politischen Verhältnisse geändert hatten, die früher erwähnte Professur des Griechischen in Oxford, sodann

die Professur der Geometrie am *Gresham College* in London und schließlich 1663 die Lucasische Professur der Mathematik in Cambridge. Während dieser Lehrtätigkeit hat er sein bedeutendstes mathematisches Werk ausgearbeitet, die *Lectiones mathematicae,* eine Fortsetzung der *Lectiones opticae;* unter dem Beistande Collins' erschien 1669—1670 die erste, 1674 die zweite Ausgabe. Wie er selbst mehrmals erwähnt, hat er hierbei von dem jungen Newton, der zwei Jahre vor der Anstellung Barrows in Cambridge an dieser Universität immatrikuliert worden war, verschiedene Impulse und Ratschläge empfangen. Die Angaben des äußerst gewissenhaften Barrow und unsere Kenntnis der Formen, welche das Verfahren Newtons selbst schon 1665—1666 angenommen, gestatten jedoch ein Ausscheiden der Stellen, wo sich diese Mitwirkung besonders mag geltend gemacht haben; es bleibt dann als für das ganze Buch von durchgreifender Bedeutung und allein Barrow angehörig doch noch so Bedeutendes übrig wie die klare Aufstellung des gegensätzlichen Verhältnisses zwischen den Aufgaben, die man jetzt durch Differentiation und Integration löst, und seine Verwertung zur Lösung der sogenannten inversen Tangentenaufgaben, d. h. derartiger Aufgaben, die man jetzt durch Differentialgleichungen ausdrückt. Barrow verwendet zwar nur das angeführte gegensätzliche Verhältnis, um einfache Aufgaben dieser Art auf die Quadratur zurückzuführen; unter der Hand Newtons und Leibniz' sollte es aber bald die Grundlage einer ganz neuen infinitesimalen Analyse bilden.

Wie wenig oder wie viel Barrow auch der Mitwirkung Newtons in dem genannten Buche zu verdanken hat, so war ihm doch, als es erschien, die Überlegenheit Newtons als Mathematiker völlig klar geworden; er beschloß daher, obgleich er selbst nur 39 Jahre alt war, ihm das Lehramt in Cambridge zu überlassen. Diesen ungewöhnlichen Schritt begründete er zugleich damit, daß ihm die Mathematik für diejenigen Studien die Zeit raube, zu denen er durch sein priesterliches Gelübde verpflichtet sei. Jedenfalls offenbarte er dadurch eine große Uneigennützigkeit; denn in der ersten Zeit nach seinem Abschied mußte er mit kleinen Einkünften vorlieb nehmen. Später wurden durch Carl II., bei dem er Hofprediger war, seine Verhältnisse gebessert. Er hat sich als Prädikant einen Ruf erworben, der in seinem Vaterlande seinem Ansehen als Mathematiker nichts nachgibt. Er fuhr gleichwohl mit mathematischen Arbeiten fort und gab, besonders von seinem Freunde Collins angeregt, mehrere der griechischen Mathematiker heraus.

Isaac Newton (1642—1727), dem wir uns nun zuwenden, war der Sohn eines Pächters aus Lincolnshire, der vor der Geburt des Sohnes gestorben war. Er bekam zuerst einen etwas weitergehenden Schulunter-

richt; da aber der Stiefvater inzwischen starb, wurde er früh nach Hause geholt, um den Betrieb des Landgutes zu übernehmen. Dies war jedoch nicht seine Sache; er interessierte sich mehr für das Studieren oder das Herstellen von Sonnenuhren, mechanischen Kunststücken u. dgl. Er setzte also seine Studien fort, die vorläufig besonders die alten Sprachen umfaßten, und kam 1661 nach Cambridge. Hier warf er sich mit großem Eifer auf die Mathematik. Euklid schätzte er allerdings anfänglich gering, indem er es ungereimt fand, dergleichen selbstverständliche Dinge zu beweisen; später aber bewunderte er nicht nur, sondern benutzte sogar selbst die strengen Formen der Alten. Dagegen war die Geometrie Descartes', der er zuerst den Namen „analytische Geometrie" gegeben hat, sogleich seinem Geschmacke genehm. Er studierte ferner die *Arithmetica infinitorum* von Wallis und hörte seit 1663 die Vorlesungen Barrows. Gleichzeitig setzte auch seine eigene unermüdliche Gedankenarbeit ein, die ihn, wie erzählt wird, dazu bringen konnte, seine Umgebung ganz zu vergessen. Er bestätigt es auch selbst, wenn er später auf die Frage, wie er so schwierige Probleme habe lösen können, antwortete: „Durch stetes Nachdenken darüber".

Die beste Gelegenheit, sein Denken zu konzentrieren, fand er vielleicht in seiner Heimat in Lincolnshire in einer Zeit, als die Pest ihn zwang, Cambridge zu verlassen. Jedenfalls ist es bekannt, daß er eben in dieser Zeit 1665—67 seine wichtigsten mathematischen Entdeckungen begründete: die Erweiterung der Binomialformel zu Potenzen mit gebrochenen und negativen Exponenten und, hiermit verbunden, eine weitgreifende Anwendung unendlicher Reihen, seine Tangentenmethode, die mit seiner direkten Fluxionsrechnung zusammenfällt, deren Bezeichnungen er schon damals zu verwenden anfing, und die inverse Fluxionsrechnung, d. h. die Verwertung des Gegensatzes zwischen „Differentiation" und „Integration" für eine ganz neue und systematische Behandlung von Quadraturen. Diese bahnbrechende Verwertung gehört ihm an, wenn er auch das gegensätzliche Verhältnis selbst mag durch Barrows Vorlesungen kennen gelernt haben. Auch das Gesetz der allgemeinen Anziehung im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung war ihm schon damals klar. Er fand sie durch das dritte Keplersche Gesetz (auf circuläre Bahnen angewendet) bestätigt, ein Gedanke, der ungefähr gleichzeitig auch bei anderen — Wren und Hooke — entstanden war, und der mit Huygens' Bestimmung der Zentrifugalkraft übereinstimmt; er machte aber zugleich ausfindig, daß die den Mond in seinem Kreislaufe erhaltende Anziehung dieselbe sein muß wie diejenige, die einen Körper — z. B. einen Apfel von einem Baume im Garten in Lincolnshire, wo er sich eben aufhielt — zur Erde fallen läßt. Zwar vermochte er wegen der da-

maligen ungenauen Angabe des Erdradius damals noch nicht volle Übereinstimmung zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Fälle zu finden; er tröstete sich aber vorläufig mit der Möglichkeit anderer mitwirkender Ursachen und gelangte 1672 zu der vollen Bestätigung seiner Auffassung, als das Ergebnis der Gradmessung Picards in einer Sitzung der *Royal Society*, wo er eben als Mitglied aufgenommen war, mitgeteilt wurde. Zu dieser Zeit begann er auch die Konstruktion eines Spiegelteleskops, indem er erkannte, daß die Farbenzerstreuung den Gebrauch einer einzelnen Linse hindern würde.

Newton legte sogleich die eben genannten großen, rein mathematischen Fortschritte in geschriebenen Aufsätzen nieder, von denen einer über Fluxionen (und wohl besonders die inverse Fluxionsrechnung) der erst 1704 erschienenen Schrift *Tractatus de quadratura curvarum* zu Grunde liegt. Seine Schrift *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* in der er seine Lehre von den unendlichen Reihen entwickelt, sie durch sehr wichtige Anwendungen erklärt und zugleich beispielsweise das Grundprinzip direkter und inverser Fluxionsrechnung erörtert — jedoch ohne Gebrauch besonderer Benennungen und Bezeichnungen —, ist 1665 ausgearbeitet und blieb gleichfalls vorläufig bei ihm selbst liegen. Als 1669 die *Logarithmotechnia* Mercators erschien, die eine einzelne Anwendung ersterer Methode enthält, schwächte sie zwar, wie Newton selbst behauptet, sein Interesse für seine eigene weit umfassendere Arbeit, indem er meinte, daß ihm jetzt Mercator oder einer seiner Leser alles nachmachen könne; er zeigte aber doch Barrow sein Manuskript, und dieser fand es sogleich ratsam, es an Collins zu senden, damit es durch ihn besser bekannt gemacht werde. Durch ihn lernte Gregory seinen Gebrauch von Reihen kennen, und wir werden sehen, daß später Leibniz 1676 bei Collins die genannte Arbeit einsah; gedruckt ward sie aber erst 1711. Nicht besser erging es Newtons infinitesimalem Hauptwerk: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* das ursprünglich als Einleitung zu einer englischen Ausgabe eines holländischen algebraischen Werkes ausgearbeitet war, während Newton sich später zu einer Herausgabe desselben als Anhang zu einer optischen Arbeit von ihm selbst entschied (1671); es blieb gleichfalls liegen und ward erst nach dem Tode des Verfassers gedruckt. Hier tritt die Lehre von den Fluxionen als geschlossenes System auf, und es werden nicht nur die direkte und inverse Fluxionsrechnung und ihre am nächsten liegenden Anwendungen auf die Tangentenbestimmungen, Maxima, Minima und Quadraturen behandelt, sondern auch weitergehende geometrische Anwendungen auf Krümmungen und endlich Fluxionsgleichungen, die den heutigen Differentialgleichungen entsprechen. Von der Beschaffenheit der Ergebnisse dieses Werkes floß Collins nur eine ganz kurze Mitteilung zu.

Was von den Arbeiten Newtons verlautete, trug indessen in hohem Grade dazu bei, bei Leibniz die Lust zu erwecken, mehr, besonders von Newtons Gebrauch unendlicher Reihen zu wissen zu bekommen, und mit der schon erwähnten Beihilfe Oldenburgs erhielt er denn auch 1676 zwei inhaltsreiche Briefe darüber von Newton. Nebst der bei Collins hinterlegten *Analysis per aequationes infinitas* enthalten sie die vollständigste Mitteilung der infinitesimalen Untersuchungen Newtons, die damals zur Kenntnis der Mathematiker gelangte. Sie geben zwar keine Gesamtauskunft über Prinzip und Anwendungen der Fluxionsmethode, geschweige ihre Technik und Zeichensprache; die zahlreichen und wichtigen Ergebnisse aber, die sie mitteilen, und die Auskünfte über den Gedankengang Newtons, z. B. wie er auf die Entwickelung der Binomialformel und von hier aus auf andere Reihenentwickelungen gekommen ist, mußten doch für diejenigen die allergrößte Bedeutung haben, die mit der Grundlage der damaligen Mathematik vertraut waren und Gelegenheit hatten, das bei Collins hinterlegte Werk einzusehen, und aus demselben erlernen konnten, wie sich die in den Briefen mitgeteilten Integrationsergebnisse, um die modernen Ausdrücke zu gebrauchen, durch Differentiation bewahrheiten lassen. Die größte Bedeutung mußten sie natürlich für einen Mann wie Leibniz haben, der selbst schon im Begriffe war zu Anschauungsweisen und Methoden zu gelangen wie denjenigen, von denen Newton ausging, und die er benutzte.

Diese Hauptmethoden sind nun zwar in den Briefen enthalten, aber auf eine solche Weise, die dem Leser gar nichts nutzen kann, indem sie sich in zwei Anagrammen verbergen, von denen Newton erst viel später ersteres folgendermaßen aufgelöst hat: „Wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt“ und letzteres, wie folgt, erklärt: „Eine Methode besteht in der Gewinnung der Fluente aus einer Gleichung, welche zugleich Fluxionen enthält; eine andere nur in der Annahme einer Reihe für eine der Unbekannten, woraus die übrigen*) leicht abzuleiten sind, und in solcher Vergleichung der einander entsprechenden Glieder der Gleichung, daß sie zur Ermittelung der Glieder der angenommenen Reihe zu verwerten sind“.

Letztere Methode, nämlich die Verwertung der Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Entwickelung in einer unendlichen Reihe, wäre vielleicht ohne näheren Aufschluß aus ihren vielen und wichtigen Anwendungen herzuleiten, über welche die *Analysis per aequationes in-*

*) Dies muß Newtons Meinung sein, obgleich er sagt: „pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera“, also „das Übrige“.

finitas und die beiden Briefe Mitteilung geben; die übrigen Auskünfte über die Anagramme dagegen würden auch dann keinen großen Ertrag geliefert haben, wenn sie unverkleidet dargeboten wären. Hier ist von einer neuen und zusammenhängenden Methode die Rede, die überhaupt nur zu verstehen und recht zu würdigen gewesen wäre, wenn sie ausführlich und in ihrem vollen Zusammenhang mitgeteilt worden wäre.

Die Unmöglichkeit, die hier angedeutete Fluxionsmethode ohne große Weitschweifigkeit und sorgfältige Darstellung verständlich zu machen, bildet die natürliche Erklärung für die hier gebrauchte vermummte Darstellung, die man damals öfters anwendete, wenn man sich für künftig die Anerkennung sichern wollte, daß man zu gegebenem Zeitpunkte ein Wissen besessen, das man erst in Verbindung mit etwas anderem mitteilen wollte, was man entweder noch nicht vollständig gewonnen oder noch nicht Gelegenheit gehabt hatte, bis zu dem Grade zu entwickeln, der zur Erlangung voller Anerkennung vonnöten war. Der sonst so offenherzige Huygens hat es öfters so gemacht. Es ist demnach nicht unnatürlich, daß auch Newton mit seiner Fluxionsmethode nicht heraus wollte, bevor er sie in unangreifbarer Gestalt darzustellen vermochte, unangreifbar in seinen eigenen Augen und gegen Angriffe von andern gesichert.

Was die gesamte Lehre von den Fluxionen betrifft, so brachte er es zeit seines Lebens überhaupt nicht so weit. Er begnügte sich auch fernerhin mit einzelnen Aufschlüssen, die in seinen *Prinzipien* und einem zur Veröffentlichung bestimmten Briefe an Wallis (1692) enthalten sind, aber zu kurz waren, um angegriffen zu werden, und mit der viel späteren Herausgabe eines einzelnen Abschnittes der Fluxionslehre in der Schrift *De quadratura*. Dies findet seine Erklärung in Newtons Eigentümlichkeiten selbst. Eine solche Erklärung findet man erstens in einer gewissen Unlust, sich mit Untersuchungen zu beschäftigen, die auch andere vorhatten; sie hatte sich den unendlichen Reihen gegenüber offenbart, da er sah, daß auch Mercator sich solcher bediente, und kann sich auch bezüglich des Gebrauches von Fluxionen geltend gemacht haben, als Leibnizens Beantwortung seines zweiten Briefes erwies, daß auch er in seiner Differentiation ähnliche Hilfsquellen habe. Demnächst muß man Newtons Unlust, etwas zu veröffentlichen, und seine Furcht, dadurch in Polemik zu geraten, in Betracht ziehen, die er, wie wir sehen werden, auch bei anderen Gelegenheiten an den Tag gelegt hat. Es nimmt also nicht wunder, daß dieselbe sich besonders bei einer ganz neuen Behandlung von Infinitesimaluntersuchungen geltend machen mußte. Allerdings hatte Newton mit Interesse Wallis studiert und gesehen, wie weit man es durch Benutzung seiner induktiven Verwendung von Analogien bringen kann, ja, Newton

konnte sich ihrer gelegentlich selbst bedienen, um zu neuen Resultaten zu gelangen. So teilt er in dem einen seiner Briefe an Leibniz mit, daß er auf diesem Wege zuerst seine erweiterte Binomialformel gefunden habe. Es wollte jedoch dem vorsichtigen Newton nicht genügen, sich einer Darstellung der zu Grunde liegenden Methoden zu bedienen, die sie nicht durch entscheidende Beweise gegen den von ihm so sehr befürchteten Widerspruch gesichert hätte. Dazu hatte sich die Zeit in die antike Stringenz und in die Formen in zu hohem Grade eingelebt, unter denen man zu ihr gelangen, und außerhalb deren man sich ihrer Erlangung nicht sicher fühlen konnte. Daß Newton von sich selbst diese Stringenz forderte, ersehen wir sowohl aus seinen sorgfältigen Beweisen in seinem späteren Hauptwerk *Principia,* als aus der soliden Begründung, die er in der Schrift von 1671, die er zeit seines Lebens zurückhielt, seiner Fluxionsmethode gegeben hat. Wenn dennoch die letztgenannte Darstellung ihn selbst nicht ganz befriedigte, oder wenn er befürchtete, daß Mißverständnisse Widersprüche hervorrufen würden, so hat man eigentlich in unserer Zeit kein Recht, sich darüber zu wundern, da man weiß, bis wie spät ins 19. Jahrhundert hinein es dauerte, bevor die Methoden der Infinitesimalrechnung, deren Ergiebigkeit das 18. Jahrhundert in so großem Maßstabe ausbeutete, von der logischen Klarheit ganz durchdrungen wurden, die das Altertum auf einem beschränkteren Gebiete durchgeführt hatte, und da man ab und zu noch heutigentages eine Kritik gegen Newton auftauchen sehen kann, die auf reinem Mißverständnis seiner Gedanken beruht.

Wir müssen es dahin gestellt sein lassen, ob die hier versuchte Hinweisung auf die Unlust Newtons, öffentlich mit etwas hervorzutreten, was ihn in Kontroversen verwickeln könnte, und auf die besondere Gewalt, mit der sich diese Unlust Gegenständen gegenüber geltend machte, die ihrer Natur nach auf unangreifbare Weise dargestellt werden mußten, aber damals schwerlich so dargestellt werden konnten, hinreichend ist, um zu erklären, daß er sogar mit seiner Lehre von den Fluxionen noch zurückhielt, als Leibniz 1684 seine Differentiationsprinzipien erscheinen ließ. Dies geschah allerdings in einer zugänglicheren Form, als sie Newtons Fluxionslehre damals gehabt haben würde, sicherlich aber nicht in einer unangreifbareren; und damals noch hätte Newton seine Überlegenheit durch Nachweisung des weit größeren Umfanges dartun können, in dem er schon längst alle von Leibniz jetzt an den Tag geförderten Regeln verwertet hatte.

Unsere Erklärung scheint uns immerhin besser als der gewöhnliche Hinweis darauf, Newton habe seine Methoden aufgehoben, damit er um so mehr mit den Ergebnissen imponieren könne. Allerdings haben auch

wir als eine der Ursachen seiner hartnäckigen Verschwiegenheit ein Gefühl von Unlust berührt, sich mit dem zu beschäftigen, was auch andere kannten und benutzen konnten; dies Gefühl braucht aber nicht von so egoistischer Beschaffenheit gewesen zu sein, wie man es mitunter hat darstellen wollen. Jedenfalls hat es Newton selbst am meisten geschadet und somit in Wirklichkeit keine egoistischen Zwecke gefördert.

Dagegen tut man Newton kaum Unrecht, wenn man behauptet, er sei in der hier besprochenen Beziehung ein Sonderling gewesen, und schließlich mögen mehrere der hier entwickelten Rücksichten sich in einer Verbindung geltend gemacht haben, die sich jetzt nicht mehr erraten oder psychologisch erklären läßt.

Von dieser Abschweifung, die wir an Newtons frühzeitige Ausarbeitung der Lehre von den Fluxionen angeknüpft haben, wenden wir uns wieder seinem Leben zu. In der Lucasischen Professur, die er 1669 nach Barrow übernahm, hat er u. a. über allgemeine Arithmetik oder Algebra Vorlesungen gehalten, deren Hauptinhalt 1707 von seinem Nachfolger in der Professur nach Vorlesungsheften, 1722 aber mit Verbesserungen von Newton selbst herausgegeben wurde. Namentlich war es jedoch die Lehre vom Licht, die Newton in der ersten Zeit seiner Professur zum Gegenstand seiner Untersuchungen und Vorlesungen machte. Hier hat man ihm bekanntlich vor allem die Lehre von der Farbenzerstreuung zu verdanken, während seine Emissionstheorie der Wellentheorie Huygens' hat weichen müssen. Während der Arbeit an der Lehre von der Farbenzerstreuung verleideten ihm Einwendungen Hookes, der sich mit ähnlichen Gedanken trug, ohne jedoch zu dem eigentlichen Gesetze zu gelangen, eine Zeitlang die Arbeit, wieder eine der Gelegenheiten, wo er die vorhin erwähnte Furcht vor öffentlicher Polemik — und vor Veröffentlichungen, die eine solche mit sich führen konnten — deutlich an den Tag legte.

Hooke hatte indessen in einem weit wichtigeren Punkte einen fördernden Einfluß, indem er Newton veranlaßte, seine Untersuchungen von 1665 über die Wirkungen der allgemeinen Anziehung wieder aufzunehmen. 1679 schrieb nämlich Hooke als Schriftführer der *Royal Society* an Newton und forderte ihn auf, der Gesellschaft ein Thema zu stellen. Darauf antwortete Newton mit dem Vorschlag, den Fall von einem hohen Punkte aus zu untersuchen; es sei zu erwarten, daß sich der fallende Körper ostwärts bewege. In einer mitfolgenden Figur ließ er ihn eine Spirale gegen das Zentrum der Erde beschreiben. Dies war allerdings nur ein Zufall, den er auf einem späteren Standpunkt damit verteidigte, daß der Widerstand der Luft der Bahn diese Form geben würde. Diese Figur veranlaßte indessen Hooke zu der Bemerkung, die Bahn werde

eine exzentrische, ellipsenähnliche Kurve bilden, und zu der Aufforderung, Newton möge sie ausfindig machen. Es gelang denn auch Newton zu finden, daß die Bahn, mit dem ersten Keplerschen Gesetze übereinstimmend, eine Ellipse mit dem Brennpunkt im Zentrum der Erde bilde — allerdings nicht unter der Voraussetzung eines Falles in das Innere der Erde hinein, sondern vorausgesetzt, daß die Anziehung sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Zentrum der Erde verhalte; als aber diese Berechnung vollführt und ihr Ergebnis Hooke mitgeteilt war, ließ Newton sie ruhig liegen.

Zu ihrer Wiederaufnahme gab Halley die Veranlassung. Auch bei ihm war der Gedanke wach geworden, der durch Huygens' Untersuchung der Zentrifugalkraft naheliegend geworden war, das dritte Keplersche Gesetz lasse sich (unter der Voraussetzung circulärer Bahnen) durch eine Anziehung im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung erklären, und dadurch wurde er auch zum Nachdenken darüber veranlaßt, das erste Keplersche Gesetz möge einer ähnlichen Erklärung fähig sein. Er beriet dies dann in London mit Wren und Hooke, die ihm, obgleich sie selbst die nämliche Frage vorgehabt hatten, keine befriedigende Antwort geben konnten; Hooke konnte ihn aber auf Newton verweisen. Er begab sich also gleich 1684 nach Cambridge, um mit ihm zu reden; er wurde mit großer Bereitwilligkeit empfangen, und Newton teilte ihm mit, daß er für die Richtigkeit der Annahme Halleys einen Beweis gefunden habe. Wie wenig er sich jedoch in der letzten Zeit mit diesem Beweise beschäftigt hatte, ergab sich daraus, daß er sich, indem er ihn zu reproduzieren versuchte, anfangs in seiner eigenen Zeichnung nicht zurecht finden konnte, weil zwei Linien, die ein beliebiges Paar konjungierter Diameter darstellen sollten, das Aussehen hatten, als sollten sie rechte Winkel bilden. Die Sache war selbstredend bald im klaren. Hiermit begnügte sich Halley jedoch nicht. Er drang derart auf Newton ein, daß er ihn erst dazu bewog, öffentlich der *Royal Society* die großen schon errungenen Ergebnisse auf dem Gebiete der Mechanik des Himmels mitzuteilen und demnächst in kurzer Zeit das große Werk, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* herzustellen und in den Jahren 1686—87 zu veröffentlichen. Halley, der damals nicht mehr reich war, bestritt selbst die Kosten der Herausgabe und war Newton auf jegliche Art und Weise bei der damit verbundenen Arbeit behilflich.

Am wenigsten Schwierigkeit hat es hierbei sicher gekostet, Newton zu der notwendigen, ungeheuren Gedankenarbeit zu bewegen. Dieselbe wurde erfordert, sowohl um die Hauptsätze der Mechanik des Himmels, besonders durch die Lehre von der Anziehung von Kugeln, zu vervollständigen,

als auch, um die umfassenden mechanischen, physikalischen, astronomischen, geometrischen und infinitesimalen Untersuchungen durchzuführen, auf die Newton durch die Bemühungen geführt wurde, die gewonnenen und mit so viel Glück verwendeten mechanischen Prinzipien völlig auszubeuten. Um sein hohes schöpferisches Vermögen in so großem Maßstabe zu entfalten, hat Newton, da er einmal auf diese Fragen zurückgeführt war, seitens Halleys kaum viel Anregung nötig gehabt; dagegen hat die schnelle Veröffentlichung des Erfolges seine ganze Überredungskunst erfordert. So verweigerte Newton lange seine Einwilligung zur Herausgabe des dritten Buches, da die vorhergehenden eine Polemik seitens Hookes hervorgerufen hatten.

Was in dem hier besprochenen Werke der ganzen Menschheit gespendet ist, dabei wollen wir uns weiter nicht aufhalten. Die Bedeutung der nachgewiesenen Einheit und des Zusammenhangs der Kräfte, die hier auf Erden und im Universum herrschen, ist allen verständlich, und es gibt viele, die verstehen, daß die Prinzipien Newtons auch dazu verwendet werden können und allmählich verwendet worden sind, um ebenso bestimmt die Einheit und den Zusammenhang zwischen mannigfaltigen anderen scheinbar verschiedenen physischen Erscheinungen darzutun. In einer Geschichte der Mathematik muß dagegen hervorgehoben werden, daß der Kern des Ganzen der mathematische Beweis dafür ist, daß das sogenannte Newtonsche Anziehungsgesetz genau dasselbe aussagt wie die empirischen Keplerschen Gesetze, daß sich Newton eben durch diese vollständige Beweisführung von den übrigen unterscheidet, die sich mit einem ähnlichen Gedankengang getragen haben, und daß die dazu dienenden, klar dargestellten mathematischen Prinzipien zugleich auf andere Untersuchungen anwendbar sind und dazu von Newton in großem Maßstabe auch verwendet worden sind. Der aufgestellte allgemeine Kraftbegriff ist der nämliche, den man heutigen Tages der rationellen Mechanik und somit allen mathematisch-physikalischen Untersuchungen zu Grunde legt. Allerdings hat man sich sowohl zur Zeit Newtons selbst als heutzutage von einem so metaphysischen Begriffe wie dem einer unerklärten Fernkraft unbefriedigt gefühlt; Newton selbst ist aber daran unschuldig, indem er sich ausdrücklich weigert, eine Hypothese aufzustellen, die eine Erklärung über die von ihm in volles Licht gestellte Verbindung zwischen dem klar dahingestellten Kraftbegriff und der Bewegung enthalten sollte. Bei ihm wie im Altertum besteht die mathematische Arbeit darin, die absolute Übereinstimmung zwischen ausdrücklichen Voraussetzungen und den Ergebnissen zu zeigen. Daß die Voraussetzungen zugleich gut gewählt sind, ergibt sich indessen daraus, daß man auf sie zu bauen hat fortfahren können.

Gleichzeitig haben die *Principia* für die Entwickelung der Mathematik überhaupt und nicht zum wenigsten für die Infinitesimalmathematik eine außerordentliche Bedeutung gehabt. Allerdings werden, wie wir erwähnt haben, weder Sprache und Bezeichnungen der Fluxionsrechnung noch selbstredend diejenigen der Differentialrechnung verwendet; um aber ein für diese neuen und unerprobten Rechnungen günstiges Material und die Hilfsmittel an die Hand zu geben, dies Material auf zuverlässige und ergiebige Weise zu behandeln, mußte Newton eine Entwickelung der Infinitesimalmethoden in mannigfachen Richtungen durchführen, welche die genannten Rechnungsarten nicht unmittelbar angehen oder zum Auftreten in ihrer Sprache nicht ohne weiteres geeignet sind. Newtons Untersuchungen von Bewegungen sind ihrer eigenen Natur nach Infinitesimaluntersuchungen, ja, sein Begriff der Geschwindigkeit fällt beinahe ganz mit dem Begriffe der Fluxion zusammen. Newton besaß nicht im voraus eine solche Verbindung von analytischer Geometrie und Fluxionsrechnung, die sich unmittelbar zur Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem Anziehungsgesetze oder umgekehrt verwerten ließ. Nein, er mußte, wie wir sehen werden, seine infinitesimalen Prinzipien mit den geometrischen Sätzen kombinieren, die er, was die Lehre vom Kegelschnitt betrifft, wohl am besten von Apollonius her kannte. Bei dieser Arbeit mußten ihm freilich, wie er selbst sagt, seine Fluxionslehre oder doch seine Übung im Gebrauch ihrer Prinzipien zu gute kommen. Durch eine solche Arbeit wurde es zugleich klar, daß dieselben Prinzipien auf Aufgaben von weit allgemeinerer Natur als auf die Hauptaufgaben der Mechanik des Himmels anwendbar waren, und die Formen, welche diese Anwendung annahm, konnten von denjenigen nicht wesentlich abweichen, die sich am einfachsten als direkte Anwendungen der Fluxionsrechnung oder der Differential- und Integralrechnung ausdrücken lassen. In manchen Fällen waren auch direkt solche Differentiations- oder Integralresultate nötig, die er von seiner Fluxionsrechnung her kannte, und in ebenso viel Fällen fiel die Lösung der mechanischen Aufgabe mit einer rein mathematischen, von der Fluxionsrechnung noch nicht gelösten zusammen, wodurch diese Rechnung selbst also bereichert und entwickelt wurde. In den vielen Fällen dieser Art ist es zu bedauern, daß Newton die Fluxionsrechnung und ihre Bezeichnungen nicht direkt verwendet, die er dann freilich erst hätte erklären müssen. Als aber Leibnizens Differential- und Integralrechnung und später Newtons Fluxionsrechnung bekannt wurden, konnte die allmähliche Übersetzung in die Sprache dieser Rechnungen keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Solche Übertragungen kamen also auch der neuen Infinitesimalrechnung zu gute. Am öftesten ist dies gewiß derart geschehen, daß man Newtons eigene in geometrischer Form dargestellte Beweise als schwierig betrachtete,

und deshalb das Resultat durch Differential- und Integralrechnung bewies, ohne zu bemerken, daß der so erhaltene Beweis wesentlich mit einer Übersetzung von Newtons eigenen Gedanken in die Sprache der Differential- und Integralrechnung, und sonach mit einer Rückübersetzung in wesentlich dieselben analytischen Operationen zusammenfiel, die Newton in der Form der Fluxionsrechnung anwendete.

Aus diesen Gründen werden in gegenwärtigem Buche, in dem angewendete Mathematik an und für sich erst in zweiter Reihe besprochen wird, die *Principia* Newtons doch eins der Werke sein, welche die eingehendste Besprechung verdienen.

Newton war nach der Herausgabe der *Principia* in seinem Vaterlande ein angesehener Mann. 1689 ward er als Whig zum Vertreter der Universität in dem Parlamente gewählt, das Wilhelm von Oranien als König von England anerkannte, und veranlaßte er sodann die Universität, die neue Regierung gleichfalls anzuerkennen. Übrigens war er sowohl in politischer als besonders in kirchlicher Beziehung, als Anhänger der episkopalen Kirche, konservativ. Es nimmt deshalb nicht wunder, daß wir ihn später, als der Streit nicht mehr den Katholiken galt, im Parlamente unter den Tories finden. Als solcher bekämpfte er auch die hannoveranische Erbfolge, für welche von seiten Hannovers Leibniz wirkte, was wohl den gegenseitigen Unwillen, der sich damals zwischen den beiden großen Mathematikern zu entwickeln begann, verstärkt haben mag. Was übrigens seine kirchlichen Interessen betrifft, so verband er mit einem innigen persönlichen Glauben ein bedeutendes theologisches Interesse und große Einsicht. Diese hat er in einem Briefwechsel mit dem Philosophen Locke und in mehreren Schriften an den Tag gelegt, unter denen sich — wie bei Stifel und Neper — Arbeiten über die Prophezeiungen Daniels und die Offenbarung Johannis finden. Auch der Chronologie widmete er viel Interesse.

1696 wurde er an der Münze in London angestellt, 1699 Münzmeister. In dieser Stellung machte er sich durch die Einführung vollwertiger Münze verdient. Dies Amt nahm übrigens seine Zeit sehr in Anspruch. Mehr noch wird indes der zwischen seinen Anhängern und denen Leibnizens auflodernde Streit über das Urheberrecht an der neuen Infinitesimalrechnung, an dem sich die beiden großen Männer sowohl indirekt als direkt beteiligten, den solchen Streitigkeiten gegenüber gar empfindlichen Newton angegriffen haben. In diesem Streite hat sicher auch Newton viele Fehler begangen, besonders durch den Anteil, den er an dem hatte, was andere über Leibniz schrieben. Er selbst erkannte indes noch in der 2. Ausgabe seiner *Principia* (1713) an, daß Leibniz 1677 eine Infinitesimalmethode besessen, die seiner eigenen ähnlich gewesen, indem er die Anregungen zu derselben, die

jener Mitteilungen von ihm selbst oder über ihn zu verdanken haben mochte, nicht berührte. Nachdem später die Beschuldigung aufgetaucht war, daß umgekehrt Newton seine Methode Mitteilungen Leibnizens zu verdanken habe, schloß er indessen in der 3. Ausgabe jede Erwähnung Leibnizens aus und begnügte sich mit dem Hinweis auf den eigenen älteren Besitz der von ihm selbst angewandten Methoden.

Von solchen Kämpfen abgesehen, bei denen eine Neigung zur Verdächtigung sich zu sehr geltend machte, war Newton übrigens keineswegs hochmütig. Er schätzte innig die Vorgänger, auf deren Arbeit er baute, und verglich das von ihm selbst Gefundene den Muscheln, welche ein Kind am Gestade eines großen Meeres findet, dessen Erforschung Sache der Zukunft sein sollte. Er war freigebig in Geldsachen. Seine fortgesetzte mathematische Arbeit wird bezeugt durch den Anteil, den er an der Herausgabe der Optik 1704 mit zwei Anhängen, von denen der eine von Kurven dritter Ordnung handelt, der andere die Schrift *De quadratura curvarum* enthält, sowie an der 2. Ausgabe der *Arithmetica universalis* nahm; ebenso beteiligte er sich an der 2. Ausgabe der *Principia* (1713), die allerdings sein Schüler Cotes besorgte, aber nur, nachdem er mit Newton über alle Änderungen verhandelt hatte, und an der dritten (1726), die von Pemberton besorgt wurde. Von Newtons Arbeiten wollen wir noch die 1711 erschienene Schrift *Methodus differentialis* erwähnen, die von höheren Interpolationen handelt.

Newton war schon im vollen Besitze seiner durchgreifenden Methoden und einer großen Menge der durch diese gewonnenen Ergebnisse, als nach dem dreißigjährigen Kriege die Deutschen aufs neue begannen an der Entwickelung der Mathematik tätig teilzunehmen. Allerdings mußten sie Lehrer und Anregungen in den westlichen Ländern suchen; andererseits aber gelangte einer von ihnen auf die Höhe dieser Lehrer selbst, ja, wurde in der Begründung der Infinitesimalrechnung, der er besonders die von ihr später bewahrte äußere Gestalt gegeben hat, der Nebenbuhler Newtons selbst.

Bevor wir auf ihn übergehen, wollen wir von Walther von Tschirnhaus (1651—1708) reden. Er entstammte einer adligen mährisch-böhmischen Familie und war zu Görlitz in Sachsen geboren; er wurde in seinem Geburtsorte erzogen und studierte hier auf eigene Faust Mathematik. Von 1668 ab setzte er seine Studien in Leyden fort. Sie wurden jedoch durch Pest und Krieg gestört, ja, er nahm selbst am Kriege gegen Frankreich teil. Auf seinen vielen Reisen machte er Bekanntschaft teils mit Philosophen wie Spinoza, teils mit Mathematikern wie Hudde, Huygens,

Newton, Collins und Oldenburg und war besonders 1675 mit Leibniz in Paris zusammen, wo er später 1682 Mitglied der *Académie des sciences* wurde. In demselben Jahre kehrte er zur Heimat zurück und verheiratete sich; er übernahm kurz darauf die Besitztümer seines Vaters und blieb auch trotz lockender Angebote von auswärts in der Heimat. Hier stiftete der fleißige Mann manchen Nutzen durch industrielle Unternehmen, die jedoch durch den Einfall Karls XII. geschädigt wurden. Seine mathematischen Arbeiten, die sich in den Schriften der Pariser Akademie und der 1682 begründeten, in Leipzig erscheinenden Zeitschrift *Acta Eruditorum* finden, offenbaren einen erfindsamen Geist, der jedoch nicht selten vorschnell war in der Behauptung von Dingen, die sich nachher als unrichtig ergaben.

Demnächst wenden wir uns Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) zu, einem Namen, der in der Geschichte der Mathematik zu den größten zählt, ebenso sehr aber der der Philosophie angehört, und dessen Träger bedeutende diplomatische Aufträge ausgeführt, umfassende und gründliche geschichtliche Untersuchungen unternommen hat und so modernen Disziplinen wie Nationalökonomie und vergleichender Sprachwissenschaft gewissermaßen zuvorgekommen ist.

Leibniz ist in Leipzig geboren. Der Vater, Notar und Professor der Moral, starb schon 1652, die Mutter 1664. Als Kind verschlang er die Bibliothek seines Vaters, besonders die antiken Schriftsteller. Schon damals begann sein Interesse an der Logik und entstand die Idee eines Alphabets, einer Zeichensprache des menschlichen Gedankens. 1661 kam er an die Universität seiner Vaterstadt, wo er Jura, daneben aber Aristoteles und Descartes studierte, zwischen deren Naturauffassungen er anfangs schwankte. Die mechanische Naturerklärung des letzteren siegte in ihm, was sein schon wachgerufenes Interesse für die Mathematik vermehrte. Mit diesem Fache beschäftigte er sich auch während eines Aufenthaltes in Jena. 1666 habilitierte er sich durch eine *Dissertatio de arte combinatoria*, die auf allgemeine Regeln für die Reduktion zusammengesetzter Begriffe und somit auf tabellarische Schematisierung aller Wissenschaften ausging; als Anhang enthielt sie einen mathematischen Beweis der Existenz Gottes.

Nachdem er in Altdorf *doctor juris utriusque* geworden, traf er 1667 in Nürnberg mit Boineburg zusammen, einem früheren Staatsmanne, der sich seiner sehr annahm, und den er nach Frankfurt begleitete. Unter seinem Einfluß legte er sich auf die Politik und gewann besonders für die Kirchenpolitik ein Interesse, das sich später in seinen Bemühungen offenbarte, die katholische und die protestantischen Kirchen und, als dies nicht gelingen wollte, wenigstens die letzteren unter sich wieder zu vereinigen. Während seines Aufenthaltes in Frankfurt schrieb er 1671 eine Arbeit über

die Lehre von den Bewegungen, deren einen Teil über die konkrete Bewegung er der *Royal Society* übersandte, was ihn mit Oldenburg in brieflichen Verkehr brachte; den zweiten Teil über die abstrakte Bewegung sandte er an die Pariser Akademie. In diesen Schriften wurde den letzten Ursachen alles Seienden in Gedanke und Bewegung nachgespürt. Wie wenig der Autodidakt, der er war, damals noch die mechanischen Fragen zu durchdringen vermochte, zeigte sich darin, daß er in demselben Jahre glaubte, ein *Perpetuum mobile* gefunden zu haben. In gereifteren Jahren betrachtete er der Lehre von der Bewahrung der lebendigen Kraft gemäß das gesamte Weltall als ein solches.

Sein Blick wurde erweitert, als er das nächste Jahr als diplomatischer Gesandter des Kurfürsten von Mainz nach Paris kam. Als solcher sollte er dahin wirken, seitens Frankreichs möglicherweise einen Angriff auf Ägypten und dadurch zwischen Frankreich und der Türkei einen Krieg hervorzurufen, der die ehrgeizigen Blicke Ludwigs XIV. von Deutschland abwenden sollte. Dies mißlang; der Aufenthalt in Paris aber brachte Leibniz mit der französischen Wissenschaft in Verbindung, die gerade eine ihrer glänzendsten Perioden durchgemacht hatte. Zudem bekam er 1673 die Gelegenheit, einen kurzen Abstecher nach England zu machen, wo nunmehr eine nicht geringere Blüte angehoben hatte. Hier war er schon mit Oldenburg bekannt und hatte die Gelegenheit, der *Royal Society* eine Rechenmaschine vorzulegen, die er, nachdem er die Pascals kennen gelernt, seinerseits ersonnen hatte. Da er selbst schon angefangen hatte, sich mit unendlichen Reihen zu beschäftigen, gewann es besondere Bedeutung für ihn, mit den diesbezüglichen Untersuchungen Mercators Bekanntschaft zu machen. Dagegen befand sich zu der Zeit Collins nicht in London, und Leibniz hatte somit noch nicht Gelegenheit, Newtons bei diesem deponierte, viel weiter greifende Schrift über den nämlichen Gegenstand einzusehen. Übrigens benutzte er den Aufenthalt, um sich Barrows *Lectiones* zu verschaffen, auf die ihn Oldenburg früher aufmerksam gemacht hatte. Ein Beweis, daß er selbst auf die englischen Gelehrten einen guten Eindruck gemacht und mit ihnen eine feste Verbindung gestiftet hat, ist es, daß er kurz nach seiner Rückkehr nach Paris zum Mitglied der *Royal Society* gewählt wurde.

In Paris schloß er sich demnächst Huygens eng an, der damals der wissenschaftliche Leiter der Akademie war. Die Meisterschaft dieses Gelehrten in der Auffindung der gerade für jede einzelne infinitesimale Untersuchung geeigneten Mittel hat sicher gewaltig dazu beigetragen, Leibniz in seinen Bemühungen anzuregen, umgekehrt die allgemeinen Gesichtspunkte und Hilfsmittel ans Tageslicht zu fördern, durch welche diese Untersuchungen in einheitliche und allgemeine Regeln zusammenzufassen wären. Er kannte übrigens

die infinitesimalen Arbeiten Cavalieris und Gregorius', und Huygens lenkte seine Aufmerksamkeit auf die hinterlassenen Untersuchungen Pascals. Für diesen faßte Leibniz ein lebhaftes Interesse, das wahrscheinlich die Veranlassung gewesen ist, daß er, wie früher erwähnt, durch die Familie desselben sein Manuskript der Lehre von den Kegelschnitten kennen lernte. Vielleicht kam er auch durch die Familie Pascals mit dem Jansenisten und Cartesianer Arnauld in Berührung, mit dem er später öfters korrespondierte. Vom Pariser Aufenthalte mag noch erwähnt werden, daß Leibniz während desselben viel mit seinem Altersgenossen und Landsmann Tschirnhaus umging, der 1675 aus London anlangte und zahlreiche neue Anregungen mitbrachte.

Diese verschiedenen Tatsachen haben deshalb besonderes Interesse, weil Leibniz zu ebendieser Zeit zu seiner Differential- und Integralrechnung den Grund legte. Der zündende Funke kam Leibniz, wie er sich noch viele Jahre später in einem Briefe erinnert, aus Pascals Anwendung eines immer kleiner werdenden Dreiecks, dessen Seiten zwar bis auf 0 schwinden, während doch ihre Verhältnisse gewisse durch ein ähnliches Dreieck bestimmte Grenzwerte besitzen. Leibniz drängte sich dadurch der Gedanke auf, ein solches Dreieck, sein sogenanntes charakteristisches Dreieck, ganz allgemein bei Tangentenbestimmungen zu verwenden, und so arbeitete er schon 1673 auf dieser Grundlage eine allgemeine Tangentenmethode aus. Demnächst ward er auch auf das gegensätzliche Verhältnis zwischen den bald als Differentiation und Integration bezeichneten Operationen aufmerksam und bemerkte, daß er an ihnen ein geeignetes Mittel besitze, um die sogenannten inversen Tangentenprobleme auf Quadraturen zurückzuführen. Dies ist aber dasselbe, was Barrow in dem vorhin angeführten Buche mit Klarheit und Bestimmtheit gelehrt und auf nicht wenige Aufgaben angewendet hatte; ferner wich Leibniz' Tangentenmethode nicht wesentlich von der Fermats ab, wenn sie auch anders begründet wurde; sogar in den Prinzipien, z. B. in dem Gebrauch des charakteristischen Dreiecks, stand sie derjenigen nahe, welche Barrow in dem von Newton beeinflußten Anhang mitteilt. Was diese Übereinstimmungen betrifft, so kann niemand den Einfluß beurteilen, den Leibniz schon bei einer flüchtigen Durchsicht von Barrows Buch erfahren haben mag, das er jedoch, wie er selbst sagt, erst 1675 genauer studierte, nachdem er selbst so weit vorgeschritten war, wie hier angegeben ist. Von der Bearbeitung seines Gedankens in Anspruch genommen, hat er gewiß — wie es so leicht einem Mathematiker bei seiner besten persönlichen Arbeit ergeht — damit gewartet, andere zu Rate zu ziehen, bis er selbst zu einem gewissen Abschluß gelangt war. Dagegen läßt sich nichts sagen; wohl aber kann man ihm vorwerfen, daß er, als er endlich Barrow studierte, diesen nicht völlig

nach Verdienst würdigte. Es erhellt sogar aus der Art und Weise, wie er in den Briefen an Newton, den Freund Barrows, seine eigene Behandlung der inversen Tangentenaufgaben hervorhebt, daß er selbst nicht einmal darauf aufmerksam geworden war, daß Barrow die nämliche Methode völlig beherrschte und verwendete. Leibniz' Entschuldigung in dieser Beziehung liegt darin, daß er, von seiner eigenen Anschauungsweise eingenommen, zugleich aber von dem klaren Bewußtsein durchdrungen war, daß sie ihn viel weiter bringen werde als zu dem schon von ihm und von Barrow Erreichten.

Und darin hatte Leibniz recht. In gewisser Beziehung war er sogar schon einen Schritt weiter gekommen. Während seines Aufenthaltes in Paris verhandelte er nämlich mit Tschirnhaus über eine Methode, Kurven zu finden, die sich quadrieren ließen, und durch eine spätere Polemik zwischen den beiden Männern ist es offenbar geworden, daß Leibniz eben durch die Operation, die bald den Namen Differentiation erhielt, für diese Kurven Gleichungen bildete, also einsah, daß die Differentiation die ursprüngliche Operation ist, auf der die inverse Quadratur oder die Integration aufzubauen sei. Wir wissen zwar, daß Newton schon 10 Jahre früher diese Einsicht besessen hatte, die auch in seinem bei Collins deponierten Werke geltend gemacht wird; für Leibniz eigentümlich und vollständig mit seinen allgemeinen wissenschaftlichen Bemühungen übereinstimmend war es indessen, daß er eine besondere Zeichensprache gebraucht und damit bestimmte Regeln verbindet, nicht nur, wie man aus jeder einzelnen erforderten Operation (besonders der Differentiation) das Ergebnis herzuleiten habe, sondern auch, wie dies Ergebnis in den einfachen Fällen, aus denen die zusammengesetzteren hervorgehen, unmittelbar aufzuschreiben sei. Dadurch werden diese Operationen in eine Art Rechnen umgesetzt, das auch von denjenigen erlernt und ausgeführt werden kann, die an allgemeiner Einsicht hinter den großen Meistern, die bis dahin allein diese Untersuchungen zu unternehmen vermochten, weit zurückstanden. Aus den Papieren Leibniz' aus jener Zeit erhellt es nun, daß er damals eifrig um die Entwickelung eines solchen Systems bemüht war. Sogar die Zeichen d und $\int$, die späteren Zeichen der Differentiation und Integration, finden sich schon in diesen Papieren, wenn auch nicht sofort ebenso, wie später, verwendet.

Dies war der Standpunkt Leibniz', als seine früher erwähnte Korrespondenz mit Newton 1676 durch die Vermittelung Oldenburgs anhub. (S. 56). Sein Standpunkt zeigt einerseits, daß er es selbst weit genug gebracht hatte, um für dasjenige, was seiner Differential- und Integralrechnung ihren besonderen Wert verleiht, nicht Newton danken zu müssen; andererseits zeigt

sich aber auch, daß er mit derartigen Untersuchungen hinreichend vertraut war und sich für sie genug interessierte, um die Bedeutung der von Newton mitgeteilten wichtigen Ergebnisse zu verstehen. Über die Art ihrer Erfindung gab allerdings Newton in dem ersten Brief nicht viel Aufschlüsse; von Leibniz aufgefordert, ergänzte er sie aber in dem zweiten Brief, und gleichzeitig erhielt Leibniz während eines kurzen Besuches in London die Gelegenheit, aus der bei Collins hinterlegten Schrift *Analysis per aequationes infinitas* Auszüge zu machen und auf diese Weise mit Newtons ganzer Behandlung der in den Briefen besprochenen Gegenstände genau bekannt zu werden. Dazu gehört freilich — abgesehen von dem in Anagrammen Verborgenen — keine direkte Darstellung der Methoden, die bei Newton der Differentiation und Integration entsprechen, wohl aber die mit ihnen so eng verbundene Reihenentwickelung, und in ihrer Gesamtheit mußten sie entschieden dazu beitragen, das System, mit dessen Aufführung Leibniz seinerseits beschäftigt war, inhaltlich zu bereichern. In einem wichtigen Punkte lieferten sie zu diesem System sogar einen fast direkten Beitrag, indem die erweiterte Binomialformel Newtons sich unmittelbar in Leibniz' Regel für Differentiation der Wurzelgrößen umsetzen ließ. Diese Regel, auf die er später hohen Wert legte, fand er eben zu dieser Zeit, also gewiß im Anschluß an die Mitteilungen Newtons. Leibniz mag auch zu weiterer Entwickelung seiner eigenen Methode durch die ihm damals aus London zugehende Mitteilung angeregt worden sein, „Newton besitze eine Methode, mittels der man, von der Gleichung der Kurve ausgehend, ohne große Mühe Tangentenaufgaben ganz allgemein lösen könne, und die eigentlich ein Teil einer noch allgemeineren Methode sei, durch die zugleich andre Aufgaben wie Krümmung von Kurven, Flächeninhalt, Länge, Schwerpunkte u. s. w. zu lösen seien." Alle diese Nachrichten paßten so gut auf die Methode, mit deren Begründung er selbst beschäftigt war, daß er sich zu fortgesetzter Arbeit gereizt fühlen mußte. Er brachte es denn auch so weit, daß er Newtons letzten Brief — in welchem dieser selbst die Existenz seiner Methode erwähnt, ihre Grundregeln aber in Anagrammen verbirgt — augenblicklich mit einer vollständigen Auseinandersetzung der einfachsten Differentiationsregeln und der nächstliegenden Anwendungen derselben beantworten konnte. Hiermit verband er sodann die Annahme, daß diese Methode mit der Newtons zusammenfalle.

Dies war trotz der formalen Unterschiede auch der Fall. Eben deshalb enthielt auch dieser Brief nichts Belehrendes für Newton, der nun wohl einsah, daß auch er nicht mehr nötig habe, Leibniz seine Methode auseinanderzusetzen. Seiner Natur gemäß verlor er somit selbst das Interesse an ihrer weiteren Bearbeitung und damit auch die Lust zu ferneren Ver-

handlungen mit Leibniz und vertiefte sich in seine anderen Untersuchungen.

Auch Leibniz war seinerseits von anderen Beschäftigungen zu sehr in Anspruch genommen, um sogleich seine Differentialrechnung dermaßen zu bearbeiten, daß er sie vor die Öffentlichkeit bringen konnte. Er war nämlich 1676 als Vorstand der herzoglichen Bibliothek nach Hannover berufen worden. Unterwegs hatte er Gelegenheit gehabt, in Amsterdam mit Hudde zusammenzutreffen und dessen Tangentenmethode genauer kennen zu lernen und auch mit dem Philosophen Spinoza Bekanntschaft zu machen, mit dessen Betrachtungsweisen er schon in Paris durch Tschirnhaus vertraut geworden war, ohne doch zur Übereinstimmung mit ihm zu gelangen. Erst in Hannover empfing er und beantwortete er Newtons eben erwähnten zweiten Brief. Seine Manuskripte zeigen, daß er auch in der ersten Zeit in Hannover weder die Tangentenmethode noch allgemeine mathematische Untersuchungen versäumte. Unter diesen enthält die *Nova algebrae promotio* die Keime der Determinantentheorie. Sie gingen übrigens teilweise mit seinen philosophischen Arbeiten Hand in Hand. Dies gilt z. B. von seiner 1679 ausgearbeiteten Schrift *Characteristica geometrica,* die wir bald näher zu besprechen haben. Von Hannover ging auch der ungeheure Briefwechsel mit Denkern aller Länder aus, durch den seine philosophischen Gedanken, seiner eigenen Aussage gemäß, c. 1685 die ihn selbst befriedigende Reife erlangten.

Gleichzeitig legten ihm sein Amt und der Hof, der ihn berufen hatte, Arbeiten großen Umfanges auf. Er war der Ratgeber dieses Hofes in nationalökonomischen Fragen, namentlich in Bezug auf den Bergbau; die Einfälle Ludwigs XIV. in Deutschland veranlaßten politische Denkschriften; besonders aber nahm die Aufgabe, die Geschichte des welfischen Hauses zu schreiben, seine Zeit in hohem Grade in Anspruch. Die hierzu nötigen archivalischen Studien waren auch die nächste Veranlassung zu einer großen Reise nach dem Süden (1687—1690), auf der er u. a. Wien und Rom besuchte.

Noch vor dieser Reise hatte er in den seit 1682 in Leipzig erscheinenden *Acta Eruditorum* die Herausgabe der mathematischen Aufsätze begonnen, in denen seine Differentiation und Integration zuerst öffentlich auftraten. Hervorgerufen waren sie zunächst vielleicht dadurch, daß Tschirnhaus 1683 in einem Aufsatze mit der Anwendung solcher Methoden zur Auffindung quadrierbarer Kurven begonnen hatte, die ehemals Gegenstand ihrer Gespräche in Paris gewesen waren. Diese Arbeit veranlaßte Leibniz unmittelbar zu der Schrift: *De dimensionibus figurarum inveniendis*, in der er zeigt, daß das von Tschirnhaus Angestrebte eben durch Differentiation

erreicht wird. Die Regeln dieser Operation aber werden demnächst in der *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus,* 1684, dargestellt.

1686 erschien sodann u. a. *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, wo zum ersten Male das Integralzeichen vorkommt. Das Wort „Integral" nahm er jedoch erst auf, nachdem die Brüder Bernoulli es gebraucht hatten.

Die folgenden Jahrgänge enthielten weitere Aufsätze, die teils die neuen Methoden weiter entwickelten, teils durch zahlreiche Anwendungen, nicht nur geometrischer und rein mathematischer, sondern auch mechanischer Art ihre Verwendbarkeit an den Tag legten. Ein reiches Material für diese Anwendungen mußte Leibniz schon in den damals erschienenen *Principia* von Newton vorfinden. Eben weil er jetzt selbst die mit der Fluxionsrechnung übereinstimmende Differential- und Integralrechnung besaß, konnte der Umstand, daß die Anwendungen der Fluxionsrechnung nicht direkt hervortreten, ihm keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bereiten; im Gegenteil mußte es Leibniz leichter fallen, die Resultate und die in geometrischer Form mitgeteilten Untersuchungen, die ihn interessierten, durch die von ihm selbst entwickelte Form der Infinitesimalrechnung zu verifizieren. Leibniz, der sich auf der schon erwähnten Reise befand, wurde nun allerdings nicht sogleich des ihm übersandten Exemplares der *Principia* habhaft, sondern nur einer in den *Acta Eruditorum* aufgenommenen Auseinandersetzung ihres Hauptinhaltes. Diese aber verschlang er mit großem Interesse und wendete nun seine eigene Infinitesimalmethode an, um die hier mitgeteilten Hauptergebnisse 1689 in genannter Zeitschrift in einem Aufsatze zu beweisen. Hiermit verband er Versuche, die Anziehung physikalisch zu erklären.

Die Anwendungen der Infinitesimalrechnung, die von Leibniz selbst herrühren, erreichen zwar weder an Zahl und Verschiedenartigkeit, noch an Umfang und Bedeutung die Untersuchungen, die man in den *Principia* Newtons findet. Ihrer Natur selbst gemäß gehören diese, wie schon hervorgehoben, unter die Infinitesimaluntersuchungen, wenn sie auch nicht als Anwendungen einer fertigen Methode der Rechnung auftreten konnten, da Newton eine solche nicht veröffentlicht hatte; eben dieser Umstand aber bewirkte, daß Newton fast allein dastand, weil seine Zeitgenossen allerdings seine wichtigsten Begründungen verstehen konnten, er sie aber nicht in den Stand setzte, die einzelnen Untersuchungen selbst anzustellen. Ja, alle in den *Principia* enthaltenen Schätze sind so bis jetzt kaum gehoben. Leibniz dagegen vermochte sogleich Schule zu machen, indem er damit anfing, seine Methode darzustellen, und zwar so darzustellen, daß sie sich

sogleich in den Händen anderer Zeitgenossen, besonders der Brüder Bernoulli, zu einem ebenso brauchbaren Werkzeug gestaltete. Mit diesen und anderen Mathematikern, wie dem schon erwähnten Franzosen de L'Hospital, stand Leibniz in lebhaftem Briefwechsel und folgte ihren Arbeiten mit Interesse. Man regte einander durch gegenseitige Fragen und durch die gewonnenen Lösungen betreffender Aufgaben an. Diese gerieten dann, besonders durch die *Acta Eruditorum*, auch in weitere Kreise.

Eine solche Aufgabe war die über die sogenannte brachistochrone Kurve, betreffs der Leibniz hervorhob, daß sie sicherlich nur von ihm und denjenigen, die wie die Brüder Bernoulli und de L'Hospital seine Methoden besäßen, und wenigen andern wie Huygens, wenn er noch am Leben wäre, Hudde, wenn er sich noch mit dergleichen Untersuchungen beschäftige, und schließlich von Newton zu lösen sei. Dieser antwortete denn auch mit der Bemerkung, die Kurve sei eine Cykloide. Er und seine Freunde scheinen sich jedoch von Leibniz durch die Form der Anerkennung Newtons beleidigt gefühlt zu haben. Leibniz schien nämlich vergessen zu haben, was vor allen andern er selbst von Newtons früherem Besitze einer ähnlichen und ebenso weitgreifenden Methode hätte wissen sollen. Diese Beleidigung veranlaßte die Anhänger Newtons zu viel weiter gehenden Beleidigungen gegen Leibniz, ja, zu Plagiatanschuldigungen. Das stets wachsende gegenseitige Mißtrauen, das sich geltend macht, wenn solche Beschuldigungen einmal erhoben sind, sowie der dienstfertige Eifer der beiderseitigen Freunde trug dazu bei, den jetzt entstehenden Prioritätsstreit über die Infinitesimalrechnung überaus bitter zu gestalten. Bei diesem Streite, der uns gewiß einige weniger große Züge dieser großen Männer aufdecken würde, haben wir jedoch nicht nötig uns aufzuhalten, ganz abgesehen davon, daß er erst ins 18. Jahrhundert fällt. Die während dieses Streites an den Tag gebrachten faktischen Nachrichten und die Ergebnisse der geschichtlichen Prüfung späterer Zeiten haben heutzutage einigermaßen festgestellt, was man einem jeden der beiden großen Gelehrten zu verdanken hat, und dafür soll beiden einhelliger Dank gezollt sein. Ob man seine Dankbarkeit mehr dem einen als dem anderen Teile bezeigen will, hängt davon ab, ob man die Entdeckung der tiefen mathematischen Wahrheiten, die der beiden gemeinschaftlichen Methode zu Grunde liegen, oder die Erfindung und die leicht zugängliche Darstellung einer Technik höher schätzt, welche sogleich die Methode auch in den Händen anderer tüchtigen Mathematiker anwendbar und allmählich auch solchen mehr praktischen Leuten zugänglich machte, die dafür kein tiefergehendes mathematisches Verständnis oder Interesse besitzen.

Leibniz, der nach seiner Zurückkunft von der Reise (1690) seine philosophischen und die hier erwähnten mathematischen Arbeiten in Hannover

fortgesetzt hatte, war auch für die allgemeine Organisation der wissenschaftlichen Tätigkeit wirksam gewesen, indem er den Plan zu einer Weltakademie entworfen hatte. Eine solche zu stiften, gelang ihm freilich nicht, aber er ward doch — nachdem er 1700 Mitglied der Pariser Akademie geworden — in demselben Jahre der wissenschaftliche Begründer der Akademie in Berlin. Dorthin war er eben zu diesem und zu noch anderen wissenschaftlichen Zwecken von Kurfürst Friedrich III. berufen worden, der mit einer hannoveranischen Prinzessin vermählt war. Leibniz nahm auch an der staatsrechtlichen Vorbereitung des preußischen Königtums teil. Er stieß indes in Berlin bald auf Schwierigkeiten und kehrte nach Hannover zurück, wo er wieder als Politiker in Anspruch genommen wurde. Besonders war er 1713 tätig, um den Kurfürsten von Hannover zu unterstützen, als ihn die Tories in England aus der früher beschlossenen Thronfolge zu verdrängen suchten. Dieser Umstand hat, wie wir schon bemerkten, sein Verhältnis zu Newton nicht verbessert. Als der Kurfürst als Georg I. 1714 wirklich den Thron Englands bestiegen hatte, blieb Leibniz doch nicht in seiner und seines Ministeriums Gunst bestehen, sondern verlebte die zwei letzten Jahre seines Lebens, ziemlich verlassen und zugleich körperlich leidend, in Hannover.

Leibniz' persönliche Eigenschaften und seine große Bedeutung in vielen Beziehungen, besonders als Philosoph, können wir hier nur berühren, insofern sie mit den Eigenschaften, die er als Mathematiker offenbarte, und mit den Arbeiten in Verbindung stehen, die er als solcher ausführte. Daß er wirklich in so vielen verschiedenen Beziehungen so hoch emporragen konnte, beruht zunächst auf der großen Geschmeidigkeit seines Geistes, die es ihm gestattete, seine Gedanken aus den verschiedenartigsten Gebieten zu holen, aber doch in eine gegenseitige, enge Verbindung zu bringen, sodann aber teils auf seinem spekulativen Tiefsinn, teils auf der zähen Ausdauer, mit welcher er bei unermüdlicher Arbeit seine Gedanken zur vollen Entwickelung brachte. Sein ungemeines Gedächtnis kam ihm hierbei zu gute.

Die eben erwähnte Geschmeidigkeit, zu deren Erwerbung sein diplomatischer Beruf und zu deren weiterer Entwickelung sein enges Verhältnis zu den Großen der Gesellschaft schon früh Veranlassung bot, konnte mitunter zwar als ein weniger günstiger Charakterzug auftreten; auf dem intellektuellen Gebiete aber gewann sie die allergrößte Bedeutung. Erstens war sie rezeptiver Natur. Leibniz sagt selbst, er habe wenig Menschen und wenig Bücher gefunden, aus denen er nicht verstanden hätte, Nutzen zu ziehen. Demnächst war er im stande, alles, was er so in sich aufgenommen hatte, dermaßen zu verarbeiten und seinem eigenen Gedankengange einzuverleiben, daß es ein Teil desselben und somit ihm selbst eigen wurde. Endlich ver-

mochte er den so entwickelten Gedanken eine Gestalt zu verleihen, in der sie verständlich waren und Früchte bringen konnten.

Diese Eigenschaften offenbaren sich in seinen irenischen Bemühungen auf dem kirchlichen Gebiete und in seiner Vermittelung so verschiedener Weltanschauungen, wie der teleologischen, in der alles durch den Zweck erklärt wird, dem es dient, und der modernen mechanischen. Er verarbeitete in sich die Anschauungen der verschiedenen Richtungen in einer solchen Weise, daß er das Berechtigte jeder einzelnen zu würdigen vermochte, und wußte mit großer Geschmeidigkeit die Formel zu finden, unter der sie sich schließlich vereinigen ließen. Indem er so überall das Beste aufsucht und die Gegensätze ausgleicht, gestaltet er sich zu dem Optimisten, der in der *Théodicée* nicht nur daran glaubt, daß alles in der Welt auf das Beste eingerichtet ist, sondern es auch beweisen will.

Ähnliche Eigenschaften haben wir bei ihm als Mathematiker kennen gelernt. Seine Rezeptivität zeigt sich in der Schnelligkeit, mit der er sich überall das Beste aneignet, was vor ihm in der Infinitesimalrechnung geleistet worden war, und tritt uns unmittelbar in der Art und Weise entgegen, auf die er in seiner Beantwortung des ersten Briefes Newtons es einerseits sogleich versteht, die von ihm nur angedeuteten Methoden zu gebrauchen, um die mitgeteilten Ergebnisse zu erweitern, andererseits gleich über dasjenige, was wirklich einer genaueren Erklärung bedarf, bei Newton Auskunft sucht. Bei diesen Untersuchungen geht es jedoch mit Leibnizens Einverleibung all des Angeeigneten in sein eigenes System so schnell, daß er ganz übersieht, wie weit es schon Barrow gebracht hatte, und bei den späteren Streitigkeiten sicher selbst nicht mehr wußte, wieviel er bei der Bildung seines Systems eigentlich Newton zu verdanken habe. Am schönsten offenbart sich hier Leibnizens Geschmeidigkeit in der Art und Weise, wie er es versteht, seine Methoden auch anderen unmittelbar anwendbar zu machen, worauf er mit vollem Bewußtsein abzielt.

Leibnizens Empfänglichkeit und Geschick, durch Bearbeitung des von anderen Empfangenen Neues zu leisten, erkennen wir auch in der Art und Weise, wie er in der Mechanik das Prinzip der lebendigen Kraft geltend macht. Schon früh war durch Descartes seine Aufmerksamkeit auf die mechanische Naturerklärung gelenkt worden; wenn aber Descartes durch sie zu dem Ergebnisse gelangte, daß die einmal existierende Bewegungsmenge, d. h. die Summe der Produkte der Massen in die Geschwindigkeiten, unverändert bestehen müsse, und dies durch den Zusammenstoß harter Körper bestätigt fand, so mußte Leibniz auf Grund der mathematischen Untersuchungen Huygens' über den Stoß elastischer Körper und die Zentrifugalkraft zu einer anderen Auffassung kommen. Huygens, wie teilweise

Galilei, geht davon aus, daß vielmehr die Summe der Produkte der Massen in die Fallhöhen, die ihre Geschwindigkeit hervorbringen würden, also, was wir heutzutage Energie nennen, oder die Summe der Produkte der Massen in die Quadrate der Schnelligkeiten, die Leibniz „lebendige Kraft“ nennt, unverändert bleibt. Leibniz kommt in rein mechanischer Beziehung nicht über das hinaus, was schon Huygens mit ebenso großer Klarheit erkannt hatte; das ihm Eigentümliche besteht aber darin, daß er den Satz auf alle Gebiete ausgedehnt wissen will. Wo sich nun seine Richtigkeit nicht unmittelbar mechanisch nachweisen läßt, wie beim Zusammenstoß nicht elastischer Körper, fühlt er sich davon überzeugt, daß die scheinbar verloren gegangene lebendige Kraft in den Schwingungen der Moleküle fortbestehen muß. Der Grund dieser seiner Überzeugung ist indes teleologischer Natur und geht auf seinen Glauben an die zweckdienliche Einrichtung der Welt zurück. Seine dreiste Behauptung selbst aber ist in der Tat die nämliche und ebenso weitgreifend, wie der Satz von der Erhaltung der Energie, den die Gegenwart durch den Nachweis der Umgestaltung der Energie aus der einen Form in die andere, in Bewegung, Wärme u. s. w., hat beweisen können. Ja, Leibniz geht sogar noch weiter, indem er ihn durch Analogie auch auf geistige Verhältnisse übertragen will.

Wir haben hier ein Beispiel von dem Streben Leibnizens, dem, was sich bei gewissen mathematischen Untersuchungen als nützlich erwiesen hat, eine viel allgemeinere und umfassendere Bedeutung zu geben. Ja, eben durch diese Verallgemeinerung, durch die Aufstellung bestimmter Regeln für gewisse Operationen, die alle diejenigen in sich befassen, welche die Mathematik bisher einzeln zur Lösung scheinbar verschiedener Aufgaben angewendet hatte, gewann Leibniz die große Bedeutung, die er als Mathematiker hat, und zwar nicht nur durch dasjenige, was er auf diese Weise selbst leistete, sondern auch durch das Beispiel, das er den Mathematikern späterer Zeiten gab. Wie wir schon oben an seiner Erweiterung des Begriffes der lebendigen Kraft sahen, erstrecken sich indes seine Verallgemeinerungen, oder wenigstens seine diesbezüglichen Versuche, oft weit über die Grenzen der Mathematik hinaus. Ganz besonders durch die sofortige Annahme allgemeinerer Gesichtspunkte vermag sich Leibniz, wie erwähnt, Fremdes zu eigen zu machen. Dies Verallgemeinerungsstreben selbst, ja, sogar das Streben nach gemeinschaftlichen Regeln für geistige Arbeit jedweder Art findet sich bei ihm schon sehr früh, schon lange, bevor er es von anderen hätte übernehmen können, und tritt bereits in seinen allerersten Schriften zu Tage.

Damals und viel später noch war er sogar bemüht, diesen Regeln in einer allgemeinen Zeichensprache Ausdruck zu verleihen, welche der algebraischen entsprechen sollte, deren Anwendbarkeit er frühzeitig in der ent-

wickelten Gestalt kennen gelernt hatte, die ihr Descartes gegeben. Wie dieser mit Gleichungen operiert, durch deren Umformung und Kombination er dann neue Gleichungen bildet, so sollte man nun in der Logik mit Identitäten operieren. Es dürfte damit jedenfalls in Zusammenhang stehen, daß Leibniz an Stelle des Satzes vom Widerspruch, der in der aristotelischen Logik der *reductio ad absurdum* der antiken Geometrie gleichgestellt werden kann, das Identitätsprinzip einführte, das der mathematischen Operation mit Gleichungen entspricht. Leibniz brachte allerdings die Bildung seiner allgemeinen logischen Operationssprache nicht vollständig zur Ausführung. Indes gelang es ihm doch, in der Schrift *Characteristica geometrica,* was die synthetische Geometrie betrifft, eine solche Sprache zu bilden; daß er aber auch für die Infinitesimaluntersuchungen eine Zeichensprache herstellte, die nicht nur den nötigen Überblick zu verleihen vermochte, sondern bei festen Rechenregeln auch in den Händen anderer leicht zu handhaben war, ist in der angeführten Richtung die wertvollste Frucht seiner weitgreifenden Bemühungen. Übrigens mag bemerkt sein, daß, wenn heutzutage auch seine allgemeineren Bemühungen zu gelingen scheinen, dies — welche Bedeutung man auch dem angestrebten Ziele selbst beilegen will — teilweise darauf beruhen dürfte, daß man sich jetzt nicht damit begnügt, durch Zeichen Identitäten, die ja Gleichungen entsprechen, darzustellen und mit ihnen zu operieren, sondern auch solche Urteile berücksichtigt, welche aussagen, daß eine gewisse Klasse in einer anderen allgemeineren Klasse inbegriffen ist, und so den mathematischen Ungleichheiten entsprechen.

Weiterhin macht Leibniz sowohl innerhalb als außerhalb der Mathematik das Stetigkeitsprinzip geltend. Daß gerade er in der Mathematik auf die Stetigkeit Gewicht legen muß, ist natürlich, da die stetige Variation einer Funktion die notwendige — wenn auch nicht, wie wir jetzt wissen, hinreichende — Bedingung ihrer Differentiierung ist, und da überhaupt jede Bestimmung des Grenzwertes einer Größe darauf beruht, daß sie stetig variiert. Dieselbe Stetigkeit, d. h. allmähliche Übergänge ohne Sprünge müssen sich auch in der Natur finden, wenn die Mathematik auf sie anwendbar sein soll, und Leibniz, der an die Harmonie und Vernunft der Natur glaubt, will sie auch überall finden. Was im allgemeinen von einem Körper in Bewegung gilt, muß auch gelten, wenn seine Geschwindigkeit gleich Null ist oder er in Ruhe ist, und, was von dem Zusammenstoß zweier beliebiger, ungleich großer Kugeln gilt, muß auch gelten, wenn die Kugeln gleich groß werden u. s. w.

Die Größen, Eigenschaften und Gesetze, denen wir Stetigkeit beimessen, können offenbar nicht zusammengesetzt sein, denn alle Grenzbestimmungen innerhalb derselben würden dann willkürlich sein. Die Welt ist indessen

zusammengesetzt. Dadurch kommt Leibniz auf seine Monadenlehre, die Lehre von den Einzelwesen. Auf die Eigenschaften, die er diesen Monaden zuspricht, können wir uns hier nicht weiter einlassen. Wir wollen nur, um einem Mißverständnis vorzubeugen, zu dem man sich vielleicht versucht gefühlt hat, hervorheben, daß seine Monaden insofern zu den Differentialen einen Gegensatz bilden, als sie eine bestimmt abgegrenzte Individualität besitzen, während die Begrenzung des Differentials innerhalb des Kontinuums, dem es entnommen wird, fließend ist. Etwas anderes ist es, daß einerseits das Differential, indem es eine Bezeichnung erhält, in der Rechnung als individuelle Größe auftritt, und daß andererseits Leibniz auch unter den Monaden eine gewisse Stetigkeit festzustellen sucht, indem er annimmt, daß sie selbst eine so unendlich dicht aufeinander folgende Reihe oder Schar ausmachen, daß man ohne Sprung von den Eigenschaften der einen auf die der anderen übergehen kann, ohne daß doch die eine deshalb der anderen durchaus gleich wird.

Als Gelehrte, die sogleich die Infinitesimalrechnung Leibnizens in Anwendung brachten und dadurch ihre Entwickelung förderten, die ferner unmittelbar zur Ausarbeitung der Methoden selbst beitrugen und sie endlich verbreiteten und zahlreichen Nachfolgern überlieferten, haben wir schon die Brüder Bernoulli genannt. Sie sind zusammen zu nennen, nicht nur, weil der ältere Jakob, der zuerst dieser Methoden habhaft wurde, der Lehrer des jüngeren Johann war, sondern auch, weil sie gewissermaßen auch dann noch gemeinschaftlich arbeiteten, als der heftige Streit zwischen ihnen zum öffentlichen Ausbruch gekommen war, indem jeder von ihnen vor allem darauf abzielte, den Bruder in der Behandlung derselben Gegenstände zu übertreffen.

Die Bernoullis gehörten einem protestantischen Geschlecht an, das während Albas Religionsverfolgung in den Niederlanden nach Basel gekommen war. Hier war der Vater Ratsherr. Jakob B. (1654—1705) ward zuerst auf Wunsch seines Vaters Theologe, studierte aber daneben heimlich Mathematik. Auf einer Reise, die er 1676 antrat, kam er u. a. nach Bordeaux, wo er sich als Hauslehrer ernährte. Hier arbeitete er Sonnenuhrtabellen aus. 1681 war er wieder in Basel und schrieb eine Kometentheorie. Auf einer Reise in die Niederlande und nach England wurde er sodann mit den dortigen Mathematikern bekannt. Nach der Zurückkunft hielt er in Basel Vorlesungen über Experimentalphysik und wurde 1687 an der Universität Professor der Mathematik. Aus dieser Stellung hätte er 1691 wegen freimütiger Aufdeckung einiger Mißbräuche beinahe seinen Abschied bekommen. 1687 studierte er einen mechanischen Aufsatz von Leibniz aus dem Jahre 1684 und fühlte sich dadurch veranlaßt, bei

ihm selbst brieflich wegen seiner neuen Methode anzufragen; der Brief erreichte indes Leibniz erst nach seiner Zurückkunft nach Hannover im Jahre 1690; damals hatte sich aber Jakob B. schon selbst geholfen und in einem Aufsatze in den *Acta Eruditorum*, in dem zum ersten Male das Wort „Integral" vorkommt, die betreffenden Methoden auf die isochrone Kurve angewendet. Er fuhr dann fort, sie in verschiedenen Aufsätzen auf den einen und anderen Gegenstand sowohl aus dem Gebiete der Geometrie als aus dem der Mechanik anzuwenden. Unter seinen Schülern sind außer dem Bruder Johann auch Nikolaus Bernoulli, der Sohn eines anderen Bruders, und Paul Euler, der Vater des großen Mathematikers Leonhard Euler, zu nennen. Da in dem Streite zwischen den Brüdern der Behauptung des einen sogar in Bezug auf Tatsachen die des anderen oft geradezu widerspricht, so muß hervorgehoben werden, daß sich Jakob B. das Lob der Offenheit und Wahrheitsliebe erwarb, wiewohl auch er durch seine Heftigkeit und Reizbarkeit, die in späteren Jahren mit seiner schwachen Gesundheit verbunden waren, zur Verbitterung des Streites beitrug.

Johann Bernoulli (1667—1748) bildete sich anfangs als Kaufmann aus, warf sich aber später unter seinem Bruder auf das Studium der Mathematik und auf dessen Rat auch auf das der Medizin, in der er 1690 Lizentiat wurde. Dann ging er auf Reisen und hielt sich besonders in Paris auf, wo er sowohl studierte als unterrichtete. Einer seiner Schüler war hier der schon erwähnte, etwas ältere Marquis de L'Hospital, für den er jedenfalls eine Integralrechnung niederschrieb, die er aber erst 1742 herausgab. Die lose Beschuldigung, die Johann Bernoulli lange nach dem Tode de L'Hospitals gegen diesen richtete, als ob er ihn in seiner Darstellung der Differentialrechnung in der *Analyse des infiniment petits* ausgeschrieben habe, haben wir (S. 41) erwähnt; ebenso (S. 34), daß ihm durch Varignon das Journal des Savants zugänglich war.

1692 kehrte Johann Bernoulli nach Basel zurück, wo er 1694 Dr. med. wurde. Im Jahre darauf bekam er auf die Empfehlung Huygens' hin in Gröningen eine Anstellung als Professor der Physik. 1705 kehrte er wiederum nach Basel zurück, wo ihm durch Vermittelung seines Schwiegervaters vorläufig der Gehalt als Professor des Griechischen zugesichert worden war, wo er aber in demselben Jahre nach dem Tode seines Bruders die mathematische Professur übernahm. In dieser Stellung bildete er zahlreiche und hervorragende Schüler heran, darunter seine eigenen drei Söhne und vor allem Leonhard Euler. Diese Professur hatte er bis zu seinem Tode inne.

Von Johann Bernoulli als Arzt rühren wertvolle physiologische Arbeiten her; am meisten Bedeutung haben aber seine zahlreichen mathe-

matischen Aufsätze, die in den *Acta Eruditorum*, dem *Journal des Savants* und anderen Zeitschriften zerstreut sind. Wie die des Bruders, tragen auch sie dazu bei, der Differential- und Integralrechnung Form und Inhalt zu geben und das Gebiet ihrer Anwendung zu erweitern. Die Arbeiten der beiden Brüder sind 1742 und 1744 von Cramer gesammelt und herausgegeben worden. Beide, besonders Johann, wurden Mitglieder der meisten wissenschaftlichen Gesellschaften und standen mit den bedeutendsten Mathematikern aller Länder in Verbindung.

Der Streit zwischen den Brüdern entstand in den Jahren 1694—95, bevor Johann nach Gröningen übersiedelte, und hatte seine Ursache neben rein persönlichen Verhältnissen vielleicht in gegenseitigem Neid und in des jüngeren Bruders unzuverlässigem Hervorheben eigener Verdienste auf Kosten des älteren; dieser, Jakob Bernoulli, allerdings brachte den Streit in einer Abhandlung in den *Acta Eruditorum* (1695) zuerst vor die Öffentlichkeit, indem er seinen Bruder sehr stark angriff und über seine Arbeiten spottete. 1696 stellte Johann die Aufgabe über die brachistochrone Kurve, d. i. über den kürzesten Weg, auf welchem ein schwerer Körper am schnellsten von einem Punkte auf einen nicht senkrecht unter ihm liegenden anderen herabfällt. Diese Aufgabe, die auch Leibniz interessierte, und von der wir bei Gelegenheit seines Streites mit Newton (S. 72) redeten, löste Jakob 1697, indem er unter erneuter Verhöhnung des Bruders eine weit allgemeinere Aufgabe anschloß, die das sogenannte isoperimetrische Problem betraf. Seine Versuche, die Aufgabe zu lösen, begleitete Johann mit Schmähungen und Unwahrheiten; Jakob kritisierte nach und nach diese nicht durchaus glücklichen Versuche und gab dann 1701 die vollständige Lösung in einem Aufsatze, der in ruhigerer Form gehalten war und durch seinen Inhalt den ersten Schritt zu der späteren Variationsrechnung tat. Johann gab erst lange nach dem Tode des Bruders die begangenen Fehler zu. Seinen Neid gegen wissenschaftliche Verdienste anderer nahm er übrigens Gelegenheit sogar einem seiner Söhne gegenüber zu bekunden.

Durch die von ihnen herausgegebenen Arbeiten und durch den Unterricht, den sie an verschiedenen Orten, besonders in ihrer Heimat, u. a. auch einigen der Gelehrten innerhalb und außerhalb der Familie erteilten, welche in der nächsten Generation die Mathematik vertreten sollten, hatten die Brüder Bernoulli die Stellung der Differential- und Integralrechnung Leibnizens als das Hauptorgan infinitesimaler Untersuchungen gesichert, mit welchem zugleich die entwickeltsten mechanischen Regeln für alle Operationen, die sich dadurch bewerkstelligen lassen, gegeben waren, und dessen Anwendbarkeit auf eine große Reihe von Gebieten man kennen gelernt hatte. Allerdings trat nun auch Newtons Fluxionslehre, deren Bezeich-

nungen vielleicht an und für sich ebenso brauchbar sind wie die Leibnizschen, in seiner spät herausgegebenen *Methodus fluxionum* an die Öffentlichkeit; auch seine Methode wurde nun von mehreren seiner Landsleute weiter bearbeitet, und ihre Brauchbarkeit durch hervorragende Anwendungen bewährt. Es war aber zu spät. Die Differential- und Integralrechnung hatte schon als diejenige Form der Infinitesimalrechnung, deren Anwendung alle Mathematiker erlernen mußten, und die sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat, den Sieg davongetragen.

Dieses gewaltige Organ eröffnete eine neue Zeit in der Geschichte der Mathematik durch die Menge neuer Aufgaben, deren Behandlung es ermöglichte; einerseits zogen seine festen Regeln einen stets wachsenden Kreis von Gelehrten an die mathematische Arbeit heran, andererseits nahm die fernere Entwickelung der hierher gehörenden Methoden auf neue Art und Weise die Arbeit der bedeutenderen Mathematiker in Anspruch.

II.

Die Analyse des Endlichen.

1. Die algebraische Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades.

Die Frage nach der Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades mußte sich, wie wir („Altertum und Mittelalter") erörtert haben, ganz naturgemäß schon im Altertum erheben. Neben Aufgaben, die algebraisch auf Gleichungen 2. Grades zurückgingen, mußte man auch auf solche stoßen, die auf Gleichungen 3. Grades führten. Auch lag es nahe, von der Darstellung durch Flächen, vermittelst welcher man die ersteren behandelte, den Übergang zu entsprechenden Operationen mit Raumgebilden, besonders Parallelepipeden, zu versuchen. Ein besonderer Umstand bewirkte indes, daß die Frage nach der algebraischen Lösung solcher Aufgaben entweder überhaupt nicht erst entstand oder doch schnell wieder zurückgedrängt wurde; ja, wäre auch die algebraische Lösung damals gelungen, so wäre doch dadurch allem Anschein nach nicht viel gewonnen gewesen. Es zeigte sich nämlich, als sie im 16. Jahrhundert wirklich gefunden wurde, daß sie entweder — wie zu erwarten war — auf die Kubikwurzelausziehung oder auf einen gewissen Gebrauch trigonometrischer Tafeln zurückführt. In der geometrischen Form, welche die Aufgaben in der geometrischen Algebra der Alten — an der man im 16. Jahrhundert teilweise festhielt — annehmen mußten, stellt sich nun die Kubikwurzelausziehung als eine Lösung des delischen Problems oder als eine Bestimmung zweier geometrischen Mittel, der hier berührte Gebrauch der Trigonometrie aber als eine Dreiteilung des Winkels dar. Man war im Altertum natürlich froh, neue Aufgaben auf diese, mit denen man sich so eingehend beschäftigt hatte, zurückführen zu können, und Beispiele von Zurückführung anderer Aufgaben auf Kubikwurzelausziehung liegen tatsächlich vor. Das Interesse an allgemeinen Regeln für eine solche Zurückführung mußte indessen schwinden, als man bemerkte, daß dieselben Hilfsmittel, die man zur Lösung dieser Aufgaben anwendete, besonders der Gebrauch von Kegelschnitten, sich auch unmittelbar auf die Aufgaben selbst anwenden ließen,

die man sonst auf sie zurückzuführen wünschte. Der Gedanke an eine allgemeine Zurückführung einer gewissen Klasse von Aufgaben auf die Dreiteilung des Winkels ist wahrscheinlich gar nicht aufgekommen.

Die Araber fuhren fort, die Aufgaben, die von Gleichungen 3. Grades abhingen, mittelst der Kegelschnitte zu behandeln, nicht zum wenigsten im Anschluß an ein von Eutokius dem Archimedes zugeschriebenes Manuskript (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 186). Es findet sich darin bekanntlich die Lösung einer Gleichung 3. Grades mittelst der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte und der aus ihr folgende Diorismus. Die Araber gingen in Aufstellung und Klassifikation von Gleichungen weiter, deren algebraische Lösung für sie und ihre Nachfolger in Europa eine Bedeutung hätte haben können, die sie freilich für die Griechen nicht haben konnte. Berechnung von Kubikwurzeln war nämlich eine arithmetische Operation, mit der man allmählich besser vertraut wurde; die algebraische Zurückführung von Gleichungen 3. Grades auf rein kubische Gleichungen war also fortan als ein grosser Gewinn zu betrachten. Allerdings haben es sowohl Leonardo von Pisa als etwas später Ulûg Beg oder sein Kreis*) in Ermangelung einer solchen algebraischen Auflösung verstanden, die numerischen Annäherungen unmittelbar auf Gleichungen 3. Grades anzuwenden; es finden sich aber auch Anzeichen, daß man wenigstens bestrebt war, algebraische Auflösungen zu finden.

Einer dieser mißlungenen Versuche hat dadurch besonderes Interesse, daß er uns deutlich kundgibt, worin die Schwierigkeit bestand, eine solche Auflösung zu finden, oder vielmehr, worin sie nicht bestand. In einem italienischen Manuskript aus dem 14. Jahrhundert wird die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx = k$$

durch

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{k}{a}} - \frac{c}{b}$$

gelöst, was nur richtig ist, wenn $b^2 = 3ac$. Diese Gleichung zeigt deutlich, daß in den Fällen, in denen sich, wie die Gleichung 2. Grades auf eine rein quadratische, so die Gleichung 3. Grades durch eine einfache Änderung der Unbekannten — hier, indem man $x + \frac{c}{b}$ oder $x + \frac{b}{3a}$ als Unbekannte wählt — wirklich auf eine rein kubische zurückführen läßt, dies keine Schwierigkeiten darbot. Diese Änderung, die in der damals gebräuchlichen geometrischen Darstellung zunächst einer Verlegung des Anfangspunktes

*) Es ist kaum berechtigt, wie wir „Altertum und Mittelalter", S. 310 getan, aus diesem Kreise besonders den Arzt Al-Kâschî als Verfasser der dort erwähnten Ausrechnung herauszugreifen.

gleichkommt, kann im allgemeinen zur Wegschaffung des x^2 enthaltenden Gliedes oder, wenn man die nämliche Form vorzieht, die Archimedes seiner Gleichung 3. Grades gibt (Altertum u. Mittelalter, S. 217), zur Wegschaffung des x enthaltenden Gliedes verwertet werden. Eine solche Änderung läßt sich sogar ganz vermeiden, indem man sogleich eine passende Wahl der Unbekannten trifft, und auf eine solche Wahl mußte man damals, wie es schon Diophant tat, um so größeres Gewicht legen, je weniger Mittel man besaß, um die algebraischen Schwierigkeiten zu überwinden, die von komplizierteren Gleichungsformen herrührten.

Auf diese Weise wird es verständlich, daß man, als endlich die Auflösung von Gleichungen 3. Grades gefunden wurde, sein Hauptaugenmerk namentlich auf die Regeln richtete, die zur Auflösung der verschiedenen Gleichungen von der Form

$$x^3 + ax + b = 0$$

dienen, welche durch verschiedene Vorzeichen von a und b entstehen. Die Reduktion einer Gleichung mit vier auf eine solche mit drei Gliedern lag, wie wir sahen, den damaligen Mathematikern nicht fern, wenn auch erst Cardano als derjenige, der in der *Ars magna* eine zusammenhängende Behandlung von Gleichungen 3. Grades unternahm, für diese Reduktion allgemeine Regeln aufgestellt hat. Die Lösung der oben stehenden trinomischen Gleichung hatte er dagegen der Mitteilung Tartaglias und den hinterlassenen Papieren Scipio Ferros zu verdanken.

Die Mitteilungen, die Cardano mit so viel Aufdringlichkeit Tartaglia entlockte (S. 6), gingen dahin, daß, wenn wir mit a und b positive Größen bezeichnen, einerseits die Gleichung

$$x^3 + ax = b \tag{1}$$

gelöst wird, indem man erst u und v so bestimmt, daß

$$u - v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

wird, wodurch u und $-v$ Wurzeln einer Gleichung 2. Grades werden, und dann

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

setzt; daß aber andererseits die Gleichung

$$x^3 = ax + b \tag{2}$$

gelöst wird, indem man

$$u + v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

annimmt, dann aber

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$$

setzt. Über die Gleichung

$$x^3 + b = ax \tag{3}$$

teilte Tartaglia nur mit, daß sie durch (2) zu lösen sei.

Hervorzuheben ist, daß diese Mitteilungen, die nur in Worten, noch dazu in Versen, ausgedrückt sind, nicht etwa über irgend eine der mehr oder minder verschiedenen Methoden Auskunft geben, durch die man die Lösung von Gleichungen 3. Grades finden kann; sie bieten einfach die Lösung, besagen also lediglich — was man jetzt durch eine explizite Formel tun würde —, wie die Wurzel als Differenz oder Summe der Kubikwurzeln (der absoluten Werte) der Wurzeln in einer Gleichung 2. Grades dargestellt werden kann. Somit handelt es sich hier gar nicht um die Erfindung einer Methode, sondern um eine Entdeckung, nämlich der Form der Irrationalität, welche die Wurzeln der betreffenden Gleichungen haben müssen, ohne daß wir erfahren, auf welchem Wege die Auflösung überhaupt gefunden sein mag. Wenn nun Scipio Ferro Gleichung (1) gelöst haben soll und Fiore (1535) eben auf Grund der Kenntnis dieser Auflösung Tartaglia zu einem Wettkampf herausforderte, so muß er offenbar genau dieselbe Auflösung besessen haben; es gibt ja außer ihr keine zweite. Auch kann von einer partiellen Kenntnis dieser Auflösung nicht gut die Rede sein; denn die Beispiele Fiores führen zu irrationalen Lösungen, und alle solche Fälle müssen ganz gleich behandelt werden. Übrigens sagt auch Cardano, er habe in den Papieren Ferros dieselbe Auflösung gefunden, die ihm Tartaglia mitgeteilt.

Scipio Ferro ist also der erste Entdecker, und Tartaglia, der sich früher ohne sonderlichen Erfolg mit Gleichungen 3. Grades beschäftigt hatte, fand die Auflösung aufs neue, aber erst, nachdem er erfahren hatte, daß Gleichungen von der Form (1) wirklich lösbar seien. Es wäre dagegen unberechtigt, aus der Übereinstimmung der Lösungen zu schließen, Tartaglia habe Ferros Auflösung selbst gekannt; denn, wenn sie überhaupt beide die Gleichungen lösen konnten, so ist diese Übereinstimmung, wie gesagt, eine Notwendigkeit.

Es kann nicht wundernehmen, daß Tartaglia, sobald er Gleichung (1) gelöst hatte, die damit völlig gleichartige Auflösung der Gleichung (2) fand. Weit mehr muß es uns wundern, daß Ferro, wie alle vorliegenden Andeutungen und die Beschaffenheit der Aufgaben bezeugen, die Fiore durch seine Formel zu lösen vermochte und dem Tartaglia stellte, nicht auch Regeln für die Auflösung von Gleichungen dieser Form gegeben hat. Dies kann wenigstens folgende Ursache haben. Die Gleichungen

$$u + v = b, \quad uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3,$$

durch welche Gleichung (2) von Tartaglia gelöst wurde, und zu denen die Übereinstimmung mit Gleichung (1) ganz naturgemäß führen mußte, werden nämlich unmöglich, wenn

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Heutzutage braucht man freilich auf diese Unmöglichkeit keine weitere Rücksicht zu nehmen, weil auch imaginäre Wurzeln als Wurzeln gelten. Dagegen bestand man, wie im Altertum, in dessen Schriften man mehr und mehr eindrang, so damals noch darauf, daß die Auflösung einer Aufgabe von begrenzter Möglichkeit mit einem Diorismus oder einer Möglichkeitsbedingung verknüpft sei, die für die hier gebildete Gleichung 2. Grades lauten würde

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Daß sich die nämliche Bedingung jedoch nicht als Diorismus oder Möglichkeitsbedingung für die positive Wurzel der Gleichung (2)

$$x^3 = ax + b$$

aufstellen läßt, war nicht schwer einzusehen in einer Zeit, da man sich so viel mit diesen Gleichungen beschäftigte. Unter dergleichen Verhältnissen stellt man in der Regel mit Zahlenbeispielen Versuche an, und das lag um so viel näher, als man die Gleichungen damals nur noch in Worten aussprach und noch nicht die Rede davon war, für die bekannten, aber beliebigen Größen, die wir hier z. B. a und b nennen, besondere Bezeichnungen einzuführen. Die Gleichung hat eine positive Wurzel, und nur diese suchte man im wesentlichen, mochte nun $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a}{3}\right)^3$ sein oder nicht. Letzterer Fall wird gewöhnlich als der irreduzible Fall bezeichnet, weil die Auflösung der Gleichung 3. Grades sich dann nicht auf eine Gleichung 2. Grades zurückführen läßt.

Die von Tartaglia aufgestellte Lösung der Gleichung (2) ist demnach unvollständig, in einigen Fällen brauchbar, in anderen nicht. Dies mag möglicherweise Ferro gehindert haben, seinerseits eine solche Lösung aufzustellen. Tartaglia hingegen, der sich früher der Auflösung von Gleichungen gerühmt hatte, die er damals höchstens in ganz speziellen Fällen zu behandeln vermochte, trug, nachdem er die Lösung gefunden hatte, die er später Cardano mitteilte, kein Bedenken, ohne Hinzufügung irgend welcher Einschränkung zu behaupten, er könne die Gleichung (2) lösen. Als der begabte Mathematiker, der er nach allem, was von ihm und über ihn vorliegt, sicherlich war, muß er indessen bald bemerkt haben, daß seine Lösung nicht immer anwendbar sei.

Diese Bemerkung und das dadurch notwendigerweise hervorgerufene Streben, die vollständige Auflösung zu finden, haben ihn nicht zum Ziele geführt, woraus es sich ganz natürlich erklärt, daß uns keine Ergebnisse dieses seines Strebens vorliegen. Die unüberwundene Schwierigkeit war für ihn, mögen daneben noch andere Ursachen bestanden haben oder nicht, der unverwerfliche Grund, die Ausarbeitung des Werkes über die Gleichungen 3. Grades, in welchem er selbst die Entdeckungen mitteilen wollte, die nun zu seinem großen Ärgernis Cardano in der *Ars magna* vor die Öffentlichkeit brachte, wieder und wieder aufzuschieben. Daß sich seine Furcht, Cardano möge ihm zuvorkommen, besonders auf den irreduziblen Fall bezog, deutet der Umstand an, daß er Cardano gegenüber sogleich verstummte, als dessen unablässig fortgesetzte Fragen anfingen, diesen Punkt zu berühren. In dieser Beziehung brachte es übrigens Cardano nicht einmal weiter als er.

Derselbe irreduzible Fall tritt in anderer Weise in der dritten Klasse von Gleichungen auf:

(3) $$x^3 + b = ax.$$

Tartaglia teilt hierüber, wie erwähnt, nur mit, daß sie durch die Gleichung (2) lösbar sei. Auf welche Weise aber diese Gleichung zu benutzen sei, bekommt weder Cardano noch wir zu wissen; ihre Anwendung knüpfte aber sicher irgendwie an die Verbindung an, welche zwischen den beiden Gleichungen insofern besteht, als die Wurzeln der einen mit entgegengesetzten Vorzeichen denen der anderen gleich sind. Nun vermochte man allerdings zu jener Zeit, so wie hier und da schon früher, die Bedeutung negativer Wurzeln zu erklären, und wir werden sehen, daß Cardano sogar den Vorteil ihrer ausdrücklichen Berücksichtigung erkannte; im allgemeinen vermied man sie aber lieber und brachte Aufgaben, die sich durch die negativen Wurzeln der Gleichung (2)

$$x^3 = ax + b$$

lösen ließen, lieber auf eine derartige Form, daß sie durch die positiven Wurzeln der Gleichung (3)

$$x^3 + b = ax$$

gelöst wurden.

Nun hat Gleichung (2) in dem reduziblen Falle $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{3}\right)^3$ nur eine reelle Wurzel, und diese ist positiv. In dem irreduziblen Falle $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ hat sie dagegen zugleich zwei negative Wurzeln, Gleichung (3) also zwei positive Wurzeln. Die Bedingung $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ aber, die, wenn man nur

positive Wurzeln berücksichtigt, für Gleichungen von der Form (2) nur die Grenze zwischen denjenigen bildet, die durch Tartaglias Formel gelöst werden können oder nicht können, gibt für Gleichung (3) eine wirkliche Möglichkeitsgrenze, einen Diorismus von gleicher Art ab, wie er in der oben erwähnten, von Eutokius gefundenen Handschrift aufgestellt wird. Diese jetzt allgemein bekannten Dinge erhellen aus Cardanos unten angeführter Behandlung der Aufgabe (3).

Auf welchem Wege Tartaglia das Nämliche gefunden, wissen wir nicht; wenn er jedoch in seinen späteren Schriften einmal die Lösung einer Maximalaufgabe angibt und ausdrücklich hinzufügt, daß sie mittelst der neuen Algebra gefunden sei, so kann er dazu kaum etwas anderes als die hier besprochene Möglichkeitsgrenze benutzt haben. Solche Möglichkeitsgrenzen waren nämlich noch immer das einzige Mittel zur Auflösung von Maximalaufgaben, und in der Behandlung der trinomischen Gleichungen 3. Grades trifft man keine anderen dazu geeigneten Diorismen. Diese Vermutung wird auch völlig durch die Form bestätigt, in der Tartaglia die Lösung seiner Aufgabe angibt.

Tartaglias Aufgabe bezweckt die Teilung von 8 in zwei solche Teile, daß ihr Produkt mal ihre Differenz ein Maximum wird. Seine Lösung lautet: „8 soll durch 2 dividiert werden; das Quadrat der Hälfte, vermehrt um das Drittel dieses Quadrats, soll sodann dem Quadrat der Differenz der beiden Teile gleich sein“. Die ausdrückliche Angabe, wie diese Differenz zu bestimmen ist, zeigt, daß er sie selbst in seiner Lösung als Unbekannte betrachtete. Nennen wir sie x und vertauschen wir die Zahl 8, die offenbar eine beliebige Zahl vertreten soll, mit a, so sind $\frac{a}{2} - \frac{x}{2}$ und $\frac{a}{2} + \frac{x}{2}$ die Teile, und

$$x\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

soll ein Maximum sein. Nennen wir es m, so erhalten wir die Gleichung

$$x^3 + 4m = a^2x,$$

die eben die Form (3) hat; die Möglichkeitsgrenze $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ ergibt hier $(2m)^2 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3$, und nun wird die Gleichung gelöst durch

$$x^2 = \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{4},$$

wie Tartaglia angibt. Die Form, in der es geschieht, kann mit der uns unbekannten Art seiner Behandlung der Gleichung (3) in Zusammenhang gestanden haben.

Dagegen liegt die Art und Weise, wie Cardano Tartaglias An-

weisung, Gleichung (3) durch Gleichung (2) zu lösen, befolgte, in der *Ars magna* offen vor uns. In etwas verkürzter Gestalt kann sie folgendermaßen wiedergegeben werden: die Gleichung

(3) $$x^3 + b = ax$$

soll durch Gleichung (2) gelöst werden, deren (positive) Wurzel also als bekannt anzunehmen ist. Nennen wir sie y, so hat man

(2′) $$y^3 = ay + b.$$

Hieraus wird, wenn auch bei Cardano viel weitschweifiger,

$$x^3 + y^3 = a\,(x + y)$$

und durch Kürzung mit $x + y$

$$x^2 - xy + y^2 = a$$

abgeleitet, woraus sich schließlich

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4} y^2}$$

ergibt.

Als allgemeine Auflösung der Gleichung (3) betrachtet, ist die hier dargestellte allerdings illusorisch. Es wird die Kenntnis einer Wurzel der Gleichung (2′) vorausgesetzt; wenn diese aber brauchbare Wurzeln der Gleichung (3) ergeben soll, muß $y \leqq \sqrt{\frac{4}{3} a}$ sein. Ist aber $y < \sqrt{\frac{4}{3} a}$, so hat man, wie durch Einsetzung in (2′) ersichtlich, $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$, also eben den irreduziblen Fall, in welchem y aus (2′) nicht gefunden werden kann. Die Anwendbarkeit der Methode zu wirklicher Lösung beschränkt sich sodann auf den Fall, in welchem $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, und auf solche Fälle, in denen in (2′) schon irgendwie eine Wurzel bekannt ist. Ein Fall ersterer Art liegt der soeben besprochenen Maximalbestimmung Tartaglias zu Grunde. Von Fällen, in denen in (2′) eine Wurzel bekannt ist, die $< \sqrt{\frac{4}{3} a}$, gibt Cardano verschiedene Beispiele, was übrigens leicht genug ist, da er selbst Gleichungen aufstellen konnte, so daß sie eine bestimmte Wurzel haben mußten.

Was jedoch in hohem Grade unsere Aufmerksamkeit verdient, das sind teils die allgemeinen Ergebnisse, zu denen Cardano kommt, teils die angewandte Methode und, was diese ihn lehrt.

Auch da, wo Cardano die positive Wurzel in Gleichung (2′) nicht findet, weiß er von ihrer Existenz Bescheid. Wenigstens hat er in einer späteren Schrift, die, jedoch unter Hinzufügung des Wortes *arithmeticae*, gleichfalls *Ars magna* heißt, einen noch allgemeineren Satz aufgestellt, der besagt, daß eine Gleichung, in der alle Glieder, die auf der linken Seite stehen, von höherem Grade sind als die-

jenigen, die auf der rechten Seite stehen (alle Glieder auf der Seite geschrieben, wo sie positiv werden), eine und zwar nur eine positive Wurzel hat. Diese Verallgemeinerung eines Satzes, die er erst bei den Gleichungen 3. Grades (1) und (2) bemerkt und benutzt haben mag, kann eben in diesem Zusammenhange leicht gefunden worden sein. Sie ist eine Folge davon, daß das Verhältnis $\frac{ax^m}{bx^n}$, wo $m > n$, zwischen einem Glied auf der linken und einem Glied auf der rechten Seite mit zunehmendem (und positivem) x zunimmt, eine Folge, die ein Mann, der sich so viel mit Zahlenbeispielen von Gleichungen beschäftigte, wohl hat entdecken können, wenn es ihm auch an Mitteln gebrach, einen strengen Beweis zu führen.

Die von Cardano bei seiner Lösung der Gleichung (3) angewendete Gleichung (2′) hat also immer eine und zwar nur eine positive Wurzel y; Cardano kann also ausdrücklich $-y$ als negative Wurzel (ficta) der Gleichung (3) aufstellen. Außer dieser findet er, wie wir sehen, daß es in dem irreduziblen Falle noch 2 positive Wurzeln gibt; und die sie bestimmende Gleichung entsteht gerade durch Division mit $x + y$ oder mit der Differenz zwischen x und der bekannten Wurzel $-y$, eine Methode, deren Entwickelung wir im 3. Abschnitt weiter verfolgen werden. Aus der entstehenden Gleichung 2. Grades ersieht man ferner, daß der Zahlenwert y der negativen Wurzel der Summe der positiven Wurzeln gleich ist. Dies bemerkt Cardano ausdrücklich; indem er dann den Umstand, daß im Grenzfalle $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ die einzige positive Wurzel $x = \frac{y}{2}$ ist, als einen Spezialfall hiervon auffaßt, offenbart er dadurch die richtige Auffassung einer Doppelwurzel. Da die Gleichungen (2) und (3) durch Vertauschung der Vorzeichen der Wurzeln auseinander entstehen, so bemerkt Cardano auch, daß Gleichung (2) in dem irreduziblen Falle 1 positive und 2 negative Wurzeln hat, deren (numerische) Summe der positiven gleich ist.

Diese Ergebnisse sind Cardano so geläufig, daß er sie auch auf allgemeine Gleichungen 3. Grades oder wenigstens auf solche überträgt, in denen das Glied 2. Grades das entgegengesetzte Vorzeichen von dem des Gliedes 3. Grades hat. Schreiben wir eine solche Gleichung

$$x^3 + bx = ax^2 + c,$$

so wird sie, was, wie wir gesehen haben, damals ebenso nahe lag wie heute, was aber erst Cardano ausdrücklich als Regel aufstellte, durch Einführung von $x - \frac{a}{3}$ als neue Unbekannte oder durch Ansetzen von $x = y + \frac{a}{3}$ auf die vorhergehenden Formen zurückgeführt. Finden sich nun drei reelle Wurzeln, dann ist es eben erwiesen, daß die Summe der drei Werte von y gleich 0 ist. Die Summe der drei Werte von x wird also a. Cardano, der keine

übersichtlichen und allgemeinen Beweisformen zu seiner Verfügung hat, begnügt sich allerdings damit, dies an Zahlenbeispielen nachzuweisen; sein ausdrücklicher Hinweis auf die Resultate, die er vorher für Gleichungen der Formen (2) und (3) gefunden, zeigt jedoch, daß sein Gedankengang hier richtig wiedergegeben ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (2) in dem irreduziblen Falle und damit die Lösung der Gleichung (3), wenn sie überhaupt positive Wurzeln hat, war indessen noch nicht erreicht, und je weiter man in anderen Beziehungen mit Gleichungen 3. Grades kam, um so eifriger mußten die Nachforschungen werden, auch diese Fälle zu bewältigen.

Einer von den Versuchen, die in dieser Richtung angestellt wurden, rührt von Bombelli her und zeichnet sich durch die Dreistigkeit aus, mit der er mit imaginären Größen rechnet. Auf einem anderen Gebiete war jedoch Cardano hierin sein Vorgänger gewesen. Dieser hatte nämlich gezeigt, daß die imaginären Wurzeln $5 - \sqrt{-15}$ und $5 + \sqrt{-15}$, zu denen die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen $x + y = 10$ und $xy = 40$ führt, wirklich diese Gleichungen erfüllen, wenn man mit ihnen wie mit anderen zweigliedrigen Größen rechnet und $-\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15} = 15$ setzt.

Zufolge der von Tartaglia angegebenen Regel wird Gleichung (2)

$$x^3 = ax + b$$

durch

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

gelöst, eine Lösung, die indes unbrauchbar wird, sobald $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$. Bombelli sucht sie aber auch in diesem Falle anzuwenden. Dazu benutzt er eine Reduktion von $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$. Wird dies $= p \pm \sqrt{q}$ gesetzt, so kann man p und q aus

$$p^3 + 3pq = \alpha, \quad p^2 - q = \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta}$$

bestimmen. Wird letztere Wurzel $= \gamma$ gesetzt, so erhält man zur Bestimmung von p die Gleichung

$$4p^3 = 3\gamma p + \alpha.$$

Diese Wurzelausziehung sucht Bombelli ohne Rücksicht darauf, ob β positiv oder negativ ist, auf die beiden Glieder des obenstehenden Ausdrucks für die Wurzel in Gleichung (2) anzuwenden. Es geschieht durch Einsetzung von $\alpha = \frac{b}{2}$, $\beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, woraus $\gamma = \frac{a}{3}$ und $x = p + \sqrt{q} + p - \sqrt{q} = 2p$ folgt.

Es gelingt Bombelli also in der Tat, eine Erklärung dafür zu geben,

daß die vorgelegte Gleichung eine reelle Wurzel haben kann, und zwar auch dann, wenn sie durch Kubikwurzeln imaginärer Größen ausgedrückt ist. Eine Lösung der Aufgabe erreicht er dagegen nicht; denn seine Gleichung zur Bestimmung von p erhält durch Einführung der Werte von α und γ die Form

$$4\,p^3 = ap + \frac{b}{2},$$

was eben, wenn man in ihr $x = 2p$ setzt, die vorgelegte Gleichung ist. Untersuchungen über Kubikwurzeln aus Größen von der Form $a + \sqrt{b}$ sind im Anschluß an die Lösung von Gleichungen 3. Grades auch von Stifel und Girard unternommen worden.

Durch Gebrauch anderer Hilfsmittel als der rein algebraischen gelang es Vieta, die Auflösung der Gleichung 3. Grades in dem irreduziblen Falle zu finden. Im 4. Abschnitt werden wir die Form, in der es geschah, näher erörtern. Hier soll nur kurz mit modernen Bezeichnungen angegeben werden, daß die Lösung darauf beruht, daß

$$\cos\,3u = 4\,\cos^3 u - 3\,\cos u.$$

Bringt man nämlich Gleichung (2) auf die Form

$$x^3 - 3\,r^2 x = ar^2,$$

indem man die früheren Bezeichnungen a und b durch $3r^2$ und ar^2 ersetzt, so tritt der irreduzible Fall ein, wenn $r > \frac{a}{2}$. Man kann also $a = 2\,r\cos v$ setzen, und nun wird infolge des obenstehenden Ausdrucks für $\cos\,3u$ die Gleichung durch

$$x = 2r\,\cos\frac{v}{3}$$

befriedigt.

Die Wurzeln der Gleichung (3), die jetzt die Form annimmt

$$3r^2 x - x^3 = ar^2,$$

lassen sich dann gemäß der von Cardano angegebenen Bestimmungsmethode durch

$$x = r\,\cos\frac{v}{3} \pm \sqrt{3r^2\,\sin^2\frac{v}{3}}$$

ausdrücken, was mit Vietas Bestimmung der nämlichen Wurzeln durchaus übereinstimmt.

Der glückliche Ausfall der erneuerten Bestrebungen, Gleichungen 3. Grades zu lösen, die man im Verlaufe von Jahrhunderten als unlösbar betrachtet hatte, mußte den Mut erwecken, auch die Lösung von Gleichungen 4. Grades zu versuchen. Sie erwies sich, nachdem man einmal in den Besitz der Lösung von Gleichungen 3. Grades gekommen war, als mit etwas geringeren

Schwierigkeiten verbunden. Die nötigen Umformungen, die zu einer Hilfsgleichung 3. Grades führen, sind nämlich mit denjenigen einigermaßen verwandt, die man schon längst angewendet hatte, um beide Seiten einer Gleichung 2. Grades quadratisch zu machen. Schön war es jedoch, daß diese Auflösung schon von Cardanos jungem Schüler Ferrari gefunden wurde und im Anschluß an die ausführliche Darstellung der Lehre von Gleichungen 3. Grades in die *Ars magna* des ersteren mit aufgenommen werden konnte.

Ferraris Behandlung wird hier unmittelbar nur auf solche Gleichungen 4. Grades angewendet, in denen das Glied 3. Grades fehlt, und die wir hier

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

schreiben wollen, indem wir annehmen, daß a, b, c positiv oder negativ sein können, während Cardano in seiner Darstellung der Methode negative Glieder durch Verteilung der Glieder auf beide Seiten des Gleichheitszeichens vermeidet. Man transformiert erst die Gleichung so, daß auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat, auf der rechten aber ein Ausdruck höchstens 2. Grades steht. Dies erreicht man in den Beispielen auf etwas verschiedene Art und Weise, es wird aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es jedenfalls in der folgenden Weise geschehen kann, die wir hier darlegen wollen. Aus der Gleichung erhält man:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4}.$$

Um beide Seiten quadratisch zu machen, addiert man auf beiden Seiten

$$2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2,$$

wo t eine vorläufig unbekannte Größe ist. Dadurch erhält man

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c,$$

wo auch die rechte Seite ein Quadrat ist, wenn

$$b^2 = 2t\,(4t^2 + 4at + a^2 - 4c).$$

Aus dieser Gleichung 3. Grades wird t bestimmt, wonach man durch Quadratwurzelausziehung die Bestimmung von x auf Gleichungen 2. Grades zurückführen kann.

Cardano hebt ausdrücklich hervor, daß sich auf die hier angeführte Form leicht solche Gleichungen zurückführen lassen, in denen statt des Gliedes 3. Grades das Glied 1. Grades fehlt. Es geschieht durch eine Änderung, die er früher mit solchen Gleichungen vorgenommen hatte, und die mit der Substitution von $x = \frac{k}{y}$ zusammenfällt, wo k eine positive oder negative Konstante ist. Daß Cardano mittels der Methode Ferraris nicht auch solche Gleichungen gelöst hat, die Glieder sowohl des 3. als auch des 1. Grades enthalten,

etwa durch die nämliche Wegschaffung des Gliedes 3. Grades, wie er aus einer Gleichung 3. Grades das Glied 2. Grades entfernt hatte, oder auch durch Benutzung des Spielraumes, der sich in seiner Umformung auf eine Gleichung findet, in welcher ein vollständiges Quadrat einem Ausdrucke 2. Grades gleich gesetzt wird, das muß darauf beruhen, daß die ganze Sache noch sehr neu war.

Jedenfalls war diese Lücke leicht auszufüllen und wurde denn auch bald auf dem letzteren und näher liegenden dieser beiden Wege ausgefüllt. Bombelli, der überhaupt die Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades durch zahlreiche Beispiele illustriert hat, löst z. B. die Gleichung

$$x^4 + 8x^3 + 11 = 68x$$

durch Umformung in

$$(x^2 + 4x - t)^2 = (16 - 2t)\,x^2 + (68 - 8t)\,x - (11 - t^2);$$

aus

$$147t = t^3 + 666$$

ergibt sich $t = 6$, wonach

$$(x^2 + 4x - 6)^2 = 4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2.$$

2. Die algebraische Zeichensprache.

Die Auflösungen der Gleichungen 3. und 4. Grades von Ferro, Tartaglia und Ferrari bezeichneten der überlieferten Mathematik gegenüber so augenfällige Fortschritte, daß sie die mathematische Tätigkeit in hohem Grade anfachen mußten, die überdies, wie in der Einleitung erwähnt, von vielen Seiten her Nahrung zog. Namentlich mußten sie der schon vorher sich regenden algebraischen Richtung neuen Schwung geben. Indem diese Entdeckungen unmittelbar an bestimmte Formen von Gleichungen 3. und 4. Grades anknüpften, galt es zuvörderst, allgemeine Regeln für die Zurückführung der übrigen auf diese Formen auszuarbeiten, und überhaupt die gewonnenen Resultate so ergiebig wie möglich zu machen und mit Beispielsammlungen zu versehen. Besonders tritt uns das in den Arbeiten Cardanos und Bombellis entgegen, die zugleich insofern von Bedeutung waren, als sie die genannten Theorien schnell in alle Welt trugen. So war in Deutschland bald auch Stifel auf diesem Gebiete zu Hause. In Frankreich, wo Vieta anfangs seine großen mathematischen Anlagen namentlich der Trigonometrie gewidmet hatte, trugen sie sicher dazu bei, ihn in eine mehr algebraische Richtung hinüberzuleiten. Auf die Algebra konnte er denn auch, wie bereits erwähnt, wichtige Ergebnisse seiner trigonometrischen Arbeiten übertragen; wir werden darüber im 4. Abschnitt ausführlicher zu reden haben. Die Arbeiten der Italiener und Vietas trugen hinwiederum

dazu bei, Untersuchungen wie die von Simon Stevin, Girard und Harriot hervorzurufen, und sie haben ihrerseits nicht wenig Berührungspunkte mit den Arbeiten Jobst Bürgis, Keplers u. a.

Der mächtig wachsende Inhalt der Algebra erforderte unter diesen Umständen mehr und mehr die Entwickelung der entsprechenden Formen, und deren Verbesserung war andrerseits wieder von Einfluß auf die Vertiefung sowohl als auf die größere Faßlichkeit und Verbreitung ihres Inhalts.

Tartaglia und Cardano nehmen noch mit den algebraischen Bezeichnungen vorlieb, die schon vor Schluß des Mittelalters auf beiden Seiten der Alpen gebräuchlich waren. Man verwendete allerdings verschiedene Zeichen, wenn es sich darum handelte, Gleichungen mit gegebenen Zahlenkoeffizienten aufzuschreiben, umzuformen und zu lösen, entbehrte ihrer aber völlig, wenn es galt, allgemeine Regeln oder Methoden zu kennzeichnen. Zwar behalf man sich, wie es seinerzeit Diophant getan hatte und wir es vorhin von Tartaglia erfahren haben, bisweilen damit, die allgemeinen Rechnungen an bestimmten, beliebigen Zahlen zu zeigen; dies Mittel war aber nicht immer hinreichend. Die allgemeine Gleichung $x^3 + ax = b$ mußte man deshalb ungefähr so ausdrücken: ein „Kubus“ (x^3) $\tilde{p}$ (plus) eine gewisse Anzahl (a) von „Dingen“ (x) ist eine gewisse „Zahl“ (b); bei Angabe der Lösung wurde unser a kurz als „die Dinge“, deren Anzahl a angibt, b aber als „die Zahlen“ bezeichnet. Die in Deutschland bekannten Zeichen + und − wurden, wie man hier sieht, noch nicht in Italien gebraucht, wo man vielmehr nur $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ verwendete, die bloße Schriftkürzungen sind. Schriftlich bezeichneten *plus* und *minus* früher die positiven und negativen Korrektionen, die durch die *regula falsi* veranlaßt werden. Dieselbe Bedeutung haben die Zeichen + und − bei Widmann, bei dem sie uns zuerst begegnen. Erst nach ihm werden diese Wörter und Zeichen als gewöhnliche Ausdrücke für Addition und Subtraktion angewendet.

Als Mittel einer allgemein gültigen Darstellung besaß man zwar wie im Altertum, von dessen Gedankengang man ein immer tieferes Verständnis gewann, die geometrische; diese hört aber auf, unmittelbar anschaulich zu sein, sobald man über den 2. Grad hinausgeht, und beschränkt sich, wenn man den 3. Grad überschreitet, auf den Gebrauch hypergeometrischer Benennungen, wie Quadratoquadrat (oder dgl.) für die 4. Potenz.

Die nächstliegenden Entwickelungen der schwachen Anfänge einer Zeichensprache mußten außer dem bald allerwärts üblichen Gebrauch von + und −, die den Vorteil besitzen, aus der gewöhnlichen Schrift deutlich hervorzutreten, auf neue Verkürzungen der Schreibweise für die allmählich weitläufigeren numerischen Gleichungen abzielen. Bombelli erreichte dieses

Ziel, indem er die verschiedenen Potenzen der Unbekannten durch $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3} \ldots$ bezeichnete, Stevin, der nur die ihm bekannte Bezeichnung Bombellis umänderte, indem er sie als ①, ②, ③ ... schrieb, Bürgi auf fast dieselbe Weise wie früher der ihm sicher ganz unbekannte Chuquet, indem er die Exponenten der Potenzen der Unbekannten mit römischen Zahlen dem zugehörigen Koeffizienten als Exponenten hinzufügte: $7^{\mathrm{I}} - 14^{\mathrm{III}} + 7^{\mathrm{V}} - 1^{\mathrm{VII}}$ bedeutet bei ihm $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$. Diese bestimmte Angabe des Exponenten war deutlicher als die früher benutzten Anfangsbuchstaben, wie *n* für *numerus*, d. h. Einer, *q* für *quadratum* u. dgl. Der mit allen diesen Bezeichnungen verbundenen Unbequemlichkeit, daß sie nur eine Unbekannte voraussetzen, hilft Stevin dadurch ab, daß er vor das Zeichen der Potenz *sec* oder *ter* setzt, wenn es sich um die „zweite" oder „dritte" Unbekannte handelt. „Mal" bezeichnet er mit *M* und „dividiert durch" mit *D*. Die jetzige Gleichung

$$\frac{6x^3}{y} : 2xz^2 = \frac{3x^2}{yz^2}$$

schreibt er demnach so:

Dividieren wir 6 ③ *D sec* ① durch 2 ① *M ter* ②,
so erhalten wir 3 ② *D sec* ① *D ter* ②.

Dagegen gebricht es Stevin noch an einem Zeichen für eine bekannte, aber beliebige Zahl. Die Gleichung

$$ay = xy + bx^2$$

muß er deshalb (in der französischen Ausgabe) so ausdrücken: *quelques sec* ① *sont égales à* 1 ① *M sec* ① + *quelques* ②, und unser Koeffizient *a* wird in den folgenden Operationen *la multitude de sec* ① genannt. Die nämlichen Zeichen für Potenzen der Unbekannten werden wir später Stevin in seiner Darstellung von Decimalbrüchen auf die verschiedenen Potenzen von $\frac{1}{10}$ anwenden sehen.

Wurzelgrößen werden zu Anfang der neueren Zeit durch ein *R* vor der Potenz bezeichnet, das gewöhnlich durchstrichen ist (℟). Dies *R* oder *r* ist sowohl bei Stevin als Vieta in unser $\sqrt{}$ übergegangen. Wenn es sich nicht um Quadratwurzeln handelt, wird der Exponent durch eine besondere Hinzufügung bezeichnet. So bezeichnet $\sqrt{c}$ bei Vieta die Kubikwurzel, während Stevin $\sqrt{③}$ schreibt u. s. w. Er und sein Nachfolger Girard benutzten indessen zur Darstellung von Quadrat- und Kubikwurzeln auch einzelne Zeichen. Bei ihnen finden wir auch die Anfänge einer besonderen trigonometrischen Zeichensprache. Letzterer gebraucht sogar einen so kurzen Ausdruck wie

$$\frac{(A + b) - (d)}{(A + b) - (b - A)},$$

den man heutzutage

$$\frac{\cos(A-B)-\cos D}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$$

schreiben würde, indem die Klammern die *sinus* der angeführten Winkel, die kleinen Buchstaben aber die Komplemente der durch große Buchstaben bezeichneten Winkel bedeuten.

Soll die Wurzel aus einer zusammengesetzten Größe gezogen werden, die alsdann nach dem Wurzelzeichen geschrieben wird, so verwenden Rudolff, Bombelli und Stevin verschiedene Mittel, um die Zusammengehörigkeit auszudrücken; Girard schließt die zusammengesetzte Größe in Klammern ein und schreibt z. B. $\sqrt{(7-\sqrt{47})}$. Sonderbarerweise tritt also dies jetzt allgemein gebräuchliche algebraische Zeichen der Vereinigung zum ersten Male in einer Verbindung auf, wo man sich jetzt statt der Klammern des von Vieta auch sonst gebrauchten Zeichens der Zusammengehörigkeit bedient. Es besteht in einem wagerechten Striche über den zusammengehörigen Größen, z. B. $\overline{B+D}$; dieser Strich ist es, der sich bei Vieta in Verbindung mit dem damals gebräuchlichen Wurzelzeichen zu dem nach seiner Zeit üblichen langen Wurzelzeichen entwickelte: $\sqrt{7-\sqrt{47}}$.

Zum Vergleiche mit einigen Beschränkungen in der Bedeutung, denen, wie wir sehen werden, Vietas Gebrauch seiner Zeichensprache unterliegt, haben wir noch zu bemerken, daß sein Zeitgenosse Stevin in einer Gleichung ebensowenig wie Cardano negative Wurzeln vermeidet und kein Bedenken trägt, mit irrationalen Wurzelgrößen zu rechnen. Er stellt ausdrücklich den Begriff der irrationalen Zahlen auf und weist darauf hin, daß dieser von Euklid verworfene Begriff doch in seinem 10. Buche verborgen liegt, daß dieses daher leichter zu lesen sein würde, wenn dieser Begriff deutlich hervorgehoben und durch Zahlenbeispiele näher erläutert wäre. In Verbindung hiermit gehen Stevin und Girard im Rechnen mit Wurzelgrößen ziemlich weit. Mit der Darstellung durch Zeichen verbinden die hier genannten Schriftsteller deshalb auch nicht die Voraussetzung darüber, daß die dargestellte Unbekannte oder Wurzelgröße bezw. positiv oder rational sein soll.

Die Zeichensprache Stevins gibt eine sehr übersichtliche Darstellung von Gleichungen mit gegebenen Zahlenkoeffizienten und ist für die Darstellung der Umformungen und der Auflösung derselben sehr brauchbar. Der erwähnte Mangel an Bezeichnungen für bekannte, aber beliebige Größen macht sie dagegen ungeeignet zur Darstellung allgemeiner Regeln und deren allgemeingültiger Begründung. Er nimmt deshalb dazu die gewöhnliche Sprache zu Hilfe. Es muß jedoch sofort hinzugefügt werden, daß er diese mit größerer Einfachheit und in einer leichter verständlichen Weise zu gebrauchen versteht als die meisten seiner Zeitgenossen. Während diese entweder die

alten Sprachen benutzten, oder ihnen wenigstens die Ausdrücke zur Darstellung der wissenschaftlichen Begriffe entlehnten, fand er für eine hinlänglich klare Darstellung seine Muttersprache am geeignetsten, wenn er auch nachher seine Schriften ins Französische oder Lateinische übertrug oder übertragen lassen mußte. Eins seiner Werke *La Disme* hat er sich besonders bestrebt so volkstümlich zu schreiben, daß es auch Kaufleuten, Handwerkern und andern, die für die darin vorgeschlagene Zehnteilung praktische Verwendung hatten, verständlich wäre.

In allen diesen Beziehungen bildet er einen vollständigen Gegensatz zu Vieta. Dieser war ein treuer Anhänger der Alten, an deren Auffassung er bei den großen Fortschritten anknüpfte, die der Algebra bald eine von der ihrigen ganz abweichende Gestalt geben sollten, und durchtränkt mit seiner Gelehrsamkeit in griechischer Sprache seine ganze Darstellung. Sie ist voll von griechischen Kunstausdrücken, die bald mit griechischen Buchstaben, bald in latinisierter Form geschrieben werden, und diese Kunstausdrücke, von denen sehr wenige Bürgerrecht erlangt haben, beschweren seinen Stil in hohem Grade. Auch seine Darstellung numerischer Gleichungen ist nicht so einfach wie die Bombellis und Stevins. Er besitzt aber eben das, was wir noch bei letzterem vermißten, und ward so zum Schöpfer der algebraischen Formel und der allgemeingültigen Darstellung algebraischer Operationen durch eine Zeichensprache, in der immerhin noch Wörter in die Formeln eingemischt sind.

Vieta bezeichnete durch Buchstaben, die er dem großen Alphabet entnahm, beliebige, und zwar nicht nur wie bisher unbekannte, sondern auch solche Zahlen, denen man in der gerade vorliegenden Untersuchung irgend welchen gegebenen Zahlenwert sollte beilegen können. Erstere bezeichnet er durch Vokale, letztere durch Konsonanten. Die Rechnung, die er mit den aus diesen Bezeichnungen zusammengesetzten Ausdrücken vornimmt, wird somit eine wirkliche Buchstabenrechnung, die in sich alle die Rechnungen befaßt, die man durch Ansetzen aller möglichen Zahlenwerte für die Buchstaben erhalten würde. Er nennt sie *Logistica speciosa*, Rechnung mit Arten (*species*), im Gegensatz zur *Logistica numeralis*, Rechnung mit Zahlen.

Wie soeben berührt, war dagegen seine Zeichensprache nicht in allen Beziehungen so entwickelt wie die mehrerer seiner Zeitgenossen oder wenig späterer Schriftsteller. Er verwendete in ihr immer noch vollständige oder verkürzte Wörter wie *in* für „mal“, *aequatur* („wird gleich gesetzt“) für = und ebenso die Wörter, welche die Potenzen oder Grade der verschiedenen Größen bezeichnen. Sie sind, was die drei niedrigsten Grade betrifft, geometrisch und bezeichnen die Dimensionszahl, was die höheren

Grade betrifft, hypergeometrisch oder durch die vorhin erwähnten Erweiterungen der Geometrie entstanden. A^3, A^9 werden also *A cubus*, *A cubo-cubo-cubus* genannt, und eine bekannte Größe *B* wird als Größe 9. Grades bezeichnet, indem man *B solido-solido-solidum* schreibt. Eine Größe 1. Grades wird *latus*, Seite, genannt; wird nun ein gegebenes *latus* mit einer unbekannten Größe multipliziert, so wird es als bei dem dadurch gebildeten Areale mitwirkend *(coefficiens)* bezeichnet. Diese Benennungen sind immer so gewählt, daß die Gleichungen in Bezug auf unbekannte und bekannte Größen zusammengenommen homogen werden. Von Zeichen werden jedoch +, — und Bruchstrich gebraucht. Ein wagerechter Strich über einer mehrgliedrigen Größe bezeichnet, wie schon erwähnt, daß diese zusammenzufassen ist, was wir durch Klammern bezeichnen, und gegebene Zahlenfaktoren werden ohne nähere Bezeichnung einfach daneben gestellt. Die Gleichung

$$A^3 + 3BA = D$$

schreibt er folgendermaßen:

A cubus + B planum in A 3 aequatur D solido.

Diese Bezeichnungsweise ist jedoch nicht ausreichend, wenn der Exponent selbst ein beliebiger sein soll. Vieta begnügt sich sodann mit einer weniger deutlichen Darstellung, die aus dem Zusammenhange verständlich ist. So soll

B parabola in A gradum — A potestate aequatur Z homogenae

die Gleichung

$$BA^n - A^{m+n} = Z$$

darstellen.

Wenn auch die Zeichensprache Vietas etwas schwerfällig und unbequem ist, so benutzt er sie jedenfalls mit einer mathematischen Gewissenhaftigkeit, die ihn als treuen Schüler der Alten kennzeichnet. Wie diese, erkennt er als Zahlen, mit denen man überhaupt rechnen kann, nur rationale und positive Zahlen an, und diese eben stellt er durch Buchstaben dar. Infolgedessen müßte die Gültigkeit der Resultate, die aus Operationen in seiner Zeichensprache hervorgehen, noch besonders begründet werden, wenn die Unbekannte bei Einsetzung von Zahlenwerten für die bekannten Größen irrational wird. Solche besondere Begründungen würden allerdings so weitläufig werden, daß die Vorteile des Gebrauches der Zeichensprache darüber verloren gingen; allein Vieta gesteht doch die ideale Berechtigung der Forderung einer solchen Begründung zu, indem er an besonders wichtigen Stellen eine sogenannte geometrische Behandlung hinzufügt. Diese ist freilich moderner Auffassung nach weniger geometrisch als die Zeichensprache, die stets geometrische oder hypergeometrische Ausdrücke benutzt.

Sie erfüllt dagegen die Anforderungen, die man sowohl im Altertum als bei den Arabern an geometrische Genauigkeit stellt, indem sie auf der Proportionslehre Euklids (Eudoxus') aufgebaut ist, die auf kommensurable wie auf inkommensurable Größen gleich anwendbar ist. In dieser Beziehung macht es Vieta wie 'Omar Alchaijâmî (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 306).

Als Beispiel einer solchen geometrischen Darstellung können wir diejenige anführen, die er von der Gleichung Ferros und Tartaglias und ihrer Auflösung gibt. Zunächst stellt er die Gleichung mittels seiner eigentümlichen Zeichensprache in einer Form auf, die wir oben durch

$$A^3 + 3BA = D$$

wiedergegeben haben; die bekannte Auflösung lautet dann folgendermaßen: A ist die Differenz der *latera*, die das Areal B bilden, und deren Kubendifferenz D ist, d. h., wenn wir diese *latera* u und v nennen:

$$uv = B, \quad u^3 - v^3 = D, \quad A = u - v.$$

Zum Gebrauch bei der „geometrischen" Auflösung schreibt er sodann statt D *(solidum)* das Produkt von B *(planum)* und D, so daß wir die Gleichung

$$A^3 + 3BA = BD$$

erhalten.

Sodann bestimmt er vier zusammenhängende proportionale Größen, und zwar so, daß das Rechteck der inneren oder der äußeren B, die Differenz der äußeren D ist. A wird dann die Differenz der inneren sein. Nennen wir die vier proportionalen Größen z, u, v, t, so können wir (heute) diese Annahmen, wie folgt, darstellen:

$$z : u = u : v = v : t$$
$$zt = uv = B$$
$$z - t = D$$
$$A = u - v.$$

Aus dieser Darstellung erhellt, daß die beiden Auflösungen durchaus übereinstimmen, wenn wir nur auch in ersterer D mit BD vertauschen, und daß letztere Ausdrucksweise der antiken Vertauschung der Kubikwurzel mit zwei geometrischen Mitteln entspricht. Die Proportionen geben nämlich

$$u^3 = z^2 t, \quad v^3 = zt^2$$
$$u^3 - v^3 = zt\,(z - t) = B \cdot D.$$

Vieta geht ferner davon aus, daß seine Buchstabenzeichen immer nur positive Zahlen bezeichnen sollen. An dieser Voraussetzung hielt man, was die gegebenen Größen betrifft, bis auf Hudde fest, so daß noch Descartes, wenn er eine Gleichung mit allgemeinen Koeffizienten aufstellen will, vor jedes Glied $\cdots$ setzt, um zu bezeichnen, daß es positiv oder negativ sein kann; der Buchstabenkoeffizient gibt also nur den absoluten

Wert an. Was unbekannte Größen betrifft, so ist es allerdings schwerer, eine derartige Voraussetzung zu machen, da man nicht immer voraussehen kann, ob sie positiv oder negativ werden, auch die Gleichung nicht immer im voraus so modifizieren kann, daß sie positiv werden. Findet sich in einer Gleichung eine negative Wurzel, so haben wir (Altertum u. Mittelalter, S. 280) gesehen, daß schon die Inder es verstanden, sie richtig zu erklären, und daß später in Europa ein Gelehrter wie z. B. Chuquet ihre Bedeutung vollständig kannte (ebenda S. 327). Cardano legt einer Gleichung mit völliger Klarheit alle ihre Wurzeln, positive sowohl wie negative, bei. Vieta, dem gründlichen Kenner der Arbeiten Cardanos, kann diese Auffassung also nicht fremd sein. Es ist demnach gewiß wohlbedacht, wenn er mit Bezugnahme auf die Bedeutung, die er den Zeichen nun einmal gegeben hat, nur positive Wurzeln zuläßt. Deshalb bestimmt er nicht nur, wie seine Vorgänger, die negativen Wurzeln in $x^3 = ax + b$ als positive Wurzeln in $y^3 + b = ay$, sondern es treten auch seine Verallgemeinerungen der Cardanischen Zusammenstellungen positiver und negativer Wurzeln in der ersten dieser Gleichungen nur als Zusammenstellungen der Wurzeln, d. h. der positiven, in beiden Gleichungen auf. In Verbindung damit mag bemerkt werden, daß sich auch Stifel damit begnügt, einer Gleichung ihre positiven Wurzeln beizulegen. Er nimmt übrigens zuerst negative Zahlen kleiner als Null an.

Wenn auch Vietas Auffassung der durch die Zeichen dargestellten Zahlen in den beiden angeführten Beziehungen beschränkter ist als diejenige, die wir namentlich bei Stevin vorgefunden haben, so darf uns das nicht daran hindern, die logische Sicherheit zu schätzen, die Vieta hier an den Tag gelegt hat. Sie hat eben seine Zeichensprache zu einem zuverlässigen Organ gemacht, das nicht nur benutzt werden kann, um aus vorliegenden konkreten Aufgaben richtige Resultate herzuleiten, sondern auch zur Darstellung allgemeiner Sätze und zu deren vollständiger Begründung oder Herleitung zu dienen vermag. Dazu wird eben erfordert, daß man bei der Ausdeutung der Resultate keine andere Bedeutung in die Zeichen hineinlegt als diejenige, die man von Anfang an vorausgesetzt, und an der man während der ganzen folgenden Entwickelung festgehalten hat. Zwar hat es sich später gezeigt, daß die algebraische Zeichensprache den Vorteil hat, daß ihre Symbole ebensowohl negative wie irrationale und imaginäre Größen, ja, sogar Begriffe darzustellen vermögen, auf die der Name Größen schon nicht mehr zutrifft; und zu Vietas Zeit bestand kein Zweifel über die Richtigkeit der gewonnenen Resultate, wenn sich auch gesuchte Größen als negativ oder irrational ergaben. Die formelle Berechtigung zu unmittelbarer Anwendung eines solchen Resultates konnte indessen erst vorliegen, als man später eine Form der Definition der mit den Symbolen ausgeführten Rechnungen, be-

sonders der Multiplikation, Division und Wurzelausziehung, gewann, die zugleich negative und irrationale Größen umfaßte, und eben diese erweiterte Definition zum Ausgangspunkt nahm. Wie wir sehen werden, ist, was Rechnungen mit irrationalen Größen betrifft, eine solche Erweiterung erst Descartes zu verdanken.

An Leichtigkeit und Übersichtlichkeit gewann Vietas Zeichensprache durch die von Thomas Harriot herrührenden Verbesserungen, durch welche die Gleichungen namentlich von der Verquickung mit Wörtern befreit wurden. Es gelang ihm dadurch, daß er einerseits in Produkten und Potenzen alle ungleichen und gleichen Faktoren nebeneinander stellt — so daß z. B. $5a^3\,b^2$ als $5aaa\,bb$ geschrieben wird —, andrerseits das Zeichen $=$ benutzte, das seinem Landsmann Recorde zu verdanken ist. Diese jetzt gebräuchliche Form des Gleichheitszeichens fand indes nicht gleich überall Aufnahme; so gibt noch Descartes „gleich“ durch das Zeichen ∞ wieder, neben welchem fortwährend auch andere Gleichheitszeichen vorkommen. Harriot benutzt auch die Zeichen $>$ und $<$ in ihrer heutigen Bedeutung. Daß er zur Darstellung von Größen die kleinen Buchstaben verwendet, trägt ebenfalls dazu bei, seine Formeln leichter lesbar zu machen.

Was man durch die Zeichensprache noch nicht auszudrücken vermochte, mußte man wie bisher in Worten oder durch geometrische Figuren darstellen. Wir müssen hier indessen noch eines Mittels gedenken, das sowohl zu präciser Darstellung als auch zu wirklicher Ausführung von Operationen mit Zahlen und Größen diente, die gewisse Forderungen erfüllen sollten; wir meinen die tabellarische Aufstellung. Wir besprechen die Anwendung dieses Mittels zur Bildung der Binomialkoeffizienten hier um so lieber, weil deren Kenntnis in den Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, von denen wir in dem zunächst Folgenden zu reden haben. Ihrer allmählichen Bildung durch Multiplikationen und Divisionen begegnen wir zwar erst später; Stifel bildete sie aber folgenderweise.

Indem $(x+a)^{n+1}$ aus $(x+a)^n$ durch Multiplikation mit $x+a$ entsteht, wird in dem ersten Polynom der Koeffizient von $x^{n-r}\,a^{r+1}$ die Summe der Koeffizienten von $x^{n-r}\,a^r$ und $x^{n-r-1}\,a^{r+1}$ in dem zweiten, oder in moderner Bezeichnung

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

sein.

Die darauf begründete allmähliche Bildung der Binomialkoeffizienten tritt bei Stifel deutlich in der folgenden Tabelle hervor, in der nach und nach jede Zahl als Summe der über ihr und der von dieser links stehenden gebildet wird.

1				
2				
3	3			
4	6			
5	10	10		
6	15	20		
7	21	35	35	
8	28	56	70	
.	.	.	.	. .
.	.	.	.	. .
.	.	.	.	. .
17	136	680	2380	. . . . .

Tartaglia gab, nachdem er die *Arithmetica integra* Stifels kennen gelernt hatte, in seinem *General Trattato di numeri et misure* dieser Tabelle eine andere Form, die noch unmittelbarer dazu führt, arithmetische Reihen steigender Ordnung darzustellen, d. h. solche, die mit der Differenz 0 anfangen, und in denen sodann jedes Glied mit einer bestimmten Nummer die Differenz zwischen dem Gliede der nächsten Reihe mit derselben Nummer und dem diesem in ihr vorangehenden Gliede ist. Seine Tabelle sieht so aus:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Hier ist jede Zahl durch Addition der vor und über ihr stehenden entstanden. Die Koeffizienten derselben Potenz eines Binoms stehen in den Diagonallinien, welche die Zahlen der ersten Kolumne mit den Zahlen gleicher Nummer in der ersten Reihe verbinden. Das durch eine solche Diagonale abgeschnittene Dreieck ist das sogenannte *arithmetische Dreieck*, das später Pascal zu demselben Zweck bildete, mit dem er aber zugleich die multiplikative Bildung der Zahlen verknüpfte.

Eine solche tabellarische Darstellung benutzt auch Vieta, um die allmähliche Bildung der verschiedenen Koeffizienten in den Kreis- und Winkelteilungsgleichungen darzulegen und auszuführen, von denen wir später zu reden haben.

3. Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen.

Der große Vorteil einer Zeichensprache, in der ganz allgemeine und völlig sichere Beweise und Deduktionen als nach bestimmten Regeln auszuführende Rechnungen und Umgestaltungen der Gleichungen auftreten, wurde in einem aufserordentlich grofsen Umfange sofort von Vieta selbst ausgenutzt. Dieser Vorteil tritt uns nicht nur entgegen, wo Vieta neue und bedeutungsvolle Resultate gewinnt, sondern zeigt sich ebenso deutlich, wo er Fragen behandelt, die schon seine Vorgänger beantworten konnten, oder Aufgaben löst, die sie, von der neuen Form abgesehen, auf dieselbe Weise lösten wie er. Gleichungen der vier niedrigsten Grade widmet er in Bezug auf ihre Bildung, Umformung und Auflösung eine so allseitige Behandlung, daß man sich jetzt, nachdem die Vorteile der Zeichensprache bekannt sind, zu ihr gar nicht die Zeit nehmen würde. Was diese Vollständigkeit betrifft, so steht er mit ihr im schärfsten Gegensatze zu seinen Vorgängern, die sich gewöhnlich darauf beschränken mufsten, die Regeln für die Ausführung der Rechnungen in Worten anzugeben und vielleicht an einem Zahlenbeispiel darzulegen, während man allein aus ihrer Richtigkeit ersieht, daß ihre Erfinder und diejenigen, die sie demnächst auf vernünftige Weise gebrauchten, allerdings auch ihre Begründung verstanden. So haben wir (S. 90) Cardano richtig darauf hinweisen sehen, wo der Grund seiner Behauptung bezüglich der Summe der Wurzeln einer Gleichung 3. Grades zu suchen ist; das ist aber noch kein formeller Beweis.

Eine deduktive Analyse darzustellen, durch die man von der vorgelegten allgemeinen Gleichung zu ihrer Lösung geführt wird, würde vor Vieta unmöglich gewesen sein. Wenn wir also in unserer Wiedergabe der Auflösung von Gleichungen 4. Grades von Ferrari und Bombelli dieselben in eine neue Gleichung umgestalteten, die eine vorläufig unbestimmte, von uns t genannte Größe enthielt, und erst aus der Forderung, daß die rechte Seite dieser Gleichung quadratisch sein soll, eine Gleichung 3. Grades herleiteten, die durch t erfüllt werden soll, so ist dies nur eine übersichtliche Darstellung des Gedankenganges, der ihrer Auflösung zu Grunde liegt. Bombelli, um bei dem von ihm (S. 93) angeführten Beispiel zu bleiben, teilt uns mit, wie die Gleichung 3. Grades synthetisch zu bilden ist; er findet, daß ihre Wurzel 6 ist, und formt nun erst die gegebene Gleichung in diejenige um, die er erhält, wenn er $t = 6$ setzt. Vieta dagegen, der Gleichungen 4. Grades wesentlich nach der Methode Ferraris löst, bedient sich — in seiner Zeichensprache — der nämlichen analytischen Darstellungsform, die wir benutzt haben, indem er seine Gleichung mit der Unbekannten A in eine neue umgestaltet, die zugleich eine vorläufig unbekannte Größe E enthält.

Auch die Auflösung einer Gleichung 3. Grades mußte vor Vieta in solchen synthetisch aufgestellten Regeln angegeben werden, wie diejenigen sind, welche Tartaglia an Cardano mitteilte (siehe S. 83, wo unsere Zeichen Worte ersetzen). Erst Vieta zeigt ausdrücklich, wie man durch eine Analyse der vorgelegten Gleichung zu ihrer Auflösung kommen kann. Wie wir sehen werden, verfolgt er in dieser Analyse wesentlich denselben Gedankengang wie bei der Analyse einer Gleichung 4. Grades. Nur handelt es sich hier nicht um die Bildung eines vollständigen Quadrates, sondern eines vollständigen Kubus. Die Gleichung wird, wenn wir die Zeichen Vietas durch die jetzt gebräuchlichen ersetzen, so geschrieben:

(1) $$x^3 + 3ax = 2b$$

Sodann setzt Vieta

(2) $$a = t^2 + xt,$$

wahrscheinlich, weil dadurch die linke Seite in die drei ersten Glieder $x^3 + 3x^2t + 3xt^2$ eines vollständigen Kubus umgestaltet wird. Um t zu bestimmen, eliminiert Vieta x, indem er den aus letzterer Gleichung gefundenen Ausdruck in erstere einsetzt. Elimination und Zusammenziehung liefern ihm sodann die Gleichung:

(3) $$(t^3)^2 + 2bt^3 = a^3.$$

Nach der Bestimmung von t durch diese Gleichung wird x durch die Hilfsgleichung (2) bestimmt. Die Umgestaltung von (1) in

$$(x + t)^3 - t^3 = 2b,$$

die wahrscheinlich von Anfang an beabsichtigt war, wird also gar nicht notwendig. Stellen wir diese Gleichung der Gleichung (2) gegenüber, die geschrieben werden kann

$$(x + t)\, t = a,$$

so zeigt sich, daß die wirkliche Ausführung dieselbe wird wie die von Tartaglia und wahrscheinlich schon vor ihm von Ferro angegebene.

Eine Klasse von Gleichungen, die Vieta besonders untersucht, bilden die trinomischen Gleichungen verschiedener Grade. Im Anschluß an die von Cardano für die Gleichungen 3. Grades gefundenen Ergebnisse untersucht er vor allem, wieviele Wurzeln solche Gleichungen haben. Damit sind die positiven Wurzeln gemeint; die negativen aber bestimmt er auf gewöhnliche Art und Weise als Wurzeln der Gleichung, in der x durch $-y$ ersetzt ist. Er geht bei dieser Untersuchung von Gleichungen 2. Grades aus und stellt demnächst trinomische Gleichungen höherer Grade auf, doch so, daß die Anzahl der positiven Wurzeln nicht vermehrt wird, und zwar wendet er teils die Substitution $x = ky^m$, teils andere Verfahren an, von denen wir hier Beispiele geben werden.

Die Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

gibt, indem man sie quadriert und die Glieder 2. und 3. Grades mit Hilfe der gegebenen Gleichung auf den 1. Grad zurückführt,

$$x^4 + (a^3 + 2\,ab)\,x = b^2 + a^2\,b;$$

die Gleichung

$$ax - x^2 = ab$$

aber gibt durch Multiplikation mit $x + b$

$$(a - b)\,x^2 - x^3 = ab^2.$$

Die umgestalteten Gleichungen bekommen in beiden Fällen dieselben positiven Wurzeln wie die gegebenen und nicht mehr.

In der Gleichung

$$ax^m - x^{m+n} = b,$$

die zwei Wurzeln haben kann, bestimmt Vieta die Koeffizienten so, daß die Wurzeln gegebene Werte erhalten. Sind diese y und z, so wird

$$a = \frac{y^{m+n} - z^{m+n}}{y^m - z^m},\quad b = \frac{y^{m+n}\,z^m - y^m\,z^{m+n}}{y^m - z^m}.$$

Er unternimmt auch die entsprechende Bestimmung für Gleichungen von der Form

$$x^{m+n} + ax^m = b,$$

wo $m + n$ eine gerade, m eine ungerade Zahl ist; nur treten hier die positive und die negative Wurzel wie gewöhnlich bei ihm als positive Wurzeln zweier zusammengehörigen Gleichungen auf.

Die oben für a und b aufgestellten Ausdrücke hängen von der Summierung geometrischer Reihen ab. Dies veranlaßt Vieta zur Aufstellung verschiedener trinomischer Gleichungen, deren gegebene Größen und reelle Wurzeln verschiedentlich von geometrischen Reihen abhängen. Wenn $a_1, a_2, \cdots, a_n$ eine geometrische Reihe bilden, so wird z. B. die Gleichung

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,x^{n-1} - x^n = a_1\,(a_2 + \cdots + a_n)^{n-1}$$

gelöst durch

$$x = \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}, \\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \end{cases}$$

Die Aufstellung derartiger Gleichungen zeugt von Vietas algebraischer Fähigkeit. Sie haben indes keineswegs die gleiche Bedeutung erlangt wie diejenigen, die er aus der Trigonometrie herleitete, und die in einem besonderen Abschnitte behandelt werden sollen.

Vieta förderte aber die Lehre von den algebraischen Gleichungen nicht nur durch die vollständigere und weitergehende Behandlung bestimmter Klassen von Gleichungen, sondern seine neuen Hilfsmittel ließen ihn auch

solche Umgestaltungen und Sätze erfinden, welche alle algebraischen Gleichungen betreffen. So ermöglichte ihm der Bau allgemeiner Formeln leicht, Cardanos Regel für die Wegschaffung des Gliedes 2. Grades aus einer Gleichung 3. Grades auf völlig übersichtliche Weise in eine Wegschaffung des Gliedes zweithöchsten Grades aus jeder Gleichung, und zwar durch eine Suhstitution von der Form $x = y + k$, zu erweitern. Ebenso dehnte er die Einsetzung von $x = \frac{k}{y}$, die Cardano bei Gleichungen 3. und 4. Grades vornimmt, dahin aus, daß er, wie er es nannte, ganz allgemein „ersteres und letzteres vertauscht". Hierüber lehrte Vieta eine Umformung von der Art, daß ohne Änderung des Koeffizienten 1 des Gliedes höchsten Grades der Koeffizient des Gliedes zweithöchsten Grades (a) einen neuen Wert b erhält, und zwar durch die Substitution $x = \frac{a}{b}\, y$; ferner die Wegschaffung von Brüchen aus den Koeffizienten durch die Substitution $x = k \cdot y$, in der k einen angemessenen Wert bekommt. Wurzelzeichen schafft er aus den Gleichungen durch Isolierung und Potenzierung weg. Daß er aber auf diese Weise nicht nur Wurzelzeichen wegschafft, unter denen die Unbekannte steht, sondern auch Wurzelgrößen, welche in den Koeffizienten vorkommen, stimmt mit dem überein, was wir von der Bedeutung gesagt haben, die er seinen symbolischen Bezeichnungen beimißt.

Von noch größerer Bedeutung als diese Umgestaltungen ist Vietas allgemeine Untersuchung über die Zusammensetzung von Gleichungen aus Faktoren 1. Grades und über die Darstellung der Koeffizienten durch die Wurzeln. Wenn er aber auch zur Beantwortung der beiden miteinander zusammenhängenden Fragen einen der wichtigsten Beiträge lieferte, so ist immerhin auf das bereits von seinen Vorgängern und Zeitgenossen Geleistete hinzuweisen. Die Antwort auf die zweite Frage war, was die Gleichung 2. Grades betrifft, schon durch Euklids Behandlung vollständig gegeben. In seinen Daten wird sogar die Bestimmung zweier Größen, deren Rechteck (Produkt) und Summe oder Differenz bekannt sind, unmittelbar auf Gleichungen 2. Grades zurückgeführt (Altertum u. Mittelalter, S. 48—49).

Wollen wir auch die erste Frage auf ihren Ursprung zurückführen, so haben wir einen Kunstgriff zu erwähnen, den Cardano anwendete, um verschiedene einfachere Gleichungen 3. Grades zu lösen, und zwar schon zu einer Zeit, als er das Verfahren noch nicht kannte, durch welches Ferro und Tartaglia die Hauptschwierigkeiten überwanden, welche diese Gleichungen gewöhnlich darbieten. In der *Practica arithmeticae* transformiert er z. B. die Gleichung

$$2x^3 + 4x^2 + 25 = 16x + 55$$

durch beiderseitige Addition von $2x^2 + 10x + 5$ in

$$(2x + 6)\ (x^2 + 5) = (2x + 6)\ (x + 10),$$

und Kürzung mit $2x + 6$ führt sodann auf eine Gleichung 2. Grades. Solange es sich indes, um einen gemeinschaftlichen Faktor zu erhalten, wie hier nur um geschickte Verteilung der einzelnen Glieder auf die beiden Seiten der Gleichung handelt, liegt noch keine eigentliche Methode vor. Dazu wird vielmehr erfordert, daß man wenigstens entweder den Zusammenhang des Faktors, der durch Kürzung wegfallen soll, mit einer Wurzel der Gleichung, in diesem Falle mit der negativen Wurzel $x = -3$ bemerkt, oder aber einsieht, daß es bei einer Reduktion der Gleichung auf 0 nur darauf ankommt, einen Faktor auf der einen Seite, nicht wie bei Cardano, einen beiden Seiten gemeinschaftlichen Faktor zu gewinnen.

Die erste dieser Forderungen hat Cardano allerdings später, wenn auch vielleicht nicht mit dem vollen Bewußtsein ihrer Bedeutung, aber doch faktisch erfüllt, indem er, wie wir (S. 88) gesehen, die positiven Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + b = ax$$

durch eine derartige Umformung findet, daß er mit x minus der ihm bekannten negativen Wurzel kürzen kann, ein Verfahren, das dann Vieta auf trinomische Gleichungen höherer Grade ausgedehnt hat. Wir haben weiterhin (S. 89) gesehen, daß Cardano damit die Lehre von den drei Wurzeln gewisser Gleichungen 3. Grades und den Satz verband, daß der Koeffizient des Gliedes 2. Grades, auf die rechte Seite gestellt, der Summe der Wurzeln gleich ist. Dadurch wurde nach dem, was das Altertum von Gleichungen 2. Grades wußte, der erste Schritt getan, um die Koeffizienten einer Gleichung durch ihre Wurzeln auszudrücken. Vieta führte diese Bestimmung wenigstens für solche Gleichungen durch, die lauter positive Wurzeln haben, indem er bis zum 5. Grade ausdrücklich die vollständigen Gleichungen mit gegebenen und positiven Wurzeln aufstellt. Dies ist hinlänglich, um zu zeigen, wie in einer Gleichung n-ten Grades die Koeffizienten der Glieder x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} u. s. w. gebildet werden und sich, mit wechselndem Vorzeichen, als 1, als Summe der einfachen Wurzeln, als Summe der binären, ternären u. s. w. Wurzelprodukte darstellen. Die Vorzeichen wählt er schließlich so, daß das von x freie Glied, das dem Produkt der Wurzeln gleich ist, mit dem Zeichen + auf die rechte Seite allein zu stehen kommt. Über diesen Satz, den Vieta selbst als ein Hauptergebnis seines mathematischen Denkens betrachtet, hat er ausführlich in einer verloren gegangenen Arbeit geschrieben.

Ob er in ihr ganz allgemein die Bildung der Koeffizienten auch in

Gleichungen dargelegt hat, in denen negative Wurzeln vorkommen, weiß man nicht. Da er nur positive Wurzeln anerkennt, mußte er in diesem Falle die Koeffizienten durch die positiven Wurzeln der Gleichung selbst und die positiven Wurzeln der ihr entsprechenden Gleichung ausdrücken, die durch Vertauschung von x mit $-y$ entsteht. Daß ihm eine solche Erweiterung seines Satzes jedenfalls nicht fremd war, zeigt er, wo sich die Gelegenheit bietet; so namentlich bei den beiden einander ergänzenden Gleichungen 3. Grades, die wir schon so oft betrachtet haben, und die wir hier mit denselben Zeichen wie S. 88 schreiben wollen:

$$y^3 = ay + b,\ x^3 + b = ax.$$

Wird die (positive) Wurzel der ersteren y_1, und werden die (positiven) Wurzeln der letzteren x_1 und x_2 genannt, so zeigt Vieta, daß

$$y_1 = x_1 + x_2,\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1 x_2 = a,\ x_1 x_2 (x_1 + x_2) = b.$$

Das erste dieser Resultate kannte, wie wir gesehen haben, bereits Cardano.

Auch Harriot, dessen Untersuchungen sich denen Vietas anschließen, läßt keine negativen Wurzeln zu; der eigentümliche Ausgangspunkt aber, den er nimmt, setzt ihn in den Stand, die Koeffizienten auch dann noch durch die Wurzeln der Gleichung auszudrücken, wenn diese teils positiv, teils negativ sind, wie aus folgendem Beispiele ersichtlich ist. Aus dem Produkte von $a - b$, $a - c$ und $a + d$, um seine eigenen einfachen Bezeichnungen zu gebrauchen, bildet er, indem er ebenso wie Vieta sogleich das von der Unbekannten a unabhängige Glied auf die andere Seite des Gleichheitszeichens versetzt, die Gleichung

$$\begin{aligned} &aaa - baa + bca \\ &\quad - caa - bda \\ &\quad + daa - cda = -bcd. \end{aligned}$$

Aus der Bildungsweise dieser Gleichung schließt er, daß die Gleichung erfüllt wird, wenn $a = b$ oder $a = c$, während der Faktor $a + d$ zu keinem ähnlichen Schlusse benutzt wird. Auf diese Weise werden ganz allgemein alle möglichen algebraischen Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln gebildet. Nur werden die negativen Wurzeln, wie $a = -d$, in dem gezeigten Beispiel, noch nicht auch als Wurzeln aufgefaßt.

Harriot verwendet diese Bildungsweise zur Auflösung von Gleichungen, indem er eine vorliegende Gleichung mit einer anderen identifiziert, deren Bildung eine Wurzel von einer gewissen Form voraussetzt. Um also die Gleichung 3. Grades

$$aaa - 3\,bba = 2\,ccc$$

zu lösen, wo $b < c$, identifiziert er diese Gleichung mit der Gleichung

$$aaa - 3\,rqa = rrr + qqq,$$

die ihrer Form nach durch $a = r + q$ erfüllt wird. Dadurch kommt er zu Tartaglias Lösung:

$$rq = bb,\ rrr + qqq = 2\,ccc.$$

Vollständig wurde der Satz von der Darstellung der Koeffizienten durch die Wurzeln von Girard in seiner *Invention nouvelle* aufgestellt, die zwar (1629) einige Jahre vor dem Werke Harriots erschien, deren Ausarbeitung sicherlich aber nicht wenig jünger als dieses ist. Girard erkennt nicht nur negative Wurzeln neben den positiven an, sondern sieht auch ein, daß der Satz erst vollständig wird, wenn man nicht nur diese, sondern auch die imaginären Wurzeln, *racines enveloppées*, hinzunimmt, die er mittelst Quadratwurzeln negativer Zahlen ausdrückt. Seine Behauptung, eine algebraische Gleichung habe immer so viele Wurzeln dieser drei Arten, wie ihr Grad angibt, ist allerdings erst zu Anfang des 19. Jahrhunderts streng bewiesen worden; er war aber berechtigt, den Satz Vietas auf Gleichungen n-ten Grades mit n solchen Wurzeln zu erweitern, indem er einfach mit den imaginären Größen in derselben Weise rechnete, wie es früher schon Cardano getan hatte (S. 90).

Zu dem hier erwähnten Satze gab Girard eine Ergänzung durch die Angabe, wie Summen von Potenzen der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Koeffizienten ausgedrückt werden. Da er indessen für ihre Berechnung keine allgemeine Methode mitteilt, sondern die Ausdrücke für die Summen der Wurzelpotenzen nur bis zum 4. Grade aufstellt, so hat er diese gewiß lediglich durch successive Bestimmung der einfachen Summe, der Summe von Quadraten, Kuben u. s. w. gefunden.

Irgend welche andere Bedeutung kann er natürlich den imaginären Wurzeln nicht beilegen, als daß sie, abgesehen von ihrer gelegentlichen Entstehung durch die gewöhnliche Auflösung von Gleichungen, zur Vervollständigung seiner Sätze notwendig sind. Dagegen zeigt er geometrisch die Bedeutung negativer Wurzeln an einem Beispiel, das, von einer solchen Anwendung unabhängig, an sich von Interesse sein dürfte. Er bestimmt nämlich algebraisch eine „Einschiebung“, deren Ausführung mit Zirkel und Lineal schwer zu finden, doch aber im Altertum bekannt war. Die uns überlieferte rührt von einem gewissen Heraklit her, die Aufgabe soll aber schon in einer verloren gegangenen Schrift des Apollonius von den Einschiebungen behandelt worden sein. Sie bezweckt, durch einen Punkt der Halbierungslinie eines rechten Winkels eine Gerade zu ziehen, auf der die Schenkel des Winkels eine Strecke von gegebener Länge abschneiden.

Das Stück, welches diese Linie auf dem einen der Schenkel von einem festen Punkte desselben aus abschneidet, ist von einer Gleichung 4. Grades abhängig, deren Wurzeln lediglich in Quadratwurzeln irrational sind, und dieselbe Aufgabe wird später in der Geometrie Descartes' als Beispiel für die Anwendung von Gleichungen dieser Art verwendet. Girard zeigt, wie uns die Vorzeichen der verchiedenen Wurzeln angeben, nach welcher Seite die Teile von dem festen Punkte aus gerechnet werden müssen.

Der für die Auffindung und Kürzung durch lineare Faktoren so bedeutungsvollen Vereinigung aller Glieder auf einer Seite des Gleichheitszeichens begegnen wir bei keinem der genannten Schriftsteller. So stellt noch Girard das Glied höchsten Grades allein auf die eine Seite. Der in Frage stehenden Anordnung am nächsten kommt Harriot, dessen Bildung der Gleichungen darauf beruht, daß er wirklich weiß, das Produkt der linearen Faktoren, die man aus den Differenzen der Unbekannten und der Wurzel bildet, müsse gleich Null sein. Als diese Beobachtung erst vorlag und durch Girard auf negative und imaginäre Wurzeln ausgedehnt war, mußte sie bald dadurch einen sichtbaren Ausdruck gewinnen, daß man die Gleichung auch so schrieb, daß die rechte Seite Null wurde. Anfänglich tritt jedoch diese Form ohne einen solchen Zweck auf. Rein zufällig ist sie an einer Stelle bei Stifel. Bürgi stellt, einer Mitteilung von Kepler zufolge, erst zur Bestimmung der Sehne eines Siebentels des Bogens, dessen Sehne a ist, die Gleichung auf

$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = a$$

und bemerkt demnächst, daß sie für $a = 0$ die Siebeneckseite gibt. Nachdem man sich derart mehr zufällig von der Vorstellung befreit hatte, als ob notwendigerweise beide Seiten der Gleichung absolute Größen enthalten müßten, unterließ man nicht, alle Glieder in Fällen, in denen es von Nutzen sein konnte, auch wirklich nur auf einer Seite des Gleichheitszeichens zu vereinigen. Neper in seiner Algebra (erst 1839 gedruckt) und Descartes tun es öfters.

4. Die Trigonometrie und ihre Verbindung mit der Algebra.

Die Fortschritte in der reinen Mathematik, die wir betrachtet haben, hängen einerseits unter sich, andrerseits mit gewissen Aufgaben, die sich allmählich geltend machten, sowie mit bestimmten Betrachtungsweisen, die durch die wachsende Kenntnis der Mathematik des Altertums gewonnen wurden, derart zusammen, daß sich ihr Dasein ohne weiteres aus dem wissenschaftlichen Drange erklärt, in dasjenige tiefer und tiefer einzudringen, von dem man nun einmal irgendwie Bescheid weiß. Gleich-

zeitig lernte man freilich auch, dasjenige, was man fand, gelegentlich praktisch anzuwenden, und wurde dadurch hinwiederum verschiedentlich angeregt. Es erübrigt uns aber hier noch die Erwähnung einiger anderer, sehr bedeutender Fortschritte der Algebra, besonders solcher, die Vieta zu verdanken sind, und die allerdings auf eine augenfälligere Weise durch die Rücksicht auf die Anwendungen der Mathematik hervorgerufen sind. Da diese ihre Anforderungen zunächst an die Trigonometrie stellten, und gerade ihre Weiterentwickelung der Algebra zu gute kam, so müssen wir erst von dem ehemaligen Standpunkte und von den schnellen Fortschritten der Trigonometrie in der neueren Zeit reden.

Die Trigonometrie hatte sich im griechischen Altertum nur als Gefährtin der Astronomie entwickelt. Euklid, Menelaus und andere hatten zwar geometrische Untersuchungen an Figuren auf Kugeln angestellt; die sphärisch-trigonometrischen Aufgaben aber, die man mittelst der gefundenen Sätze löste, knüpften nicht an beliebige sphärische Dreiecke, sondern nur an bestimmte Figuren an, die eine unmittelbar astronomische Bedeutung hatten. Auch bei den Tafeln, die man herstellte, hatte man nur die Astronomie vor Augen. Die Trigonometrie war somit noch kein selbständiges Zwischenglied zwischen der Mathematik und der Astronomie. Dies Verhältnis blieb dann während der durch die Araber geförderten Entwickelung der Astronomie selbst und der auf sie angewendeten trigonometrischen Hilfsmittel lange Zeit bestehen. Erst bei dem Perser Naṣîr Eddîn († 1274) findet man eine selbständige Behandlung der Bestimmung sphärischer Dreiecke durch 3 gegebene Stücke, die namentlich durch die Benutzung des Vierecks, welches der Satz des Menelaus (Zeuthen: Altertum u. Mittelalter, S. 234) betrifft, sowie durch supplementäre Dreiecke erreicht wird, d. h. solche, in denen die Eckpunkte des einen die Pole der Seiten des anderen sind; bei passender Wahl unter den durch größte Kreise gebildeten Dreiecken sind nämlich die Seiten des einen Supplemente der Winkel des anderen.

Das Werk Naṣîr Eddîns war den Westarabern, sowie den europäischen Mathematikern noch bis vor wenigen Jahren unbekannt. Deshalb geschah es unabhängig von ihm, als Regiomontanus in seinem Buche von den Dreiecken, das 1533, 57 Jahre nach dem Tode des Verfassers, erschien, den Dreiecksbestimmungen eine von der Astronomie unabhängige Behandlung gab. Zwar empfing er die Hauptgrundlage dazu von den Arabern und einigen ihrer unmittelbaren europäischen Nachfolger; die systematische Durchführung und die Erörterung der verschiedenen Fälle, die eintreffen können, ist indessen zum Teil sein Eigentum. Die letztere ist freilich nicht vollständig, insofern er allerdings die Zweideutigkeit der Bestimmung eines Dreiecks durch einen Winkel, eine anliegende und eine gegenüber-

liegende Seite, aber nicht die der Bestimmung durch eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel bemerkt. Da er den Satz von den supplementären Dreiecken nicht kennt, so kann er diese Bestimmung nicht aus jener herleiten. Dagegen findet sich bei ihm der Satz, der heute durch die Formel

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

ausgedrückt wird, in der Gestalt ausgesprochen, die er erhalten muß, wenn man *sin vers* $(= 1 - \cos)$ statt *cos* benutzt und die trigonometrischen Größen für einen von 1 verschiedenen Halbmesser berechnet.*)

Regiomontanus führt in seiner Lehre von den Dreiecken die Bestimmungen auf den Gebrauch einer Sinustafel zurück. Er selbst hat jedoch zugleich eine Tangententafel berechnet, die umfangreicher war als einige schon existierende, indem er — wie bereits Abû'l Wafâ — wohl einsah, daß dadurch für die Berechnung eine große Erleichterung gewonnen werde. Diese beruht nicht allein darin, daß man, wo tg a zu verwenden ist, der Division von *sin* a durch *sin* $(90^0 - a)$ überhoben ist; man wird weitläufiger Berechnungen besonders auch dann ledig, wenn die Tangente eines gesuchten Winkels bekannt ist. Um sich aber wirklich der Vorteile dieser Tafel erfreuen zu können, hatte man andere Bestimmungsweisen nötig als diejenigen, die Regiomontanus früher nur im Hinblick auf den Gebrauch einer Sinustafel gegeben hatte. Dadurch waren seinen Nachfolgern natürlich neue Aufgaben gestellt.

Diese zu lösen und überhaupt die Trigonometrie so viel wie möglich

---

*) Im Anschluß an die meisten älteren Forscher hatte ich S. 313 meines öfters citierten Buches Al Battânî diese Leistung zugeschrieben. Das von ihm Gebotene war indes zufolge einer hinterlassenen Schrift des Ptolemäus, genannt *Analemma,* schon den Griechen bekannt. In dieser Schrift wird ein Stern senkrecht auf drei Ebenen: den Horizont, den Meridian und die auf beiden normale Ebene projiziert. Mit Hilfe von Umlegungen, die denen der deskriptiven Geometrie entsprechen, wird diese Darstellung benutzt, um aus den auf den Äquator bezogenen sphärischen Koordinaten des Sternes diejenigen herzuleiten, durch die er auf den Horizont bezogen wird, und dies geschieht sowohl graphisch als mittelst Sehnentafeln. Letztere Bestimmung fällt wesentlich mit derjenigen zusammen, die in der sphärischen Trigonometrie die Auflösung von Dreiecken durch drei Stücke bezweckt. Von diesen ist in den Fällen, wo die Deklination 0 ist, das eine ein rechter Winkel; es wird aber auch die allgemeinere Aufgabe behandelt, die in der sphärischen Trigonometrie die allgemeine Bestimmung einer Seite durch die beiden anderen und den gegenüberliegenden Winkel fordert. Al Battânî tat dasselbe, indem er nur statt einer Sehnentafel eine Sinustafel gebrauchte. Die Berechnung wird sodann wesentlich dieselbe wie diejenige, welche zuerst Regiomontanus in einer bestimmt formulierten Regel für sphärische Dreiecke aufstellt.

zu vervollkommnen, dazu forderten, wie wir S. 3 und bei der Besprechung von Koppernikus und Tycho Brahe ausgeführt haben, die sich steigernden verschiedenartigen Bedürfnisse der Astronomie nachdrücklich auf. Die Astronomie stellte der Trigonometrie neue Aufgaben und forderte Lösungen, die bei der geringsten Arbeit zu möglichst großer Genauigkeit führen sollten. Dies Ziel zu erreichen, dazu trugen denn auch sowohl Astronomen wie Mathematiker bei. Koppernikus hat in zwei trigonometrischen Kapiteln seines Hauptwerkes *De revolutionibus* (1543), die schon 1542 von seinem Schüler Rhäticus für sich herausgegeben wurden, selbständig einige Hauptsätze der sphärischen Geometrie begründen müssen, da er Regiomontanus bei der Ausarbeitung noch nicht kannte. Die geometrische Begründung knüpft erst er besonders an das Dreikant an, welches das Dreieck vom Zentrum aus projiziert, im Gegensatz zu älteren Begründungen, die sich zunächst dem Analemma des Ptolemäus anschließen (siehe die Note S. 112). Sein Sinn für trigonometrische Verbesserungen gibt sich übrigens dadurch kund, daß er es zweckmäßig fand, in seinem Exemplar der Tangententafel des Regiomontanus eine Sekantentafel hinzuzufügen, so daß die Division mit *sin* oder *cos* durch eine Multiplikation ersetzt wird. An die Öffentlichkeit ist eine Sekantentafel erst in dem *Canon doctrinae triangulorum* von Rhäticus (1551) getreten, wo sie mit einer Sinustafel und einer ausführlicheren Tangententafel verbunden ist, die unter steter Benutzung eines Halbmessers $= 10^7$ von Minute zu Minute fortschreitet.

Die Tafeln sind in der jetzt gebräuchlichen Weise so eingerichtet, daß man gleichzeitig *sin* und *cos* eines Winkels und *cos* und *sin* des Komplementwinkels ablesen kann; die Benennungen aber, die mit der Darstellung der trigonometrischen Größen als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks verbunden werden, sind neu und zugleich von den heutigen verschieden. Die Bezeichnungen Tangens und Sekans sind erst von Thomas Fincke in seiner *Geometria rotundi* (1583) eingeführt, einem Werke, dessen Verbreitung sich sowohl daraus ergibt, daß sich diese Benennungen erhalten haben, als aus der Art und Weise folgt, in der sich ihm die nächstfolgenden trigonometrischen Schriftsteller anschließen. Er selbst schließt sich eng an Regiomontanus an, stellt aber doch einen neuen und für die praktischen Berechnungen sowohl vor als nach der Erfindung der Logarithmen sehr zweckmäßigen Satz auf, den wir jetzt durch die Dreiecksformel

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

ausdrücken. Er enthält die Umwandlung und Verbesserung der Berechnung zweier Winkel bei Ptolemäus, wenn deren Summe und das Verhältnis ihrer

Sehnen gegeben sind, die man eben mittelst der neuen Tangententafeln erhalten kann.

Wie gut sich überhaupt der Apparat zur Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke seit Regiomontanus entwickelt hatte, kann man aus den in dem trigonometrischen Manuskript Tycho Brahes von 1591 (S. 17) angegebenen Regeln für die Bestimmung von Dreiecken aus drei gegebenen Stücken ersehen. Von dem darin enthaltenen prosthaphäretischen Berechnungsverfahren werden wir später zu reden haben. Hier wollen wir nur anführen, daß Tycho Brahe von dem Gebrauch supplementärer Dreiecke einigermaßen Bescheid weiß, da er für die Bestimmung eines Winkels in einem sphärischen Dreieck, wenn die gegenüberliegende Seite und die beiden anderen Winkel gegeben sind, dasselbe Berechnungsverfahren angibt, als wenn eine Seite aus dem gegenüberliegenden Winkel und den beiden anderen Seiten bestimmt werden soll. Freilich stimmt dies nicht mit der Formel

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

kann jedoch nicht als ganz unrichtig bezeichnet werden. An einer anderen Stelle des Manuskriptes nennt er nämlich, wenn ein Winkel $v > 90^0$ ist, $v - 90^0$ sein Komplement, so daß der „sinus des Komplementes“ nicht unserm jetzigen cosinus, sondern $-\cos v$ gleich wird. Tycho Brahes Angabe wird somit richtig, wenn entweder einer der Winkel B und C oder sowohl a als A stumpf sind. In einer Zeit, in der man den Größen keine Vorzeichen gab, erforderte die genaue Fassung der Sätze eine weitläufige Zerlegung in die verschiedenen Fälle. Diese versucht Tycho Brahe zwar an mehreren Stellen, ohne jedoch Vollständigkeit zu erreichen. So setzt die Formel

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{a \cos B - c},$$

die eine andere seiner Regeln ausdrücken würde, voraus, daß A stumpf ist, und daß $tg\ A$ dasjenige bezeichnet, was wir heute $tg\ (180^0 - A)$ nennen. Daß aber trotz vorkommender Schreibfehler und ungenauer Abkürzungen die in diesem Manuskripte enthaltenen Regeln von Tycho Brahe und seinen Gehilfen richtig gebraucht worden sind, darf man daraus schließen, daß sie sie hauptsächlich auf praktisch vorkommende Fälle müssen angewendet haben; wo eine einzelne Regel, für welche man solche vielleicht nicht hatte, mit aufgenommen ist, ist gewiß auch sie an Zahlenbeispielen geprüft worden. Auf ein solches wird nämlich in einer der Regeln ausdrücklich verwiesen, obgleich das Manuskript in der auf uns gekommenen Gestalt, die nicht zur Veröffentlichung bestimmt war, dergleichen sonst weder bei dieser noch bei den anderen Regeln darbietet.

Unvollständig werden diese und mehrere andere seiner Angaben jedoch dadurch, daß sie entweder erfordern, daß gewisse Winkel spitz, oder daß sie stumpf sein sollen. Diese Unvollständigkeit konnte aber bei der Anwendung keine besonderen Beschwerden verursachen, wenn man die den einzelnen zu behandelnden Fällen entsprechende Figur zeichnete und aus ihr ersah, ob die betreffenden Größen addiert oder subtrahiert werden sollten; und das hat man gewiß in einer Zeit nicht versäumt, als Figuren noch in mehreren Beziehungen unsere Formeln vertraten. Daß sich übrigens die Vollständigkeit unserer Formeln zu damaliger Zeit überhaupt nicht mit der löblichen Kürze des Manuskriptes Tycho Brahes vereinigen ließ, ist aus der ungeheuren Weitläufigkeit ersichtlich, die in dem von Otho herausgegebenen und fortgesetzten *Opus Palatinum* (1596) des Rhäticus nötig ist, um wirklich alle möglichen Fälle und alle möglichen Auflösungen zu erschöpfen.

Die Regeln Tycho Brahes waren im großen und ganzen so gut und zweckmäßig, wie man es damals von jemandem erwarten konnte, der noch nichts von dem 1579 erschienenen *Canon mathematicus* Vietas wußte. Die Vorgänger, auf deren trigonometrischen Arbeiten Vieta weiter baute, waren Regiomontanus und Rhäticus, dessen *Canon* von 1551 er bezüglich der Form der Einführung der trigonometrischen Größen befolgte. Die durch die Arbeiten dieser Gelehrten gestellte Aufgabe: auf die zweckmäßigste Weise die verschiedenen Bestimmungen der sonstigen Stücke eines ebenen oder sphärischen Dreiecks, wenn deren drei gegeben sind, mittelst aller trigonometrischen Größen, *sinus* und *tangens* und der entsprechenden komplementären Größen, zu gewinnen, ist von Vieta in seinem soeben angeführten *Canon mathematicus* und in einer 1592 erschienenen Schrift durchaus gelöst. Die hierzu dienenden verschiedenen Regeln versteht Vieta, der Schöpfer der mathematischen Formel, auch in klarer und anschaulicher Weise darzustellen, allerdings nicht in einer besonderen Zeichensprache, sondern durch eine tabellarische Zusammenstellung der Glieder der Proportionen, die dabei benutzt werden.

Dagegen gibt er uns nur geringe und, wo er es tut, nicht besonders klare und verständliche Auskunft über die Begründung. Von den Hilfsmitteln, die er benutzt, ist besonders die Anwendung der Dreiecke hervorzuheben, die von gröfsten Kreisen mit den Ecken eines sphärischen Dreiecks als Polen gebildet werden; unter diesen hebt er aber nicht, wie es Naṣîr Eddîn getan hatte, deutlich das eigentliche Polardreieck als dasjenige hervor, dessen Seiten und Winkel Supplemente zu denen des vorliegenden sind. Seine Eigenschaften sind in Europa erst später von Snellius klar und ausdrücklich entwickelt worden.

Sowohl zu der Aufstellung der Regeln für die Berechnung von Dreiecken

wie zu den numerischen Berechnungen und tabellarischen Arbeiten, von denen wir später zu reden haben, bedurfte es einer bedeutenden Entwickelung der Goniometrie oder der Lehre von dem Zusammenhang zwischen den verschiedenen trigonometrischen Größen, welche Winkeln entsprechen, die auf einfache arithmetische Weise auseinander gebildet werden. An dem reichen Erfolg, den diese Untersuchungen zu der hier behandelten Zeit brachten, hat Vieta den hervorragendsten Anteil. Seine eingehende Behandlung der Algebra und der Gleichungen verlieh ihm dazu weit bessere Hilfsmittel als allen anderen. Sein Interesse an der Algebra war gewiß ursprünglich auch durch die Rücksicht auf den Nutzen hervorgerufen, der daraus der Trigonometrie und folglich der Astronomie erwachsen sollte. Diese Hilfe vergalt die Trigonometrie der Algebra durch Vieta außerordentlich reichlich. Nicht nur war hier wie überall in ähnlichen Fällen jede neue Anwendung oder Aufgabe eine Anregung zu neuen Untersuchungen, sondern die gewonnenen goniometrischen Ergebnisse selbst führten unmittelbar zu einem wichtigen algebraischen Erfolge. Sie ermöglichten namentlich die Auflösung der Gleichung 3. Grades in dem irreduziblen Falle, sowie die Bildung einer wichtigen Klasse von algebraisch auflösbaren Gleichungen höherer Grade. Gleichzeitig lieferten sie einen wesentlichen Teil des Materials für die später sich entwickelnde Funktionenlehre.

Die goniometrischen Ergebnisse, durch welche dies geschieht, sind hauptsächlich die Ausdrücke für die *sinus* (oder die Sehnen) und die *cosinus* multipler Bogen. Für sie leitet Vieta in seinen Anmerkungen zur *Logistica speciosa* mittelst der bekannten Bestimmungen von *cos* $(x + y)$ und *sin* $(x + y)$ folgende Formeln ab:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{2} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \cdots,$$

$$\sin mx = m \cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots$$

Vieta stellt jedoch die trigonometrischen Funktionen nicht durch die jetzt gebräuchlichen Zeichen dar, sondern als Verhältnisse der Seiten rechtwinkliger Dreiecke, und ist, wie früher erwähnt, auch nicht im stande, die allgemeinen Formeln in Zeichen aufzustellen; er erklärt aber ganz allgemein, wie die bewußten Ausdrücke aus den Binomialkoeffizienten zu bilden sind.

Außerdem lehrte Vieta, cos mx lediglich durch cos x und, je nachdem m gerade oder ungerade ist, cos mx und sin mx durch sin x auszudrücken. Die dazu geeigneten Regeln, die nach dem Tode Vietas mit Beweisen von seinem Schüler Anderson veröffentlicht worden sind, bezwecken eine allmähliche Bildung und sind dieselben, die wir ausdrücken durch die Gleichungen

$$\cos mx = 2 \cos x \cos (m-1)x - \cos (m-2)x,$$
$$\sin mx = 2 \cos x \sin (m-1)x - \sin (m-2)x,$$
$$\sin mx = 2 \sin x \cos (m-1)x + \sin (m-2)x,$$
$$\cos mx = -2 \sin x \sin (m-1)x + \cos (m-2)x.$$

Die in diesen Formeln enthaltenen Regeln werden zur Bildung der wirklichen Ausdrücke für die niedriegeren Werte von m und teilweise zur Aufstellung von Tafeln für die Koeffizienten angewendet, die ebenso wie die Binomialtafel Stifels (S. 102) deutlich die allmähliche Bildung zeigen. Die Tafeln, von welchen sich die erste bis auf $m = 21$ erstreckt, lassen sich alle ganz mechanisch so weit, wie man will, fortsetzen. Bei ihrem Gebrauch ist jedoch zu bemerken, daß Vieta durch *cos x* und *sin x* nicht unmittelbar *cos mx* und *sin mx* ausdrückt, wie wir es getan haben, um ihre Übereinstimmung mit den nunmehr allbekannten Formeln klarzulegen, sondern 2 *cos mx* und 2 *sin mx* durch 2 *cos x* und 2 *sin x*, also Supplementsehnen und Sehnen von 2 *mx* und 2*x*.

Betrachtet man in den derart gebildeten Gleichungen 2 *cos mx* oder 2 *sin mx* als gegeben, so werden sie *m*-ten Grades in Bezug auf die Unbekannte 2 *cos x* oder 2 *sin x*. Zwar ist der nächstliegende Zweck der Gleichungen, zu dem sie Vieta auch benutzt, die Berechnung der Sinus oder der Sehnen kleiner Bogen, welche für die Berechnung trigonometrischer Tafeln die Grundlage bildet; die hier folgenden Anwendungen zeigen aber, daß Vieta gleichzeitig auch für den großen algebraischen Wert dieser Gleichungen einen offenen Blick hatte.

Eine dieser Anwendungen, Vietas Auflösung der Gleichung 3. Grades in dem irreduziblen Falle, haben wir schon (S. 91) vorweggenommen. Sie ist eine unmittelbare Anwendung davon, daß, wie seine Tabelle angibt,

$$2 \cos 3x = (2 \cos x)^3 - 3 (2 \cos x).$$

Er führt dadurch die Gleichungen 3. Grades, die durch Kubikwurzelausziehung aus Ausdrücken, welche selbst Quadratwurzeln enthalten, also durch Multiplikation des Würfels nicht gelöst werden können, auf die Dreiteilung des Winkels zurück. Vieta begnügt sich jedoch nicht damit, dies Zurückgehen auf die beiden berühmten Probleme des Altertums festzustellen. Ebenso wie er an anderer Stelle diejenigen Konstruktionen algebraischer Ausdrücke klarlegt, durch welche die Wurzeln von Gleichungen 2. Grades mittelst Lineal und Zirkel graphisch dargestellt werden, so gibt er auch seiner Auflösung jener beiden Klassen von Gleichungen 3. Grades durch die geometrische Konstruktion der beiden Aufgaben, auf die sie zurückgeführt sind, einen antiken Abschluß. Er entschließt sich, sie durch ein antikes Mittel, nämlich durch Einschiebungen, d. h. durch Konstruktion solcher Geraden zu lösen, die durch

gegebene Punkte gehen und auf welchen gegebene Kurven Strecken von gegebener Länge abschneiden (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 79—80). Für die Multiplikation des Würfels oder die Konstruktion zweier geometrischen Mittel lagen ihm in der damals bekannten griechischen Literatur Vorbilder vor. Dies war jedoch nicht mit der Winkeldreiteilung der Fall, die er benutzt; sie ist gleichwohl dieselbe, welche durch eine arabische Tradition, für die Vieta jedenfalls nicht die heute bekannte Quelle besaß, dem Archimedes beigelegt wird. In Vietas Behandlung fällt sie im wesentlichen auch mit einer verwandten Konstruktion zusammen, die sich in der Schrift von Jordanus Nemorarius über Dreiecke und dann bei dem Herausgeber Euklids aus dem 13. Jahrhundert, Campanus, findet.

Es ist minder wesentlich, ob Vieta seine Dreiteilung des Winkels bei einem dieser Schriftsteller fand oder selbst aufs neue erfand; interessant aber ist es, wie er sie in einem *Supplementum geometriae* zu einem von den vorhin angeführten allgemeinen Formeln unabhängigen Beweise seiner Lösung der Gleichung 3. Grades in dem irreduziblen Falle benutzt. Diese Konstruktion spielt somit in der Geschichte der Mathematik eine merkwürdige Rolle. Im Altertum und bei den Mathematikern des 13. Jahrhunderts diente sie unmittelbar zur Dreiteilung eines Winkels; wahrscheinlich schon im Altertum, jedenfalls aber bei den Arabern war sie ein Übergangsglied zur Lösung derselben Aufgabe durch Kegelschnitte, und bei Vieta wird sie zum unmittelbaren Beweise seiner Lösung der Gleichung 3. Grades in dem Falle benutzt, dessen Behandlung seinen nächsten Vorgängern nicht hatte gelingen wollen.

Vietas Beweis verdient schon deshalb eine genauere Besprechung.

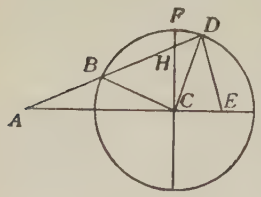

Fig. 1.

Sei in Fig. 1 der in 3 Teile zu teilende Winkel ECD, den wir v nennen. Um seinen Scheitelpunkt C als Mittelpunkt wird ein Kreis beschrieben, der den einen Schenkel in D schneidet; von D aus wird die Gerade DBA gezogen, die zum zweiten Male den Kreis in B und die Verlängerung des Schenkels CE in A schneidet, so daß AB dem Kreishalbmesser gleich ist, den wir r nennen wollen. Dann ist wie bei Archimedes $\sphericalangle CAB = \frac{1}{3} v$. Vieta benutzt zugleich den auf CE senkrechten Durchmesser FG, der DB in H schneidet. Man sieht, daß auch $BH = r$ ist; folglich könnte die Aufgabe auch mittelst einer Geraden von der Länge r gelöst werden, die so zwischen den Kreis und CF „einzuschieben“ wäre, daß die Verlängerung durch D ginge. Das ist die Lösung des Jordanus. Zieht man ferner die Geraden BC und $DE = DC$, so sieht man, daß $CE = 2r \cos v$,

$AC = 2r \cos \frac{v}{3}$. Wir setzen, wie bereits S. 91 geschehen, $CE = a$, $AC = x$. Nun zeigt die Figur durch Anwendung des Potenzsatzes, daß

$$\begin{aligned} r^2 &= CH^2 + FH \cdot HG \\ &= CH^2 + BH \cdot HD \\ &= 4r^2 - x^2 + \frac{ar^2}{x}, \end{aligned}$$

wobei die Umwandlung des letzten Gliedes darauf beruht, daß $\frac{BH}{HD} = \frac{x}{a}$ und $BH = AB = r$ ist. In x, a und r erhält man also folgende Gleichung:

$$x^3 = 3r^2x + ar^2,$$

d. i. eben diejenige, die durch die angegebenen Werte von a und x gelöst wurde. Unter einer ähnlichen geometrischen Form beweist Vieta die Richtigkeit der S. 91 angegebenen Wurzeln der Gleichung, die durch Vertauschung von x mit $-x$ entsteht.

Die Dreiteilungsaufgabe hat ebenfalls Vieta durch Bildung der Gleichung

$$3x - x^3 = a$$

behandelt, in der wir jedoch den Halbmesser = 1 gesetzt haben, und die dann durch $a = 2 \sin v$, $x = 2 \sin \frac{1}{3} v$ erfüllt wird. Die zwei positiven Wurzeln erklärte er sodann als Sehnen von $\frac{2v}{3}$ und $\frac{360^0 - 2v}{3}$, während er die negative Wurzel, die den doppelten Sinus eines Bogens darstellen würde, der größer als 180^0 ist, wie gewöhnlich überhaupt nicht berücksichtigt. Auf ähnliche Weise behandelte er die entsprechenden Fünf- und Siebenteilungsaufgaben. Man versteht so, wie wohl gerüstet Vieta war, um augenblicklich die folgende Aufgabe zu lösen, die Adriaen van Roomen kurz darauf als Herausforderung an die Mathematiker der ganzen Welt stellte. Sie verlangte die Auflösung einer Gleichung 45. Grades mit gegebenen Zahlenkoeffizienten, nämlich

$$45x - 3795x^3 + \cdots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a,$$

besonders in dem Spezialfalle, in welchem

$$a = \sqrt{1\tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}}.$$

Die Aufgabe wurde in Stevins Bezeichnungsweise gestellt, die Vieta auch bei einer Gleichung so hohen Grades benutzen mußte. Van Roomen teilte zur Erleichterung die Resultate mit, zu denen man bei gewissen anderen Werten von a gelangt, beispielsweise, daß

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

den Wert

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

liefern würde.

Es wird nun berichtet, daß sich Vieta im Oktober 1594 mit Heinrich IV., in dessen Diensten er damals stand, in Fontainebleau aufhielt. Während eines Gespräches zwischen dem König und dem niederländischen Gesandten über die bedeutendsten Männer des Reiches bemerkte dieser, Frankreich habe gewiß keinen Mathematiker, da van Roomen unter denen, an die er seine wissenschaftliche Herausforderung in seiner Schrift besonders gerichtet, keinen Franzosen angeführt habe. „Doch", antwortete der König, „ich habe einen ganz ausgezeichneten; rufet Herrn Vieta!" Dies geschah, und der Gesandte holte van Roomens Schrift. Vieta las sie, schrieb sogleich eine Lösung auf und schickte am folgenden Tage noch 22 andere ein.

Daß Vieta, da er nun einmal die Regeln für die Bestimmung der Sinus oder Sehnen multipler Bogen kannte, die Lösung sogleich erraten und leicht verifizieren, ja sogar einen Fehler in der Ausdrucksweise und einen Druckfehler in den Zahlen der gestellten Aufgabe berichtigen konnte, nimmt kein Wunder. Er sah sofort, daß der verlangte Wert die Fünfzehnecksseite oder die Sehne von 24^0 sei, und die Koeffizienten des ersten und letzten Gliedes mußten ihm sogleich verraten, daß x, wenn von seiner Bestimmung überhaupt die Rede sein konnte, die Sehne eines Fünfundvierzigstels dieses Bogens, also die Sehne von $\frac{8^0}{15}$ sein müsse. Hiermit war die Aufgabe gelöst, denn es war nur eine geometrische Bestimmung der Wurzel verlangt.

Der gründliche Algebraist, der Vieta war, gab sich aber damit noch nicht zufrieden. Die 22 anderen Lösungen, die er am nächsten Tage mitteilte, waren 2 sinus $\frac{p\,360^0 + 12^0}{45}$ für $p = 1, 2, \cdots, 22$. So gelang es ihm, wie in dem soeben genannten einfacheren Falle, die positiven Wurzeln sämtlich heranzuziehen.

Noch ein wichtiges algebraisches Interesse wußte Vieta der gestellten Aufgabe abzugewinnen. Aus ihrem trigonometrischen Ursprung folgt nämlich, daß sie auch durch successive Auflösung zweier Gleichungen 3. Grades, die je einer Dreiteilung entsprechen, und durch die einer Gleichung 5. Grades, die einer Fünfteilung des zu einer Sehne gehörigen Bogens entspricht, also, wenn die gegebene Sehne a ist, auch durch Auflösung der Gleichungen

$$3z - z^3 = a,$$
$$3y - y^3 = z,$$
$$5x - 5x^3 + x^5 = y$$

lösbar sein muß.

Wir fügen hinzu, daß dem für Vieta so günstigen Ausfalle dieses Wettstreites ein Ereignis folgte, das ihm auf einem ganz anderen Gebiete

ebensoviel Ruhm verlieh. Er stellte die Gegenaufgabe, die Konstruktion eines drei gegebene Kreise berührenden Kreises wiederzufinden, die schon Apollonius in seinem verloren gegangenen Werke von den Berührungen ausgeführt hatte, das uns nur aus seiner Besprechung bei Pappus bekannt ist. Van Roomen konnte die Aufgabe nur mit Hilfe der Kegelschnitte lösen, die jeder für sich der geometrische Ort der Mittelpunkte aller der Kreise werden, welche zwei der gegebenen Kreise berühren; Vieta gab aber demnächst in einer Schrift, in der er sich den Ehrennamen eines Apollonius Gallus beilegte, eine elegante, nur mit Zirkel und Lineal ausführbare, also rein geometrische Konstruktion. Van Roomen trug diese Niederlage auf die schönste Weise, indem er ein eifriger Bewunderer Vietas wurde, den er bald darauf sogar besuchte.

In Verbindung mit den von Vieta gefundenen Beziehungen zwischen Sehnen und trigonometrischen Funktionen von Bogen, die zueinander in einfachen Zahlenverhältnissen stehen, nennen wir hier die Herleitung eines Ausdruckes für π — die allerdings die Theorie der Gleichungen nichts angeht. Wenn wir mit r, bez. ϱ_n den Radius des einem regulären n-eck vom Flächeninhalte F_n um-, bez. eingeschriebenen Kreises bezeichnen, so ist, wie leicht ersichtlich,

$$F_n : F_{2n} = \varrho_n : r = \cos \frac{180^0}{n}.$$

Für $n = 4$ hat man $F_4 = 2r^2$. Setzt man nun n der Reihe nach $= 4, 8, 16 \cdots$ und bemerkt, daß F_{2n} den Inhalt πr^2 des Kreises als Grenzwert besitzt, so erhält man durch Multiplikation der so gebildeten Gleichungen

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^0}{2} \cdot \cos\frac{90^0}{4} \cdot \cos\frac{90^0}{8} \cdots$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots$$

Der Ausdruck Vietas, der in seiner Beantwortung einiger vermeintlichen Lösungen der Quadratur des Kreises steht, enthält mehrere Schreib- oder Druckfehler, die in verschiedene Darstellungen mit übergegangen sind, und vor denen wir deshalb hier warnen müssen. Bemerkenswert ist die gewonnene Bestimmung dadurch, daß der Inhalt des Kreises als Grenzwert eingeführt wird, und daß sie zugleich die erste Anwendung eines unendlichen Produktes ist. Daß dies aber konvergent wird, folgt eben aus dem bewiesenen Satze, wenn man nur voraussetzt oder in anderer Weise dartut (wie z. B. Euklid), daß der Inhalt des Kreises eine genau bestimmte Größe hat, die der Grenzwert der einbeschriebenen regulären Vielecke ist, wenn deren Seitenzahl ins Unendliche vermehrt wird. Eines direkten Beweises der Konvergenz würde man erst bedürfen, wenn man sich

umgekehrt auf diesem Wege etwa die Sicherheit verschaffen wollte, daß der Inhalt des Kreises einen endlichen und bestimmten Wert habe. Daran dachte Vieta selbstredend nicht, und der Konvergenzbeweis wird deshalb hier auch nicht vermißt.

Wenn wir auch von Vieta als von demjenigen geredet haben, der namentlich in algebraischer Beziehung die Winkelteilungsgleichungen am ergiebigsten behandelt hat, so zeigt doch die Aufgabe van Roomens, die ohne die geringste Bekanntschaft mit den Arbeiten Vietas gestellt wurde, daß dieser nicht der einzige war, der Kreisteilungen bewerkstelligte und für ihre Bedeutung Sinn hatte. Es kommen noch mehrere in Betracht. Besonders haben wir nach dieser Seite hin Bürgi hervorzuheben, der jedoch von den niederländischen Mathematikern Einwirkungen erfahren zu haben scheint, sowie Kepler, durch den wir Bürgis Untersuchungen kennen. Beide Gelehrte hatten wie Vieta sowohl auf die Zerlegung der Gleichungen in solche niedrigeren Grades, als auf die Bedeutung der verschiedenen Wurzeln für das Kreisteilungsproblem ihr Augenmerk gerichtet. So hebt Kepler, gewiß nach Bürgi, in Bezug auf die S. 110 besprochene Gleichung, die, wenn die rechte Seite Null wird, zur Bestimmung der Siebeneckseite dient, hervor, daß ihre übrigen Wurzeln Diagonalen des eigentlichen Siebenecks oder Seiten des Sternsiebenecks sind. Vielleicht hängt mit dieser Beobachtung zusammen, daß Kepler die aus dem Altertum bekannte Angabe der eigentlichen regulären Vielflächner um zwei vermehrt hat, deren Seitenflächen einander, wie die Seiten eines Sternvielecks, schneiden. Poinsot hat im 19. Jahrhunderte dargetan, daß es ihrer sogar drei gibt. Sie sind von den halbregulären Vielflächnern des Archimedes verschieden.

Bürgi hat die Winkelteilungsgleichungen tabellarisch bis zu derjenigen zusammengestellt, welche die 20teilung enthält. Von dem Gebrauche, den er besonders vor Augen hatte, werden wir im nächsten Abschnitte reden.

5. Numerische Berechnungen vor Erfindung der Logarithmen.

Obgleich die algebraischen Gleichungen in der allgemeinen Darstellung Vietas ein gewisses selbständiges Interesse gewährten, so vergaß er selbst doch keineswegs, daß der Endzweck ihrer Untersuchung die numerische Berechnung der Wurzeln von Gleichungen mit gegebenen Zahlenkoeffizienten sein müsse. Die Umgestaltungen sollten immer auch dazu dienen, einfachere Formen herzustellen, durch welche diese Berechnung wesentlich erleichtert, oder doch nach ein für allemal festgestellten Regeln ausführbar würde. Am bequemsten ließ sich das erreichen, wenn man die Lösungen durch Wurzeln binomischer Gleichungen ausdrücken oder wenigstens auf trinomische Gleichungen zurückzuführen lernte. Ebenso behielt man bei der Aufstellung von Kreis- und

Winkelteilungsgleichungen nicht nur die Möglichkeit der Berechnung überhaupt, sondern durchaus bestimmte und wichtige praktische Berechnungen im Auge, so vor allem die Berechnung von trigonometrischen Tafeln und von π. Dies gilt ganz besonders von Bürgis Gebrauch dieser Gleichungen, die durch Vieta zugleich so großes theoretisches Interesse erhalten hatten.

Bevor wir indes zur Betrachtung des in dieser Beziehung Erreichten übergehen, wollen wir untersuchen, welche allgemeinen Rechenmittel damals zur Verfügung standen. Schon bei Regiomontanus hatte der Gebrauch des Decimalsystems die früher für astronomische und trigonometrische Berechnungen gebräuchliche Sexagesimalteilung abgelöst, mit Bezug auf welche noch seine nächsten Vorgänger den Halbmesser = 600000 setzten. Indem Regiomontanus den Halbmesser nicht = 1, sondern = 10^7 setzte, gewann er in den meisten Fällen dieselben Vorteile wie beim Gebrauch von Decimalbrüchen, die dadurch einfach in ganze Zahlen übergehen. Man war so geradezu darauf hingewiesen, noch weiter zu gehen, indem man sich, wenigstens für den Augenblick, eine noch höhere Potenz von 10 als Einheit vorstellte, so daß nun der Bruch den Ganzen gegenüber wirklich als Decimalbruch auftritt. Ganze und Decimalen ließen sich dann durch gewisse Zeichen unterscheiden. Nach dieser Richtung waren schon zu Anfang des 16. Jahrhunderts von dem deutschen Cossisten (Algebraisten)und Rechenbuchverfasser Rudolff Vorschläge ausgegangen, und auf diese Weise führte Vieta wirklich Decimalen in seine Rechnungen ein. So gibt er die Zahl, die wir jetzt π nennen, an, indem er behauptet, die Hälfte der Kreisperipherie mit dem Halbmesser 100000 sei gleich 314 159 $\underline{265\ 56}$, und hebt die Vorteile einer solchen Anordnung ausdrücklich hervor, bei der man, je nachdem man sich nach der einen oder der andern Seite wendet, Zehnteln, Hundertsteln und Tausendsteln oder Zehnern, Hundertern und Tausendern begegnet. Vieta bedient sich übrigens an anderer Stelle, um die Ganzen von den Decimalen zu trennen, eines senkrechten Striches oder begnügt sich damit, diese mit kleineren Lettern drucken zu lassen.

Unter den verschiedenen Männern, die, wie es scheint, selbständig auf denselben Gedanken gerieten, ist vor allen Stevin zu nennen, der in dem Gebrauch von Decimalbrüchen nicht nur ein nützliches Hilfsmittel für gelehrte Rechenmeister sah, sondern in seinem schon genannten Büchlein *La Disme* sogar eifrig für die Einführung der Zehnteilung von Münzen, Maßen und Gewichten eintrat, was ja in den einfachsten praktischen Rechnungen der Einführung von Decimalbrüchen gleichkommt. In seiner Rechnung mit eigentlichen Decimalbrüchen bezeichnet er in Übereinstimmung mit seiner schon angegebenen Bezeichnung von Potenzen die Einer, Zehntel, Hundertstel u. s w. durch ⓪, ①, ② ⋯, Zeichen, welche bei der Ausführung der

Rechnungen über die entsprechenden Zahlenkolumnen gesetzt werden. Er zeigt dann, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Decimalbrüchen auszuführen seien. Jobst Bürgi begnügt sich damit, die Einer durch eine untergesetzte Null zu bezeichnen, oder führt zwischen Einer und Zehntel ein Trennungszeichen ein. Von einem Vorschlag abgesehen, der sich schon bei dem großen arabischen Trigonometer Abû'l Wafâ findet, ist er übrigens der erste, der für die Vorteile Sinn hat, welche daraus erwachsen, daß man in trigonometrischen Tafeln den Halbmesser nicht einer Potenz von 10, sondern der Einheit selbst gleich setzt. Dadurch werden ja tatsächlich alle Regeln vereinfacht, indem die eine Größe für die Rechnung wegfällt; die daraus fließenden Schwierigkeiten aber verschwinden durch den Gebrauch von Decimalbrüchen. Das Rechnen mit ihnen führt zur abgekürzten Multiplikation; ein Beispiel zeigt uns, wie Bürgi sie ausführt.

Was sodann die numerische Berechnung von Wurzeln einer Gleichung betrifft, so kam es bei den Gleichungen, die man algebraisch lösen konnte, zuvörderst auf die Ausführung von Wurzelausziehungen an. Quadrat- und Kubikwurzelausziehung waren von früher her bekannt; um wesentlich auf dieselbe Art und Weise höhere Wurzeln auszuziehen, hatte man nur nötig, die Binomialkoeffizienten zu kennen. Für ihre Bildung hatte bereits Stifel in einer Form, die wir (S. 102) hervorgehoben haben, allgemeine Regeln gegeben, und zwar im vollen Bewußtsein der Anwendbarkeit dieser Koeffizienten für die Wurzelausziehung. Für die Ausführung der Rechnung selbst haben außer ihm noch Tartaglia, Cardano, Vieta und andere besondere Regeln aufgestellt.

Wir werden uns hierbei um so weniger aufhalten, weil die Wurzelausziehung speziell in der numerischen Berechnung der Wurzel einer Gleichung mit mehr als zwei Gliedern einbegriffen ist. Von einer solchen Berechnung hatten schon im Mittelalter Leonardo von Pisa und später die Araber in Persien Proben gegeben (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 320 u. 310). Sie kann durch die *regula duorum falsorum* geschehen, also durch einfache Interpolation genauerer Näherungswerte zwischen die bereits gefundenen (S. 275 des angeführten Buches), oder im Anschluß an das gewöhnliche Wurzelausziehungsverfahren. Ersteres gilt von der *Regula aurea,* die Cardano in der *Ars magna* aufstellt. Stevins Methode liefert die Ziffern der gesuchten Zahl und sodann die Decimalen nach und nach durch bloße Versuche, ohne daß eine Regel zur Verringerung der Anzahl dieser Versuche aufgestellt wird. Das Verfahren Vietas, das sich der gewöhnlichen Wurzelausziehung am meisten nähert, ist am vollständigsten entwickelt; wir wollen es deshalb kurz erklären.

Vor allen Dingen sorgt Vieta, sofern es ihm möglich ist, dafür, daß

die zu berechnende Wurzel wohl definiert und von anderen gesondert ist. Er besitzt zwar für die Wurzeltrennung keine allgemeinen Regeln, hat es aber wenigstens verstanden, sie bei trinomischen Gleichungen durchzuführen, auf die er denn auch andere, wenn er kann, gern zurückführt. Wir haben S. 104 gesehen, daß er es vermochte, die Anzahl der Wurzeln einer solchen Gleichung zu bestimmen. Am liebsten behandelt er solche, die nur eine (positive) Wurzel haben. Gibt es deren zwei, wie in der Gleichung

$$ax - x^3 = b,$$

so trennt er sie durch den Wert $\frac{3b}{2a}$, den sie haben würden, wenn sie gleich wären, und der, wie er zeigt, zwischen den beiden Wurzeln liegen muß. Wir ziehen es jedoch vor, sein Rechnungsverfahren an einer Gleichung mit nur einer Wurzel, wie

$$x^3 + px = q,$$

zu zeigen, in welcher p und q ganze (und positive) Zahlen sind, und zwar q eine vielziffrige, die bedeutend größer als p ist. Weil dann $x < \sqrt[3]{q}$, kann man zunächst versuchen, ob der Wert der höchsten Ziffer von $\sqrt[3]{q}$ für x paßt, und, wenn nicht, die nächst niedriegeren Werte berücksichtigen. Ist so einmal ein Näherungswert $x = a_1$ berechnet, so setzt man $x = a_1 + x_2$ und erhält als Rest:

$$R_1 = q - (a_1^3 + pa_1) = (3a_1^2 + 3a_1 x_2 + p)\ x_2 + x_2^3.$$

Abwerfung von x_2^3 und Vertauschung von x_2 innerhalb der Klammern mit 1 geben, indem man in x nur die Ganzen nimmt,

$$x_2 < \frac{q - (a_1^3 + pa_1)}{3a_1^2 + 3a_1 + p}.$$

Man setzt dann das Verfahren ruhig fort und versucht, ob nun etwa der Wert der höchsten Ziffer dieses Bruches der Gleichung genügt, und zieht, wenn nicht, allmählich wieder die nächst niedrigeren Werte heran. Nennt man die so gefundene Ziffer mit der gehörigen Anzahl von Nullen im Gefolge a_2, so hat man einen neuen Näherungswert $x = a_1 + a_2$, in welchem nun aber noch eine Ziffer berechnet ist. Mit ihm und dem Reste

$$R_2 = R_1 - (3a_1^2 + 3a_1 a_2 + p)\ a_2 - a_2^3$$

wird dann auf dieselbe Weise weitergerechnet. Vieta erläutert sein Verfahren indes nicht, wie wir es getan haben, durch Formeln, sondern stellt vielmehr für die einzelnen Operationen eine ganz bestimmte Ordnung auf, die derjenigen entspricht, die man heute noch bei der Kubikwurzelausziehung gebraucht, von der sie eine Erweiterung ist.

Bürgis Verfahren ist weniger systematisch; er stellt die Näherungs-

berechnungen wesentlich nach der *regula duorum falsorum* an. Er verwendet sie zu sehr weitgehenden Bestimmungen, die der Herstellung trigonometrischer Tafeln dienen. So findet er vorläufig durch Versuche, daß die Neuneckseite, welche durch die Gleichung

$$9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 = 0$$

bestimmt wird, zwischen 0,68 und 0,69 liegt. Die erste Interpolation ergibt dann, daß die zwei folgenden Ziffern 40, die nächste Interpolation, daß die nun folgenden 4 Ziffern 4029 sind. So findet er $x = 0{,}68404029$.

Überhaupt spielt die Berechnung trigonometrischer Tafeln und die damit eng verknüpfte Berechnung von π in der Zeit, die uns hier beschäftigt, eine große Rolle. Außer den Tafeln des Regiomontanus haben wir schon (S. 113) den kleinen Canon von Rhäticus (1551) besprochen, mit dem er sich aber nicht begnügte. In dem großen Werke *Opus Palatinum*, das nach seinem Tode von einem Mitarbeiter Otho herausgegeben wurde, finden sich die 6 geometrischen Größen *sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans* (allerdings unter anderen Namen) für den Radius 10^{10} und für Bogen von 10 zu 10 Sekunden berechnet. In einzelnen Punkten ist dann Pitiscus bei seiner Revision des *Opus Palatinum*, in dem Ungenauigkeiten nicht zu vermeiden waren, weitergegangen. Auch andere haben selbständig trigonometrische Tafeln berechnet, so Vieta, der allerdings den älteren Canon des Rhäticus kannte, in seinem *Canon mathematicus* und Bürgi, dessen begonnene umfangreiche Sinustafel, die von 2 zu 2 Sekunden fortschreitet, freilich nie erschienen ist. Die Zahl π wurde auf 35 Decimalstellen genau von Ludolph van Ceulen bestimmt; nach ihm ist sie die Ludolphische Zahl genannt worden, während der trotz seiner Einfachheit gute Näherungswert $\frac{355}{113}$ von Adriaen Anthonisz bemerkt wurde

Was die Berechnungsweisen betrifft, so galt es vorläufig, mit besonderer Genauigkeit den Sinus oder die Sehne eines sehr kleinen Bogens zu finden. Dazu benutzte man die bereits besprochenen Winkelteilungsgleichungen. Andere führten ganz einfach Archimedes' Gebrauch der Halbierung weiter. So fand Vieta *sin* 1′, indem er die Seite eines einbeschriebenen 3.2^{11}- und die eines umschriebenen 3.2^{12}-ecks suchte.

Zahlreich waren die Kunstgriffe, die angewendet wurden, um die weitere Berechnung der Tabellen zu erleichtern. So benutzte Vieta die Relation

$$\sin\,(60^0 + A) = \sin A + \sin\,(60^0 - A),$$

um, nachdem er die Sinus von Winkeln bis zu 60^0 gefunden hatte, die übrigen durch einfache Addition zu berechnen. Für die allmähliche Berechnung von $\sin mx$ und $\cos mx$ für steigende Werte von m besaß Vieta ein Mittel, das wir ihn bereits zur Bildung der algebraischen Ausdrücke

dieser Größen haben anwenden sehen (S. 117). Dieselbe allmähliche Bildung benutzt auch Rhäticus bei seiner Tabellenberechnung. Snellius fügte dazu den Gebrauch verschiedener anderer Relationen zwischen den Sinus von Winkeln, die miteinander in einfacher algebraischer Verbindung stehen, und gründet darauf eine Methode, um für eine Reihe von Sinus, die schon mit einer gewissen Genauigkeit berechnet sind, allmählich mehr und mehr Decimalstellen zu finden. Vermittelst der Formeln

$$\cot\frac{a}{2} = 1 + 2\sin a + 2\sin 2a + \cdots + 2\sin na,$$

wenn $(n+1)a = 90^0$, und

$$\operatorname{cosec}\frac{a}{2} = 2\left(\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{3a}{2} + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}a\right),$$

wenn $na = 90^0$, führt er die Bestimmung von *tg* und *sec* auf Additionen zurück. Eine Sekantenbestimmung hatte man schon früher durch eine noch einfachere Formel erreicht

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{a}{2}\right) = \sec a,$$

die von einem sonst wenig bekannten Mathematiker Schuler herrührt.

Ein anderes Hilfsmittel, das man bei Tabellenberechnungen anzuwenden begann, waren Differenzen verschiedener Ordnung; von diesem Mittel aber, das bald bei der Berechnung von Logarithmentafeln in größerem Umfang angewendet wurde, werden wir erst im nächsten Abschnitte berichten.

Als besonders der Berechnung von π dienend, stellte Snellius folgende Ungleichheiten auf

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} < x < \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3},$$

von denen erstere schon im Mittelalter Nicolaus Cusanus (1401—1464) bekannt war. Neue Mittel für alle diese Berechnungen werden wir in Verbindung mit den Vorbereitungen der Infinitesimalrechnung entstehen sehen (III. Absch. 3).

Was nun die trigonometrischen Berechnungen selbst betrifft, welche mit Benutzung der Tabellen ausgeführt wurden, so mußte man bei ihnen vor der Erfindung der Logarithmen natürlich überall, wo es nur angängig war, Multiplikation und Division vermeiden und den Gebrauch solcher Regeln vorziehen, die nur Additionen und Subtraktionen erfordern. Die in den Formeln

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$
$$2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

ausgedrückten Relationen boten dazu die Hand, die zugleich für diejenigen Fälle aushalf, in denen ein Sinus mit einem Cosinus oder umgekehrt vertauscht wird, da zu jener Zeit der Cosinus lediglich als Sinus des Kom-

plementes erscheint. Indessen waren, da man nicht mit negativen Größen rechnete, beide hier angeführten Regeln vonnöten, je nachdem die Winkel eine solche Größe hatten, daß das Produkt durch eine Summe oder eine Differenz ausgedrückt werden mußte.

Von diesen Formeln wurde die letztere schon von dem seinerzeit in Ägypten tätigen Astronomen Ibn Jûnus († 1008) bewiesen, der die sogenannten hâkimitischen Tafeln herstellte. Wie er, so stützen sich diejenigen, die später in Europa ohne irgend welche Kenntnis des arabischen Schriftstellers die nämliche Methode gebrauchten, in der Beweisführung nicht, wie man es jetzt tut, auf die Formel $\sin(x+y)$, sondern benutzen, wie es in dem *Analemma* des Ptolemäus (S. 112) geschieht, ähnliche wiederholte Projektionen, wie man sie auch heutzutage zum Beweise letzterer Formel anwendet. Wir wollen uns damit begnügen, die besonders einfache Form anzuführen, die der Beweis der ersteren der beiden Formeln bei Vieta hat, bei dem sie zunächst, wie folgt, auftritt:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

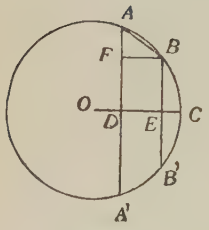

Fig. 2.

In Figur 2 sei $CA = \alpha$, $CB = \beta$. Wenn nun AD und BE senkrecht auf dem Halbmesser OC stehen, und BF parallel OC ist, so ist, indem wir der Bequemlichkeit halber den Radius $= 1$ setzen,

$$\cos\beta - \cos\alpha = DE = AB\sin FAB = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = FA = AB\cos FAB = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Vietas Anwendung der betreffenden Formeln zur Bildung des Sinus und Cosinus multipler Bogen haben wir bereits kennen gelernt (S. 117). Wir wollen nun noch diejenige Anwendung zur Ausführung praktischer Berechnungen besprechen, die von den griechischen Wörtern πρόσθεσις und ἀφαίρεσις, Hinzufügung und Wegnahme, den Namen prosthaphäretische Methode bekommen hat, weil sie, wie später die Logarithmen, Multiplikationen auf Additionen und Subtraktionen zurückführt.

Anfänglich wurde diese Methode nur unmittelbar, d. h. nur auf solche Fälle angewendet, in denen die Größen, die in der vorliegenden Aufgabe multipliziert werden sollen, selbst Sinus (Cosinus) sind. Daß die Araber ein derartiges Verfahren nur auf ganz bestimmte Berechnungen anwendeten, geht aus dem Umstande hervor, daß in Ibn Jûnus' Beweise

angenommen wird, x sei die Polhöhe, y die Deklination eines Sternes. Aus neuerer Zeit weiß man zuerst von Werner aus Nürnberg, daß er die fragliche Methode bei der Ausführung einer astronomischen Berechnung anwendete, ohne daß sie durch ihn weiter bekannt geworden wäre (siehe jedoch die Vorrede). Ihre allgemeine Anwendung ging erst später von Hveen aus, wo sie von Tycho Brahe in Verbindung mit seinem Gehilfen Paul Wittich aus Breslau wiedererfunden worden war. In wie hohem Maße sie hier gebraucht wurde, erhellt daraus, daß in dem früher genannten trigonometrischen Manuskript Tycho Brahes die meisten der Regeln für die Berechnung des sphärischen Dreiecks auf dieses Verfahren zugeschnitten sind. So ist die Regel für die Berechnung der Seite a eines sphärischen Dreiecks aus den beiden Seiten b und c und dem Winkel A so gegeben, wie wir sie durch die Formel

$$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(b-c) + \cos(b+c) + (\cos(b-c) - \cos(b+c))\cos A]$$

ausdrücken würden. Von Hveen aus wurde die Methode durch die Schüler und Freunde Tycho Brahes verbreitet. Namentlich brachte sie Wittich 1584 an das Observatorium des Landgrafen Wilhelm in Kassel, wo besonders Bürgi ihr großes Interesse entgegenbrachte, und von wo aus sie mit Bürgis Begründung durch eine Schrift von Tycho Brahes Gegner, Raimarus Ursus, weiteren Kreisen bekannt wurde.

Indessen läßt sich diese Methode nicht nur zur Multiplikation zweier Sinus anwenden, sondern, wie die Logarithmen, auch zur Multiplikation zweier beliebiger Faktoren a und b. Man braucht nämlich nur $a = \sin x$, $b = \sin y$ zu setzen, wofern nur, wenn r den Halbmesser bezeichnet, für den die Sinustafel berechnet ist, $a < r$, $b < r$ ist. Diese Voraussetzung kann, wo es erforderlich ist, durch Teilung der Faktoren in Addenden erfüllt werden, die, von den darin als Faktoren enthaltenen Potenzen von 10 abgesehen, kleiner als r sind. Indem man zugleich die Sekantentafel benutzt, kann man einen Divisor in einen Faktor umwandeln. So bestimmt man bei der Berechnung von $10^n \frac{a}{b}$, wo $a < r$, $b > r$, zunächst x und y aus $a = \sin x$, $b = \operatorname{cosec} y$ und wendet sodann erst die Methode an.

Es liegt nichts Genaueres darüber vor, ob Tycho Brahe die Methode in der so erweiterten Gestalt benutzt hat. Daß die Erweiterungen jedenfalls nahe lagen, sieht man daraus, daß sie gleich, nachdem man die Rechnungsweisen Tycho Brahes kennen gelernt hatte, in gegenseitig unabhängiger Weise an verschiedenen Orten auftreten. So wurde die Erweiterung zur Multiplikation anderer Größen als der Sinus von Tycho Brahes Freund Curtius in einem Briefe an Tycho vorgeschlagen, unmittelbar nachdem

die Methode ihm aus Ursus' Schrift bekannt geworden war. Dieselbe Erweiterung unternahm Bürgi, von dem man z. B. weiß, daß er bei der oben erwähnten Bestimmung von $\cos a$ in dieser Weise die noch rückständige Multiplikation von $\cos(b-c) - \cos(b+c)$ mit $\cos A$ ausführte. Sein Zweck bei der Berechnung von Sinustafeln von sehr großem Umfange (S. 126) war eben, sie zu solchen prosthaphäretischen Rechnungen geeignet zu machen, während er doch selbst durch seinen bald zu erwähnenden Anteil an der Erfindung der Logarithmen dazu beitrug, diese Rechnungen überflüssig zu machen. In ihrem vollen Umfang ist die prosthaphäretische Methode in dem Astrolabium von Clavius (1593) dargestellt. Viele Astronomen, wie Longomontanus, fuhren fort, sich ihrer mit Vorliebe zu bedienen, auch nachdem die Logarithmen bekannt geworden waren und schon Logarithmentafeln vorlagen.

6. Erfindung und Berechnung von Logarithmen.

Wie groß das Bedürfnis nach einem Hilfsmittel war, wie wir es jetzt an den Logarithmen besitzen, geht aus dem Eifer hervor, mit dem man das soeben beschriebene Mittel ergriff, um diesem Bedürfnis durch einen teilweise entsprechenden Gebrauch der vorhandenen trigonometrischen Tafeln abzuhelfen. Die mehr theoretische Vorbereitung der Logarithmen reicht indes viel weiter zurück und hängt mit der Entwickelung des Begriffes der Potenz und mit dem Gebrauche der Zahl, die wir den Exponenten nennen, in Rechnungen mit Potenzen derselben Basis zusammen. Regeln für solche Rechnungen hat man von der Zeit an aufgestellt, wo Diophant oder seine Vorgänger besondere Zeichen für gewisse Potenzen der Unbekannten mit positiven und negativen Exponenten, nämlich von -6 bis zu $+6$, einführten, und im Zusammenhang mit den seit jener Zeit eingeführten Verbesserungen der Zeichensprache weiter entwickelt. Während aber die in dieser dargestellten Potenzen zunächst als Produkte einer Anzahl gleich großer, gewöhnlich unbekannter Zahlen oder als Brüche mit dem Zähler 1 und mit einem solchen Produkte als Nenner erscheinen, wobei die Anzahl selbstredend eine ganze war, war die mehr wissenschaftliche Auffassung der Potenzen mit der Proportions- oder Progressionslehre verknüpft. Ein Verhältnis war seit den Tagen des Eudoxus die Darstellung einer allgemeinen Größe, und die n^{te} Potenz eines Verhältnisses $\frac{b}{a}$ wird bei Euklid als das Verhältnis zwischen dem $(n+1)^{\text{ten}}$ und dem 1^{ten} Gliede einer zusammenhängenden Reihe von Proportionen dargestellt, in der a erstes, b zweites Glied ist (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 146). Diese Auffassung, die als die geometrische bezeichnet wird, und mit Bezug auf welche die

geometrische Progression ihren Namen erhalten hat, findet sich dann bei den Arabern wieder. Wir haben weiterhin gesehen (S. 98), daß sie noch Vieta in voller Klarheit, obschon in einem gewissen Gegensatz zu seiner Zeichensprache aufrecht erhält, in der die Potenzen als Produkte gleicher Faktoren betrachtet werden, die, um multipliziert werden zu können, eigentlich rational sein sollten. Die Exponenten, durch welche die Glieder der geometrischen Reihe charakterisiert werden, sind die natürlichen Zahlen, stehen also in arithmetischer Progression. Dieser Name wird im Gegensatz zu den geometrischen Progressionen auf alle Differenzenreihen angewendet, indem eingeschaltete Zwischenglieder oder arithmetische mittlere Proportionalen zwischen zwei Zahlengrößen (d. h. rationalen Zahlen) selbst wieder rationale Zahlen sind und also arithmetisch ausgedrückt werden konnten.

Demgemäß wird die Zusammenstellung verschiedener Potenzen derselben Basis und ihrer Exponenten, also von Zahlen und ihren Logarithmen, zu einer gliedweisen Zusammenstellung einer geometrischen und einer arithmetischen Reihe. Dies ist schon in dem von dem bedeutendsten Entdecker der Logarithmen, Neper, eingeführten Namen Logarithmen ausgedrückt, wenn man ihn mit Kepler als ἀριθμοὶ τοῦ λόγου (Verhältniszahlen) auslegt. Die mehr theoretische Vorbereitung der Logarithmen stellt sich uns also in dieser Zusammenstellung geometrischer und arithmetischer Reihen oder in der ausdrücklichen Hervorhebung der Verhältniszahl oder des Exponenten vor Augen. Sie findet sich schon bei Oresme, dem die Möglichkeit, gebrochene Größen arithmetisch zwischen die natürlichen Zahlen einzuschalten, zugleich das rechte Verständnis dafür gewährte, wie die entsprechenden Größen der geometrischen Reihe, also Potenzen mit gebrochenen Exponenten, zu bestimmen sein würden. Chuquet verknüpfte mit ähnlichen Betrachtungen praktische Anwendungen (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 325—6).

In der neueren Zeit wird auf die Logarithmen durch Stifel und Stevin, aber auf sehr verschiedene Weise hingearbeitet. Stifel hebt namentlich die Übereinstimmung deutlich hervor, die zwischen entsprechenden Operationen mit den Gliedern einer geometrischen und einer arithmetischen Reihe besteht, die Glied für Glied zusammengestellt werden, nämlich zwischen Multiplikation, bez. Division und Potenzierung, bez. Wurzelausziehung in jener und hinwiederum Addition, bez. Subtraktion und Multiplikation, bez. Division mit einer ganzen Zahl in dieser. Besonders wird die mit 0 beginnende natürliche Zahlenreihe mit der mit 1 beginnenden Reihe von Potenzen derselben Basis zusammengestellt. Für die in ersterer vorkommenden Zahlen hat Stifel den jetzt gebräuchlichen Namen „Ex-

ponenten“ eingeführt; er hebt ausdrücklich hervor, daß der Exponent von 1 Null, d. h. daß $a^0 = 1$ ist. Wie Chuquet, läßt er sich auch auf die Behandlung exponentieller Gleichungen ein und gewinnt dadurch, wie Oresme und Chuquet, Verständnis für die Bedeutung der gebrochenen Exponenten. So findet er, wenn wir seinen Gedankengang kurz in modernen Zeichen wiedergeben, aus der Gleichung

$$\frac{2187}{128} = \left(\frac{27}{8}\right)^x,$$

indem er 3-mal mit $\frac{8}{27}$ multipliziert, zunächst, daß die Ganzen von x 2 sind, da

$$\frac{2187}{128} \cdot \frac{8}{27} = \frac{81}{16}; \quad \frac{81}{16} \cdot \frac{8}{27} = \frac{3}{2} > 1; \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{9} < 1.$$

Weil ferner $\frac{3}{2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, so ist $x - 2 = \frac{1}{2}(3 - x)$, also $x = 2\frac{1}{3}$.

Bei alledem ist freilich stets nur die Rede davon, Rechnungen mit Potenzen derselben Basis zu verallgemeinern, aber durchaus nicht davon, diese Operationen nutzbar zu machen, um die schwierigeren Rechnungen, wie Multiplikation u. s. w. auf entsprechende einfachere Rechnungen, wie Addition u. s. w. zurückzuführen. Dazu waren vor allem Tabellen vonnöten. Wir finden dergleichen schon bei Stevin; es fehlen aber bei ihm theoretische Auseinandersetzungen, welche diese Tabellen noch über ihren speziellen Zweck hinaus hätten nützlich machen, ja es ihm ermöglichen können, sich mit der Ausarbeitung einer einzigen seiner Tabellen zu begnügen. Die Tabellen, die wir im Auge haben, sind Zinstabellen, die einer Reihe von verschiedenen Werten des Zinsfußes r entsprechen. Für diese werden teils die Werte von $\frac{1}{(1+r)^n}$ teils die Werte von $\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n}$ angegeben. Die ersten Tabellen sind wirkliche antilogarithmische Tafeln, und für den kleinsten der von r angewendeten Werte (0,01) liegt die Basis so nahe an 1, daß die Tabelle, obgleich sie nur ganzzahlige Werte von n umfaßt, recht wohl zu logarithmischen Rechnungen gebraucht werden könnte, von denen nicht gar zu große Genauigkeit erfordert wird. Hiervon ist jedoch, wie gesagt, gar nicht die Rede.

Bei Stifel und Stevin fehlt also immer noch bald dies, bald jenes von dem, was man von wirklichen Logarithmen verlangt. Aus dem hier über diese Schriftsteller Beigebrachten erhellt also, daß die Erfindung der Logarithmen etwas ganz Neues bot und nicht etwa, wie so viele andere mathematische Erfindungen, nur dem allgemeinen Gebrauche zugänglich machte, was Kundigere schon längst vielleicht in ihren persönlichen Untersuchungen verwendet hatten. Wirklich erfunden aber wurden die Logarithmen unabhängig voneinander von 2 Gelehrten, Neper und Bürgi.

Es geschieht jedoch mit vollem Rechte, wenn man von ihnen Neper an erster Stelle nennt, dessen Logarithmen sogleich in einer in theoretischer Beziehung außerordentlich entwickelten Gestalt auftraten, dessen System eine sehr leichte Berechnung ermöglichte, und der selbst an den zweckmäßigen Änderungen wesentlichen Anteil hatte, durch die Briggs den Logarithmen größere praktische Brauchbarkeit und schließlich ihre bleibende Gestalt verlieh. Neper, dessen Vorarbeiten sich, soviel bekannt ist, zeitlich ebenso weit zurück erstrecken wie die Bürgis, gab auch seine Logarithmen zuerst bekannt. Bürgi hielt seine Methoden so lange geheim, daß ihm Kepler diese Geheimniskrämerei mit gutem Grunde vorwerfen konnte, die ihn der Ehre einer wichtigen Erfindung verlustig machte, an der er nun nicht einmal einen wesentlichen Anteil bekam; denn, nachdem Nepers Logarithmen an die Öffentlichkeit getreten waren, fanden die Bürgis keine Verwendung.

Die Einführung der Logarithmen ist an und für sich ein so bedeutender Fortschritt, daß es der Mühe wert ist, die verschiedenen Gestalten kennen zu lernen, in der sie bei beiden Erfindern auftraten. Hier müssen wir mit Bürgis Logarithmen als den unvollkommensten beginnen. Sie sind in der 1620 gedruckten Schrift: Arithmetische und Geometrische Progreß-Tabulen aufgestellt und durch Zusammenstellung der Glieder 0, 10, 20 ··· einer arithmetischen Reihe mit den Gliedern 100000000, 100010000, 100020001 ··· einer geometrischen Reihe gebildet. Erstere sind rot gedruckt und werden rote Zahlen genannt, letztere sind schwarz und heißen schwarze Zahlen. Die Verwendung, die man von dieser Tabelle machen kann, geht aus dem von Stifel bemerkten Zusammenhang zwischen Rechnungen mit Gliedern der beiden Reihen hervor; am leichtesten zu überblicken ist sie jetzt durch die Bemerkung, daß die roten Zahlen die Logarithmen der durch 10^8 dividierten schwarzen mit der Basis $\sqrt[10]{1{,}0001}$ sind. Der in die schwarzen Zahlen eingeführte Faktor 10^8, dessen rote Zahl 0 ist, dient dazu, so lange wie möglich Brüche zu vermeiden; faktisch geschieht dadurch eine Umwandlung solcher in Decimalbrüche. Da die Reihen nach den Gliedern der arithmetischen Progression der roten Zahlen geordnet sind, so ist die Tafel zunächst eine antilogarithmische. Dies konnte indessen bei einem Manne, der, wie wir an anderer Stelle gesehen haben, mit Interpolationen vertraut war, dem Gebrauch der Tafeln nicht hinderlich sein. Durch eine Interpolation findet er namentlich, daß die der schwarzen Zahl 10^9 entsprechende rote Zahl 230270,022 ist. Da 10^8 die rote Zahl (oder den Logarithmus) 0 hat und also als Einheit auftritt, spielt die gefundene Zahl fast dieselbe Rolle wie der Logarithmus von 10. So wird sie auch von Bürgi benutzt, der, wenn $a < b$, statt $\frac{a}{b}$ zu berechnen, $\frac{a10^9}{b}$ berechnet. Dies geschieht selbstredend,

indem er die a und 10^9 entsprechenden roten Zahlen addiert, davon die b entsprechende rote Zahl subtrahiert und die dem Resultate entprechende schwarze Zahl sucht. Der Bruch $\frac{a}{b}$ wird dann faktisch auf 9 Decimalstellen genau berechnet. Wenn dagegen $a > b$, wird man, indem man die rote Zahl von b von der roten Zahl von a subtrahiert, die rote Zahl von $\frac{a\,10^8}{b}$ erhalten, also $\frac{a}{b}$ auf 8 Decimalstellen genau berechnen.

Nepers Logarithmentafel mit einer Erklärung ihres Gebrauches war schon 1614 in der *Canonis mirifici descriptio* veröffentlicht. Die Stetigkeit des Zusammenhanges zwischen Zahlen und Logarithmen, der sich Bürgi durch die Anwendung einer von 1 nur wenig abweichenden Basis nähert, tritt bei Neper in einer klaren Definition hervor. Neper nimmt an, daß sich zwei Punkte, die wir X und Y nennen wollen, gleichzeitig auf zwei Geraden von den Punkten O und A aus bewegen, X mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, Y mit einer Geschwindigkeit, die sich zu der von X verhält, wie die Entfernung Y's von dem anderen Endpunkte der Linie, YB, sich zur ganzen Linie AB verhält. Sodann ist die durch OX dargestellte Zahl der Logarithmus der durch YB dargestellten. Setzen wir $OX = x$, $YB = y$ und $AB = r$, so sagt uns diese Definition in ihrer Weise, da ja Größen, besonders variable Größen, damals noch durch Linien dargestellt wurden, genau dasselbe, was wir jetzt

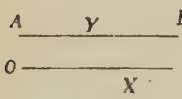

Fig. 3.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}$$

schreiben würden, indem y abnimmt, wenn x zunimmt. Diese Gleichung wird, indem $x = 0$ und $y = r$ einander entsprechen, integriert durch

$$\frac{x}{r} = -\log\frac{y}{r},$$

wo *log* den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen ist also der von Neper definierte Logarithmus x, dividiert durch die Konstante r, dasselbe, wie der natürliche Logarithmus der durch r dividierten Zahl y. Die den Logarithmen charakteristischen Eigenschaften, die sich dahin zusammenfassen lassen, daß, wenn die Größen x eine von 0 ausgehende arithmetische Reihe bilden, die Größen y eine von r ausgehende geometrische Reihe darstellen, gehen aus der Definition Nepers von selbst hervor.

Die Abweichungen, die die Logarithmen Nepers von den natürlichen aufweisen, die in dem hier gegebenen Zusammenhang auch bei seiner Betrachtungsweise als die nächstliegenden erscheinen könnten, rühren von der Anwendung der Logarithmen her, die er zunächst vor Augen hatte. Er

will nämlich nicht die Logarithmen der natürlichen Zahlen, sondern vor allem die der trigonometrischen Funktionen bilden. Die Größe r, die er $= 10^7$ ansetzt, ist sodann der Halbmesser des Kreises. Stellt y einen zu diesem Halbmesser gehörigen Sinus oder Cosinus dar, so ist $\frac{y}{r}$ eben die Größe, die wir jetzt Sinus oder Cosinus nennen; sie ist kleiner als 1, und die Logarithmen Nepers, die wir $- r \log \frac{y}{r}$ schreiben, werden also positiv. Neper ist sich dabei durchaus im klaren, daß seiner Definition zufolge die Logarithmen von Zahlen, die größer als r sind, negativ werden, und gibt ausdrücklich an, daß in seinen Tabellen die Logarithmen von Sinus und Cosinus, mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen, die Logarithmen von Cosecanz und Secans werden. Eine Kolumne seiner Tafeln enthält ferner die Differenzen zwischen seinen Logarithmen der Sinus und Cosinus und stellt somit, je nachdem man das Zeichen + oder — beifügt, die Logarithmen der Tangenten oder Cotangenten dar. In der Figur entsprechen die negativen Logarithmen den Punkten X und Y, die noch nicht bei den Ausgangspunkten der Bewegung O und A angelangt sind. Wie wir nun sehen werden, sind solche Lagen sogar bei der Berechnung der Logarithmen benutzt.

Diese Berechnung hat Neper in der *Constructio canonis mirifici* klargelegt, einer Schrift, welche allerdings erst 1619 erschien, aber vor der *Descriptio* verfaßt ist, und in der der Name „Logarithmus“ noch nicht gebraucht wird, für welchen hier Kunstzahl (*numerus artificialis*) steht. Es kommt besonders darauf an, den Logarithmus einer Zahl $y = r - 1$ zu finden, die durch den Punkt Y dargestellt wird, welcher, von A ausgehend, die Strecke 1 zurückgelegt hat. Dazu benutzt Neper den Umstand, daß der Definition zufolge die Geschwindigkeit Y's abnimmt. Indem nun die Geschwindigkeit, mit welcher der Anfangspunkt A durchlaufen wird, die nämliche ist wie die, mit welcher der Punkt X den Punkt O durchläuft, wird die Strecke $r - y$, die rechts vom Punkte A zurückgelegt wird, kleiner sein als die gleichzeitig zurückgelegte Strecke x. In derselben Zeit, in welcher der Punkt X dieselbe Strecke x links von O bis zu diesem Punkte selbst zurücklegt, wird der Punkt Y eine größere Strecke links von A zurückgelegt haben. Diese wird, indem die Größen y, also auch ihre Differenzen, eine geometrische Reihe bilden, wenn die Größen x eine arithmetische bilden, $\frac{r}{y}(r - y)$ sein. Man hat also im allgemeinen

$$r - y < x < \frac{r}{y}(r - y)$$

und, wenn man $y = r - 1 = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $x = x_1$ setzt,

$$1 < x_1 < \frac{r}{r-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}}.$$

Durch Einsetzung von $r = 10^7$ erhält man

$$1 < x_1 < 1{,}000000\ 1\,000000\ 1 \cdots$$

Neper wählt den ungefähren Mittelwert und setzt $x_1 = 1{,}000\,000\,05$. Dies kommt auf dasselbe hinaus, als wenn man in der jetzt bekannten Reihenentwickelung von x, die seiner Definition nach $-r \log \left(1 - \frac{1}{r}\right)$ sein soll, also in der Reihe $x_1 = 1 + \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r^2} + \cdots$ nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt, und das Resultat ist dann bis auf die 14. Decimalstelle genau.

Die derart erreichte Genauigkeit ist in der Tat hinlänglich, um auf der gefundenen Grundlage in den Tabellen 7 richtige Ziffern zu erhalten, und mit dieser Anzahl von Ziffern begnügt sich Neper. Wenn seine Tafeln am Ende doch der gegebenen Definition nicht ganz entsprechen, so beruht dies auf keinem theoretischen Fehler, sondern auf einem Rechenfehler, von dem wir sogleich reden werden.

Nachdem der Wert von x_1 einmal gefunden ist, wird er erst zur Berechnung einer Antilogarithmentafel verwendet, welche die den Werten von x entsprechenden Werte von y enthält; Neper nennt diese Tafel die Radikaltafel. $x_n = n x_1$ wird $y_n = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$ entsprechen, und die allmähliche Berechnung der zusammengehörigen Werte x_n und y_n wird nun dadurch erleichtert, daß

$$y_n = y_{n-1}\left(1 - \frac{1}{r}\right) = y_{n-1} - 0{,}0000001\, y_{n-1},$$

daß also y_n gebildet werden kann, indem man von y_{n-1} dieselbe Zahl, um 7 Stellen nach rechts verschoben, subtrahiert. Diese außerordentlich einfache Berechnung hat nur die Unannehmlichkeiten, daß ein einmal begangener Fehler sich im Folgenden stets wiederholt, und daß wegen des kleinen Quotienten der geometrischen Reihe $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ mehr Zahlen y berechnet werden als notwendig sind, um in den endgültigen Tafeln die bezweckte Genauigkeit zu erreichen. Besonders dem letzteren Mangel hilft Neper dadurch ab, daß er auch größere Quotienten gebraucht, nämlich

$$1 - \frac{1}{10^5},\ 1 - \frac{1}{2 \cdot 10^5},\ 1 - \frac{1}{10^2},$$

die eine ähnliche einfache Berechnung gestatten, und deren entsprechende Differenzen in der Reihe von Größen x aus dem schon berechneten Teile der Tafel hervorgehen.

Der eben berührte Fehler ist schon bei der Benutzung des zweiten Quotienten $1 - \frac{1}{10^5}$ entstanden. Für y'_{50} oder $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^{50}$ findet er 9995001,222927, während der genaue Wert 9995001,224804 ist. Hätte er nun die Berechnung mit demselben Quotienten fortgesetzt, so wäre die Folge, daß in dem folgenden, also in dem bei weitem größten Teile der Tafel, wenn z den unrichtigen Wert bezeichnet, alle Zahlen y mit $\frac{z}{y'_{50}}$ vervielfacht würden, oder daß umgekehrt der Nullpunkt der Logarithmen ganz verschoben würde. Eben der gefundene unrichtige Wert aber wird der Berechnung von Nepers Logarithmus von 9995000 und somit der Differenz zu Grunde gelegt, die dem Quotienten 0,9995 entspricht. Die dadurch gewonnenen zusammengehörigen Werte sind wiederum zur Berechnung der dem Quotienten 0,99 entsprechenden Differenz benutzt. Die in dem größten Teile seiner Tafel enthaltenen Logarithmen sind dadurch ungefähr um $\frac{3}{8} \cdot 10^{-6}$ ihrer wahren Werte vermindert und entsprechen deshalb (von den durch die Vorzeichen und den Divisor r entstehenden Verschiedenheiten abgesehen) nicht der Basis e der natürlichen Logarithmen, sondern einer durch

$$\eta^{1 - \frac{3}{8} 10^{-6}} = e$$

bestimmten Zahl $\eta = e\,(1 + \frac{3}{8}\ 10^{-6} + \cdots) = 2{,}71828285$.

Aus seiner Radikaltafel leitet Neper durch Interpolation eine Tafel her, die aber nicht die Logarithmen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, sondern vielmehr, wie schon bemerkt, die Logarithmen der trigonometrischen Größen bieten will, die zu gegebenen Winkeln gehören.

Die besonderen Zwecke Nepers erklären zwar die schon in seiner Definition enthaltenen Abweichungen von den natürlichen Logarithmen, nämlich die Vorzeichen und den Gebrauch der Einheit r. Die schädlichen Folgen dieser Abweichungen mußten sich jedoch geltend machen, wenn man, was ja nahe lag, versuchte, die Logarithmen auch anderweit zu verwerten. Die Übereinstimmung zwischen Addition von Logarithmen und Multiplikation der entsprechenden Zahlen ist nämlich erst eine vollständige, wenn 0, also der Addend, der keine Änderung der Summe bewirkt, der Eins oder dem keine Änderung des Produktes bewirkenden Faktor entspricht. Zugleich war es, wenn die Logarithmen zu gewöhnlichen Zahlenberechnungen gebraucht werden sollten, recht naheliegend, sie mit dem Decimalsystem zu verbinden.

Dergleichen Betrachtungen veranlaßten schon Neper, der früher bemerkt hatte, daß die Zahl, deren Logarithmus 0 sein soll, nach Belieben gewählt werden kann, dazu, in einem Anhang, der in seiner nach seinem

Tode herausgegebenen *Constructio* mit aufgenommen ist, eine Bildung von Logarithmen vorzuschlagen, bei denen Log 1 = 0 und Log 10 = 10000000000. Letztere Wahl ist von der Ansetzung von Log 10 = 1 nicht wesentlich verschieden, sondern soll nur eine Berechnung der Logarithmen bis auf 10 Decimalstellen ersetzen. Neper, dessen Vorschlag die Frucht von Verhandlungen mit seinem Freunde Briggs war, gibt selbst an, daß man in diesem System Log 2 als die Zahl finden kann, die um 1 kleiner ist als die Anzahl der Ziffern von $2^{10^{10}}$. Der Anfang dieser Berechnung wird dadurch etwas erleichtert, daß $2^{10} = 1024$, woraus man sogleich schließen kann, daß Log 2 verhältnismäßig wenig von $0{,}3 \cdot 10^{10}$ abweicht.

Erst Briggs führte dann die Berechnung von Logarithmen mit der Basis 10 durch; sie tragen daher noch heute seinen Namen. Die ersten tausend konnte er schon 1617, in demselben Jahre, in dem Neper starb, herausgeben. Übrigens finden sich seine Tabellen in dem S. 27 angegebenen Umfange und mit einer Erklärung der Berechnungen in seiner *Arithmetica logarithmica*. In diesem Werk bewährt sich Briggs als ein Rechner von sehr hohem Range, nicht nur durch die Sicherheit, mit der er weitläufige Berechnungen ausführt, sondern namentlich auch durch den klaren Blick, mit dem er die Genauigkeitsgrenzen beurteilt und den Zusammenhang zwischen den allmählich gewonnenen Zahlen entdeckt, auf den er sodann eine Art erweiterter Interpolation bauen kann.

Außer dem Kunstgriff, den schon Neper zur Berechnung von Log 2 angewendet hatte, kommt Briggs besonders folgende Betrachtung zu statten. Indem man die Quadratwurzelausziehung aus 10 wiederholt, erhält man eine Zahl $\sqrt[2^n]{10}$, deren Logarithmus $\frac{1}{2^n}$ ist. Setzt man nun $\sqrt[2^n+1]{10} = 1 + \alpha$, so erhält man

$$\left(\sqrt[2^n+1]{10}\right)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 = \sqrt[2^n]{10},$$

oder, wenn die Rechnung so weit geführt ist, daß α^2 die Decimalen, mit denen man rechnet, nicht weiter beinflußt,

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^n+1]{10} - 1\right).$$

Hieraus schließt man hinsichtlich der Zahlen z, die zwischen $\sqrt[2^n]{10}$ und $\sqrt[2^n+1]{10}$ liegen, weiter, daß man mit derselben Genauigkeit

$$\frac{z-1}{\operatorname{Log} z} = \textit{constans} = 2^n\left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right)$$

setzen kann.

Hat man $\sqrt[2^n]{10}$ bis auf hohe Werte von n berechnet, so erhält man dadurch eine leichte Berechnung der Logarithmen von Zahlen nahe an 1, und zu solchen kann man von den Zahlen aus, deren Logarithmen man sucht, gleichfalls durch wiederholte Quadratwurzelausziehung gelangen. Ist also $z = \sqrt[2^m]{y}$, so hat man

$$\text{Log } y = \frac{2^m \left(\sqrt[2^m]{y} - 1\right)}{2^n \left(\sqrt[2^n]{10} - 1\right)}.$$

Je näher y bereits der Einheit ist, desto kleiner wird die Anzahl m der Quadratwurzelausziehungen aus y, die hier notwendig sind. Deshalb verwendet Briggs auch andere Kunstgriffe, um seine Zahlen der Einheit zu nähern. Um Log 2 zu finden, berechnet er daher Log $\frac{2^{10}}{10^3}$ oder Log 1,024 und, um den Logarithmus einer größeren Primzahl x zu finden, benutzt er folgende Gleichung:

$$\text{Log } x = \frac{1}{2}\left(\text{Log } \frac{x^2}{x^2-1} + \text{Log } (x+1) + \text{Log } (x-1)\right).$$

Hier ist $\frac{x^2}{x^2-1}$ von 1 nicht viel verschieden, und $(x+1)$ und $(x-1)$ sind aus Faktoren zusammengesetzt, deren Logarithmen im voraus berechnet sind.

Bei den zu diesem Berechnungsverfahren notwendigen allmählichen Quadratwurzelausziehungen aus Zahlen, die sich der Einheit mehr und mehr nähern, gebraucht Briggs eine eigentümliche Interpolation. Bevor wir sie besprechen, haben wir jedoch zu bemerken, daß er auch die gewöhnliche Interpolation auf eine vollständigere Weise als seine Vorgänger verwertet. Wir haben schon (S. 124) erwähnt, daß die einfache Interpolation, die voraussetzt, daß die Zunahmen der beiden voneinander abhängigen variablen Größen proportional sind, daß also die erste Differenz, die äquidistanten Werten des Tafelarguments entspricht, konstant ist, nur eine Anwendung der uralten *regula duorum falsorum* ist. Auch bei den weitläufigen Tabellenberechnungen mußte man bald erlernen, die innerhalb gewisser Grenzen der Genauigkeit konstanten ersten Differenzen teils als Kontrolle, teils als Mittel für die Berechnung zu verwerten. Wo die erste Differenz nicht konstant wird, kann möglicherweise die zweite, die dritte oder eine höhere Differenz es werden. In dem Falle können die verschiedenen Differenzen benutzt werden, um diejenigen niedrigerer Ordnung und schließlich die gesuchte Reihe von Zahlen selbst zu berechnen. Hierfür scheint Bürgi einen besonderen Blick gehabt zu haben, und ein sogenannter „Kunstweg“,

den er neben den übrigen Hilfsmitteln zur Berechnung seiner großen Sinustafel einschlägt, hat einigen auf uns gekommenen Mitteilungen zufolge eben im Gebrauche von Differenzen verschiedener Ordnung bestanden. Rhäticus hat bei einem Teile seiner Berechnungen Differenzen der drei ersten Ordnungen benutzt. Sie finden sich in dem von Pitiscus herausgegebenen *Thesaurus mathematicus,* und Pitiscus hebt ausdrücklich hervor, daß ihre Gleichartigkeit die Zuverlässigkeit der Tabellen verbürgt. Die eigentliche Interpolationsrechnung entsteht indes erst, wenn man die Differenzen, die einem gewissen Intervall des Argumentes entsprechen, zur Berechnung derjenigen benutzt, die einem kleineren Intervall entsprechen. Dies tut Briggs in einer Regel, welche *Quinquisectio* heißt und der Berechnung von Differenzen aller Ordnungen für das Fünftel eines Intervalles der Argumentwerte dient, für welches erst eine höhere Differenz konstant ist. Briggs läßt sie in seinen Formeln bis zur 20. Differenz steigen, praktisch geht er jedoch nicht so weit.*)

Die eigentümliche Interpolation, die Briggs bei seinen Quadratwurzelausziehungen anwendet, ist, wie wir sehen werden, ein Vorläufer anderer moderner Methoden. Briggs wendet sie erst an, wenn er so weit gekommen ist, daß die Zahlen, deren Quadratwurzeln auszuziehen sind, sehr wenig $\left(\text{um weniger als } \frac{1}{1000}\right)$ von 1 abweichen. Die allmählichen Differenzen, die benutzt werden, sind sodann folgendermaßen bestimmt

$$A = 1 + x - 1,$$

$$A_1 = \sqrt{1+x} - 1,\ B_1 = \frac{A}{2} - A_1,$$

$$A_2 = \sqrt[4]{1+x} - 1,\ B_2 = \frac{A_1}{2} - A_2,\quad C_2 = \frac{B_1}{4} - B_2,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$A_n = \sqrt[2^n]{1+x} - 1,\ B_n = \frac{A_{n-1}}{2} - A_n,\ C_n = \frac{B_{n-1}}{4} - B_n,\ D_n = \frac{C_{n-1}}{8} - C_n \cdots$$

Briggs gebraucht selbst die Bezeichnungen $A, B, C \cdots$; die Sonderung der Größen aber, die wir durch Stellenzeiger gewonnen, ist bei ihm durch ihre Stellung neben die verschiedenen Zahlen erreicht. Die Differenzen $A, B, C \cdots$ werden ursprünglich durch die hier angegebenen Subtraktionen der durch direkte Quadratwurzelausziehung berechneten Zahlen gebildet; nachdem man aber zu einer Differenz gelangt ist, die klein genug ist, um als 0 betrachtet zu werden, bildet man Differenzen niedrigerer Ordnung aus denen

*) Es würde zu weit führen, hier die in der *Quinquisectio* enthaltenen Regeln darzustellen; es mag aber auf einen Aufsatz von Gram in der Tidsskrift for Mathematik 1886, S. 12 ff. oder auf Koppe im Programm der Andreasrealschule in Berlin 1893 S. 30 ff. verwiesen sein.

höherer. Kann z. B. F_n und somit in noch höherem Grade F_{n+1} als 0 betrachtet werden, so erhält man

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{1}{32} E_n, \\ D_{n+1} &= \frac{1}{16} D_n - E_{n+1}, \\ C_{n+1} &= \frac{1}{8} C_n - D_{n+1}, \\ B_{n+1} &= \frac{1}{4} B_n - C_{n+1}, \\ A_{n+1} &= \frac{1}{2} A_n - B_{n+1}, \\ \sqrt[2^{n+1}]{1+x} &= 1 + A_{n+1}. \end{aligned}$$

Dieselbe Methode wird demnächst bei der Berechnung der folgenden Wurzeln angewendet, und da die Differenzen abnehmen, braucht man nach und nach ihrer immer weniger zu berücksichtigen; zuletzt begnügt man sich damit, jedes A durch Halbierung des vorhergehenden zu bilden.

Es mag sich ganz empirisch ergeben haben, daß diese Bildung von Differenzen schnell zu solchen führt, die vernachlässigt werden können, und daß man demnach das hier beschriebene Verfahren benutzen kann. Briggs bleibt indessen nicht hierbei stehen, sondern bildet Ausdrücke der höheren Differenzen durch die erste Differenz A (mit demselben Index). Diese sind, indem die über die zehnte hinausliegenden Potenzen von A unberücksichtigt bleiben,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} A^2, \\ C &= \frac{1}{2} A^3 + \frac{1}{8} A^4, \\ D &= \frac{7}{8} A^4 + \frac{7}{8} A^5 + \frac{7}{16} A^6 + \frac{1}{8} A^7 + \frac{1}{64} A^8. \end{aligned}$$

— — — — — — — — — — — —

Zehnte Differenz $= 2805527\, A^{10}$.

Diese Ausdrücke können recht wohl so gebildet sein, daß man aus

$$\sqrt[2^n]{1+x} = 1 + A$$

durch allmähliche Quadrierung

$$\begin{aligned} \sqrt[2^{n-1}]{1+x} &= 1 + 2A + A^2, \\ \sqrt[2^{n-2}]{1+x} &= 1 + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4. \end{aligned}$$

u. s. w. fand. Was ihnen ihr Interesse verleiht, ist der Umstand, daß sie, wenn man sie in obige Gleichungen einsetzt, welche die Bedeutung der

Differenzen angeben, für $1 + A_{n+1}$ oder $\sqrt{1 + A_n}$ denselben Ausdruck wie die allgemeine Newtonsche Binomialformel liefern.

Neper hatte schon die Kontinuität der Logarithmen auf eine Art und Weise ausgedrückt, die wir am besten durch eine Differentialgleichung haben ausdrücken können (S. 134), und die mit den Formen übereinstimmt, unter denen bald darauf die Infinitesimalrechnung hervortreten sollte; wir sind zugleich der Anbahnung eines der wichtigsten Sätze begegnet, der mit dem Entstehen der Infinitesimalrechnung verbunden ist. Die weitere Entwickelung der Berechnung der Logarithmen, besonders durch unendliche Reihen, ist mit den beginnenden Infinitesimaluntersuchungen noch enger verknüpft und soll deshalb erst in Verbindung mit diesen besprochen werden. Übrigens können wir schon in der Entwickelung der Rechenkunst selbst, eben wie wir sie dargestellt haben, eine Vorbereitung des Begriffes unendlich kleiner Größen erblicken. Wir haben nämlich eben Briggs mit Größen rechnen sehen, die so klein sind, daß Potenzen derselben mit hinlänglich hohem Exponenten durchaus keinen Einfluß auf die Decimalen gewinnen, zu welchen die Rechnung führt; er konnte deshalb ohne jeglichen Fehler für diese Decimalen solche Potenzen als 0 betrachten. Von hier aus ist der Sprung nicht allzuweit, um sich solche Größen vorzustellen, deren höhere Potenzen sogar in durchaus exakten Untersuchungen wegfallen können. Es dürfte deshalb auch nicht ganz zufällig sein, daß derjenige, der es zuerst wagte, solchen „unendlich kleinen“ Größen ihren Namen zu geben und mit ihnen zu rechnen, eben Kepler war, der Mann, der durch seine unermüdlichen Rechnungen auf empirischem Wege die Gesetze der Planetenbewegung ausfindig machte, und daß er gerade bei diesen Untersuchungen mit seinen Rechnungen infinitesimale Betrachtungen eng verknüpfte. Ebenso erklärlich wird es, daß eben Briggs unter den ersten war, die sich den Unendlichkeitsbetrachtungen Keplers anschlossen, die von vielen als mit der vererbten exakten Mathematik streitend betrachtet wurden. Kepler war seinerseits einer der ersten, der die große Bedeutung der Logarithmen, nicht zum wenigsten schon der Neperschen, für praktische Berechnungen einsah und das neue Hilfsmittel selbst reichlich benutzte. Der Näherungswerte wegen, mit denen man sich bei ihrer Benutzung begnügen muß, wurde dieses Hilfsmittel freilich von einzelnen, z. B. von Longomontanus, dem Schüler Tycho Brahes, als ungeometrisch betrachtet. Mit solchen Näherungswerten mußte man sich allerdings auch in den trigonometrischen Tafeln und bei der Berechnung von π bescheiden, was Longomontanus allerdings nicht zugab, weil er glaubte, den Kreis wirklich geometrisch quadrieren zu können.

Das Auftreten der Logarithmen mußte dazu führen, sich namentlich

solcher Umgestaltungen zu befleißigen, welche die trigonometrischen Formeln zu logarithmischer Berechnung geeignet machten. Hierzu war besonders Finckes Formel (S. 113) dienlich, und die Formel $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, deren geometrische Begründung sich in der Hauptsache bei Rhäticus findet, ward nun von wirklichem Nutzen. In der sphärischen Trigonometrie konnte man jetzt von den prosthaphäretischen Umgestaltungen einen umgekehrten Gebrauch machen: statt ein Produkt in eine Summe oder eine Differenz umzugestalten, benutzte man jetzt dieselben Formeln vielmehr, um Summen und Differenzen in Produkte umzugestalten. Dies verstand offenbar schon Neper. In seiner *Descriptio* wenigstens leitet er mittelst solcher Umgestaltungen aus Regiomontanus' Bestimmungen eines Winkels eines sphärischen Dreiecks durch die Seiten die Beziehungen

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b}},$$

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\sin\frac{1}{2}(c-a+b)}{\sin a\sin b}}$$

und in einem Anhang der *Constructio* die Formeln her, die nach ihm die Neperschen Analogien (d. h. Proportionen) benannt sind:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\cot\frac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

wie wir sie heute schreiben, samt den Formeln, die sich aus allen diesen mittelst der Polardreiecke herleiten lassen. In der *Descriptio* findet sich außerdem eine logarithmische Berechnung eines Winkels mittelst der Seiten, für die er mit Hilfe einer stereographischen Projektion einen schönen Beweis führt.

7. Zahlentheorie, sowie unbestimmte Gleichungen und Kettenbrüche vor Fermat.

Zu allen Zeiten, in denen die Mathematik mit Eifer betrieben worden ist, wurden Betrachtungen über merkwürdige, ganzzahlige Zusammensetzungen und Nachforschungen nach ganzen Zahlen angestellt, die gewissen zahlentheoretischen Forderungen, wie z. B. denjenigen genügen, die bei den Alten die vollkommenen oder die befreundeten Zahlen charakterisieren, sowie nach

ganzen oder wenigstens rationalen Zahlen, die unbestimmte Gleichungen erfüllen. Wichtige Beiträge haben in dieser Beziehung Griechen, Inder und Araber geliefert; nach einzelnen Richtungen, so betreffs der unbestimmten Gleichungen 1. Grades und der Zauberquadrate, sind ihnen schon in uralter Zeit die Chinesen vorangegangen.

Die Ergebnisse, zu denen man gelangte, gehören zu denjenigen, die sich leicht von Geschlecht zu Geschlecht und von Volk zu Volk vererben. Die Eigenschaften eines Zauberquadrats z. B. springen, wenn es einmal hergestellt ist, so in die Augen, daß es auch denjenigen, die es gar nicht herzustellen wissen, doch eine gewisse Unterhaltung bietet, die sich dann immer weiter mitteilt. Andere Eigenschaften ganzer Zahlen kann man leicht in eine derartige rätselhafte und dadurch anziehende Form kleiden oder derart mit bestimmten anekdotenmäßigen Anwendungen verknüpfen, daß sie sich auch da im Gedächtnis erhalten, wo die Einsicht, welche die Entdeckung der Tatsache und die Herstellung der Aufgaben erforderten, mit der Zeit verloren geht. Tritt abermals eine tiefere Einsicht ein, so werden dergleichen Aufgaben befruchtend wirken, indem sie zur Nachforschung nach dem eigentlichen Zusammenhang und so zur Nachahmung anregen. Die Algebra kann sich übrigens auf ganz ähnlichem Wege verpflanzen; denn auch vielen algebraischen und bestimmten Aufgaben hat man eine phantasiereiche und anschauliche Einkleidung gegeben, wie es besonders bei den Indern üblich war.

Diese Form des Sammelns und Aufbewahrens mathematischer Beobachtungen setzt sehr früh ein. Einzelne der Aufgaben, die, sich nach den Verhältnissen der einzelnen Zeiten und Länder richtend, fortfuhren, in verschiedenem Gewande umherzuwandern, finden sich schon in dem altägyptischen Rechenbuche des Ahmes. So zeigt eine Aufgabe bei Leonardo von Pisa, welche von 7 alten Weibern redet, die nach Rom ziehen, je mit 7 Mauleseln, die je 7 Säcke tragen, die je 7 Brote enthalten, zu denen je 7 Messer gehören, die in je 7 Scheiden stecken, und zu berechnen verlangt, wieviel Stück dies ergibt, durch ihre bloße Form, daß sie eine damals bekannte Einkleidung der Aufgabe ist, die Summe $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$ zu finden. Leonardo teilt die traditionelle Lösung mit, die in allmählicher Berechnung von $7\ (1 + 7)$, $7\ (1 + 7)\ (1 + 7)$ u. s. w. besteht, und diese Tradition deutet auf Ahmes' Behandlung dieser Aufgabe zurück, bei welchem die Reihe gleichfalls die Siebenzahl, aber ein Glied weniger aufweist.

Während die Inder auf unmittelbare Vermehrung solch unterhaltender zahlentheoretischer Schätze ausgingen, suchten und fanden die griechischen Mathematiker bei ihrem Streben, die Dinge vom abstrakten und theo-

retischen Gesichtspunkte aus zu betrachten, durch ihre arithmetischen Fortschritte die allgemeinen Prinzipien, welche die Grundlage solcher Aufgaben bilden. Im späteren Altertum hat man indes dergleichen auch in Epigrammen gesammelt; einige von ihnen werden mit mehr oder weniger Recht auf Euklid und Archimedes zurückgeführt. Letzterem legt man namentlich eine Aufgabe über die Ochsen des Helios bei, die darauf abzielt, 4 ganze Zahlen zu finden, die 3 gegebene Gleichungen erfüllen. Selbstredend ist es, daß die phantasiereichen Araber manchen Satz und manche Aufgabe, die sie von den Griechen überliefert bekamen oder auch selbst ausfindig gemacht hatten, in ähnliche Formen eingekleidet haben.

Die Überlieferung tritt uns dann im späteren Mittelalter in den Aufgabensammlungen entgegen, die heutzutage wieder hervorgeholt werden. Während sie sich aber darin oft nur durch die unmittelbar anziehende Form geltend macht, behandeln sie Gelehrte natürlicherweise mit wirklicher Einsicht; so Chuquet, so etwas später Paciuoli, Tartaglia, Cardano und die Verfasser der Sammlungen mathematischer Kunststücke und Spiele, die im 17. Jahrhundert erschienen, Bachet und Schwenter und später Ozanam. Unter allen diesen aber ist vornehmlich Bachet hervorzuheben, in dessen *Problèmes plaisants et délectables* die Aufgaben nicht nur wie bei früheren Schriftstellern mit dem vollen Verständnis für den eigentlichen Kern der Frage, sondern von so allgemeinen Gesichtspunkten und mit einem solchen Sinn für ihren gegenseitigen Zusammenhang behandelt werden, daß seine Untersuchungen dadurch geradezu wissenschaftlichen Wert erhalten. Namentlich hat man ihm eine wirkliche Theorie der Behandlung unbestimmter Gleichungen 1. Grades zu verdanken.

Bevor wir diese besonders besprechen, wollen wir einige Proben der Aufgaben anführen, die sich bei Bachet finden. Sie bilden zugleich eine gute Auswahl aus der älteren Überlieferung, auf die er verweist; die Originalität beansprucht er nämlich nur für seine Behandlungsweise. Ein Teil der Aufgaben findet sich auch bei Chuquet; eine einzelne (Nr. 6; siehe unten) ist durch einen konstantinopolitanischen Sammler Maximus Planudes aus dem griechischen Altertum auf uns gekommen.

Die Aufgaben Bachets erheischen außer der Herstellung von Zauberquadraten vielfach das Erraten von Zahlen, über die man das Recht haben soll, gewisse Auskünfte zu verlangen, die in Gleichungen umgesetzt werden können, oder von denen außer einer alle Ziffern angegeben werden, und über die solche Aufschlüsse gegeben werden, daß ihre Divisionsreste bei dem Divisor 9 bekannt werden. Oft stellt er seine Aufgaben in allgemeiner Gestalt, spezialisiert sie aber später doch den überlieferten Fabeln gemäß; aus seinem Buche können wir also folgende als Beispiele solcher Fabeln herausgreifen.

1. 15 Christen und 15 Türken befinden sich auf dem Meere auf einem Schiffe. Es erhebt sich ein furchtbarer Sturm, und der Schiffer erklärt für notwendig, daß 15 Mann über Bord geworfen werden, damit die 15 übrigen gerettet werden. Erstere sollen durch eine Auszählung bestimmt werden, die man so schlau vornimmt, daß alle Christen gerettet werden, indem man alle Insassen in einen Kreis stellt und der Verabredung gemäß jeden neunten Mann, wenn man der Reihe nach zählt, über Bord wirft. Wie sind Christen und Türken aufzustellen?

Besonders mathematisch ist diese Aufgabe allerdings nicht, indem man einfach durch versuchsweise Auszählung von 30 Plätzen der Reihe nach findet, wen das Los trifft, und nur ein mnemotechnisches Mittel anwendet, um später bei der Ordnung der Personen selbst darüber im klaren zu sein, wie sie auszuführen ist. Dies Mittel besteht in einem Spruch, dessen Vokale die Zahlen der aufeinanderfolgenden Türken und Christen angeben. Bachet bemerkt, daß man in anderen ähnlichen Fällen andere Hilfsmittel ähnlicher Art benutzen kann, und berichtet — als Beweis für den Nutzen, den es gewährt, solche Aufgaben lösen zu können —, daß Josephus auf ähnliche Weise sein Leben rettete, als er sich nach der Zerstörung Jerusalems mit mehreren Menschen in einer Höhle verborgen hielt und die Lebensmittel ausgingen.

2. Ein armes Weib mit einem Korb Eier, die es auf dem Markte verkaufen will, wird von jemand angerannt, so daß der Korb zu Boden fällt und die Eier zerschlagen werden. Der Betreffende will der armen Frau den Verlust ersetzen und fragt, wieviel Eier es gewesen seien. Sie kann sich nicht erinnern, besinnt sich aber doch, daß, wenn sie sie zu 2 oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 zusammenstellte, immer 1 übrig blieb, nicht aber, wenn sie sie zu 7 zusammenstellte. Bachet gibt die Lösung so, daß sie auch bei anderen aufgegebenen Zahlen anwendbar wird, und hebt ausdrücklich hervor, daß in diesem Falle die Zahlen, die statt 2, 3, 4, 5, 6 eintreten, zu der für 7 eintretenden prim sein müssen, und daß die Aufgabe dann unendlich viele Lösungen erhält.

3. Zwei gute Kameraden haben 8 Liter Wein in einem Maße, das gerade 8 Liter faßt. Sie wollen die 8 Liter zu gleichen Teilen teilen und können dazu noch zwei andere Maße benutzen, von denen eins 5, das andere 3 Liter faßt. Wie ist das zu machen?

4. Drei eifersüchtige Ehemänner sollen nebst ihren Weibern über einen Fluß gesetzt werden, wo sie nur eine Jolle ohne Fährmann finden, die aber so klein ist, daß sie nur 2 Personen aufnehmen kann. Wie sollen nun alle 6 Personen über den Fluß kommen und zwar so, daß sich in keinem Augenblicke eins der Weiber mit einem oder zwei Männern zusammen findet, ohne daß zugleich ihr eigener Mann zugegen ist?

5. Welches ist die kleinste Anzahl von Gewichtstücken, mit denen man Gegenstände im Gewichte von 1 bis zu 40 ganzen Pfunden wiegen kann?

6. Auf seinem Sterbebette verteilt ein Mann sein Geld so unter seine Kinder, daß das erste einen Taler und $\frac{1}{7}$ des übrigen, das zweite 2 Taler und $\frac{1}{7}$ des übrigen, das dritte 3 Taler und $\frac{1}{7}$ des übrigen u. s. w. erhalten soll. Durch diese Teilung bekommen alle, wie sich zeigt, gleich viel. Es fragt sich: Wie groß war die verteilte Summe und wie groß die Anzahl der Kinder?

7. 41 Personen, sowohl Männer wie Weiber und Kinder, beteiligen sich an einer Mahlzeit, die im ganzen 40 Sous kostet. Dabei werden für jeden Mann 4 Sous, für jedes Weib 3und für jedes Kind $\frac{1}{3}$ Sous gezahlt. Wieviel Männer, Weiber und Kinder waren es?

Man merkt sogleich, daß ein Teil dieser Aufgaben, besonders diejenigen, die wir als Nr. 2 und Nr. 7 bezeichnet haben, auf die Lösung unbestimmter Gleichungen 1. Grades in ganzen Zahlen hinauslaufen. Während Diophant von einer solchen Lösung nichts wußte, trifft man bei den Indern dazu dienende Regeln an, durch welche die Ausführung von ungefähr denselben Rechnungen abhängig wird, zu denen heute der Gebrauch von Kettenbrüchen führt. Indes haben sich diese Regeln nicht auf die Europäer neuerer Zeit verpflanzt, was man eben aus der weit begrenzteren Behandlung von Aufgaben wie den hier genannten und einigen anderen ersieht, die von unbestimmten Gleichungen abhängen.

Solche Aufgaben finden sich schon bei Leonardo von Pisa; bei ihm sind sie aber zunächst nur durch die klare Form von Interesse, in welcher er Regeln für ihre Lösung aufstellt. Die Aufgaben selbst sind nämlich in den Unbekannten homogen und führen zur Bestimmung der Verhältnisse derselben, wonach es nicht schwierig ist, ganze Zahlen zu bilden, die in diesen Verhältnissen stehen. Sie sind also, wenn auch in ganz neuem Gewande, von derselben Art wie diejenigen, welche die Astronomen des Altertums im Abend- und Morgenlande lösen mußten, um die Perioden zu finden, nach denen eine Gruppe von Erscheinungen aufs neue gleichzeitig eintritt.

Ein Beispiel für eine andere Art von Aufgaben, deren Behandlung sich bei den Schriftstellern zu Anfang der neueren Zeit oft findet, hat man in obiger Aufgabe 7. Verschiedentlich eingekleidet, bezwecken sie die Lösung der Gleichungen

$$x + y + z = a,$$
$$bx + cy + dz = e$$

in positiven ganzen Zahlen. In dem hier vorliegenden Falle bezeichnen x, y, z die Anzahl der Männer, Weiber und Kinder; zugleich ist $b > c > d$.

In den verschiedenen Aufgaben können übrigens a, b, c, d, e verschiedene Werte haben. Zur Lösung dieser Aufgaben werden mehrere ganz unsystematische Verfahren angewendet, die nicht einmal die Gewähr boten, Auflösungen in ganzen Zahlen, noch weniger alle möglichen Auflösungen zu erhalten. Als Beispiel eines solchen sinnlosen Verfahrens mag die Anwendung zweier Gruppen von Versuchswerten dienen, wie sie die *regula duorum falsorum* vorschreibt. Größeren Wert besaß eine Regel, welche von den Arabern herrührte und den Namen Setîsch trug. Sie zielte, um uns an die besprochene Einkleidung der Aufgabe zu halten, darauf ab, vorläufig die Summe zu bestimmen, die mehr bezahlt werden muß, als wenn alle Personen Kinder wären. Dies führt zu derjenigen Bestimmung der Unbekannten, die man heutzutage erhält, indem man die obere Gleichung mit d multipliziert und von der unteren abzieht, also

$$(b - d)\, x + (c - d)\, y = e - da.$$

Danach gilt es nur, den bekannten Wert $e - da$ als Summe zweier Zahlen darzustellen, von denen die eine durch $b - d$, die andere durch $c - d$ teilbar ist. Dies geschieht durch Versuche; man kann sich aber darauf verlassen, alle Auflösungen zu erhalten, wenn man x alle ganzen Zahlenwerte unter $\frac{e - da}{b - d}$ beilegt. Man achtete allerdings nicht immer darauf, auch wirklich alle Lösungen zu gewinnen.

Bachet wendet gegen diese Methode ein, daß sie einerseits zu einer Reihe von Versuchen ihre Zuflucht nimmt, und daß sie andrerseits zu wenig allgemein sei, da sie keine klare Bestimmung der unendlich vielen Auflösungen gebe, welche die Aufgaben besitzen, sobald man von solchen Einkleidungen absieht, die nur ganzzahlige Werte der Unbekannten gestatten. Der Unzulänglichkeit nach dieser Seite hilft er durch eine algebraische Behandlung der Frage ab. Dabei führt er jedoch nicht für alle Unbekannten Zeichen ein, sondern, als treuer Schüler Diophants, nur für die eine, von uns hier x genannte. Mit der Behendigkeit eines Diophant bildet er nun Ausdrücke für y und z aus x, die wir, wie folgt, schreiben würden:

$$y = \frac{e - da}{c - d} - \frac{b - d}{c - d}\, x,$$

$$z = \frac{ca - e}{c - d} + \frac{b - c}{c - d}\, x.$$

Bachet zeigt uns dies sein Verfahren allerdings nur an ganz bestimmten Werten der gegebenen Zahlen, aber er erhält doch gleichzeitig alle verschiedenen Formen dieser Ausdrücke, indem er ebensowohl Beispiele in Betracht zieht, in denen $ca > e$ ist, wie solche, in denen $ca < e$ ist; er hebt

dabei ausdrücklich hervor, daß x, wenn die Aufgabe nicht — wie eben die obige — eine solche spezielle Form hat, daß nur die ganzzahligen Lösungen in Betracht kommen, alle Werte annehmen kann, die y und z positiv machen, ohne Rücksicht darauf, ob y und z zugleich ganze Zahlen werden. Seine algebraische Behandlung hat somit die volle Allgemeinheit, die man ohne Gebrauch negativer Zahlen erreichen kann.

Was bei Bachet von zahlentheoretischem Interesse ist, ist gleichwohl die Lösung in ganzen Zahlen. Wenn er hier zuerst darauf hinweist, die Forderung, daß y und z positiv sein sollen, beschränke die Versuche auf eine begrenzte Anzahl ganzer Werte von x, so scheint er freilich zu übersehen, daß das Nämliche mit der eben angeführten älteren Lösung der Fall war, die sich zudem durch ihre Einfachheit auszeichnet. Seine wirkliche Berechtigung, Lösungen, die sich lediglich auf Versuche stützen, zu kritisieren, tut er dagegen dar, indem er auf eine Reihe von Sätzen hinweist, die er zunächst in seinen *Eléments d'Arithmétique*, sodann in der zweiten Ausgabe der *Problèmes* aufstellte. Die Sätze enthalten eine wirkliche Theorie der unbestimmten Gleichungen 1. Grades und ein Verfahren, durch das er ihre Lösungen in ganzen Zahlen direkt bestimmen kann. Wie diese Sätze angewendet werden können, zeigt er an einer Aufgabe in der zweiten Ausgabe seines Buches.

Zu welch allgemeinem Standpunkte sich Bachet auf diesem Gebiete emporschwang, ist aus dem 25. der betreffenden Sätze ersichtlich, der behauptet, daß Zahlen, die bei gegebenen Divisoren die nämlichen Divisionsreste ergeben, eine arithmetische Progression, und zwar mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Divisoren als Differenz bilden. Es kommt deshalb nur darauf an, unter diesen Zahlen diejenige zu suchen, die kleiner ist als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, was unmittelbar auf die angeführte Aufgabe 2 von dem Weibe mit den Eiern Anwendung findet.

Um nun auch in anderen Fällen (wie in Aufgabe 7) die eine Lösung zu finden, aus der alle übrigen hergeleitet werden können, kommt es, wie man weiß, nur darauf an, Gleichungen von der Form

$$ax - by = 1 \tag{1}$$

zu lösen, in denen a und b zueinander prim sind. Darauf führt Bachet in dem 21. Satze die Bestimmung von x und y durch

$$ax - by = c$$

zurück. Gleichung (1) löst er in dem 18. Satze, indem er das kleinste Multiplum von a sucht, das ein Multiplum von b um 1 übersteigt. Er beweist — in Übereinstimmung mit dem späteren allgemeinen Satz 25, den wir schon erwähnt haben — vorher erstens, daß der zugehörige kleinste Wert

von x der einzige ist, der kleiner als b ist, und zweitens, daß die kleinsten Lösungen der Gleichung

$$by - ax = 1 \tag{2}$$

aus denen von (1) durch $y' = a - y$, $x' = b - x$ hergeleitet werden können.

Um nun wirklich die kleinsten Werte von x und y zu finden, welche die Gleichung (1) erfüllen, verfährt Bachet zunächst gerade so, als wenn man den größten gemeinschaftlichen Faktor sucht. Um seine Regeln zu verstehen, drücken wir dieses Verfahren in moderner algebraischer Sprache durch folgende Gleichungen aus:

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 \\ b &= q_2 r_1 + r_2 \\ &\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 1. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt unmittelbar, daß

$$r_{n-1} x_n - r_n y_n = 1$$

durch $x_n = 1$, $y_n = q_{n+1}$ erfüllt wird. Weil nun $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$, läßt sich diese Gleichung in

$$r_{n-1} (x_n + q_n y_n) - r_{n-2} y_n = 1$$

transformieren, woraus folgt, daß der Gleichung

$$r_{n-2} x_{n-1} - r_{n-1} y_{n-1} = -1$$

durch $x_{n-1} = y_n$ und einen ganzen Wert von y_{n-1} genügt wird, dessen Ausdruck $x_n + q_n y_n$ wir allerdings ausgeschrieben haben, den Bachet aber berechnet, indem er in die Gleichung den Wert von x_{n-1} einsetzt. Demnächst wird die Gleichung

$$r_{n-3} x_{n-2} - r_{n-2} y_{n-2} = 1$$

erfüllt werden durch $x_{n-2} = y_{n-1}$ und einen ganzen Wert von y_{n-2}, der aus der Gleichung selbst berechnet werden kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man zuletzt, wenn n gerade ist, daß der Gleichung

$$ax - by = 1$$

der Wert $x = y_1$, wo y_1 der vorhergehenden Gleichung angehört, und ein ganzer Wert von y entsprechen. Wenn n ungerade ist, hat man nur die zuerst gelöste Gleichung mit

$$r_{n-1} x'_n - r_n y'_n = -1$$

zu vertauschen, wo $x'_n = r_n - 1$, $y'_n = r_{n-1} - q_{n+1}$.

Bachet, der keine Zeichensprache benutzt, knüpft die Erklärung an Zahlenbeispiele an, hebt aber die in den vorhergehenden Formeln aus-

gedrückten Regeln für die Bestimmung der Größen x ausdrücklich hervor. Hätte man x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, $\cdots$ nach den in unserer Darstellung gegebenen Formeln $x_n = 1$, $x_{n-1} = y_n = q_{n+1}$, $x_{n-2} = y_{n-1} = x_n + q_n y_n$ u. s. w. durch die Quotienten q ausgedrückt, so würde die Bestimmung dieselbe sein, wie bei der Berechnung eines Kettenbruches und seiner allmählichen Näherungsbrüche. Bachet dagegen benutzt vielmehr die allmählichen Divisionsreste r_1, r_2, r_3, $\cdots$ als Koeffizienten der Gleichungen, die er der Reihe nach bildet. Dadurch wird seine Berechnung etwas weitläufiger als die heute gebräuchliche. Die unmittelbare Beziehung auf Kettenbrüche findet sich auch nicht in der späteren Behandlung derselben Frage durch Rolle und konnte erst stattfinden, als man aus anderen Rücksichten mit diesen Brüchen und ihren Eigenschaften näher bekannt geworden war.

Der Anfang dazu war allerdings einer vereinzelten Anwendung wegen schon etwas vor Bachets Zeit gemacht worden. Diese Anwendung bezweckte die allmähliche Berechnung von Näherungswerten für Quadratwurzeln. Soll $\sqrt{N}$ berechnet werden und ist a eine Größe, deren Unterschied von der eigentlichen Wurzel kleiner als 1 ist, setzt man ferner $N = a^2 + r$, so wird $a + \frac{r}{2a+1}$ ein noch besserer Näherungswert sein, der doch immer kleiner als $\sqrt{N}$ ist. Wird dieser statt a eingesetzt, so erhält man immer stärkere Näherungswerte, die mit einigen derjenigen zusammenfallen, die man durch Kettenbrüche gewinnt. Dies Verfahren, dem man bei Alkarchî begegnet, geht in der Tat sicherlich auf die Griechen zurück. Zu einer eigentlichen Kettenbruchbildung kommt jedoch erst Bombelli in seiner Algebra 1572, indem er

$$\sqrt{a^2 + r} = a + x$$

setzt und daraus $r = 2ax + x^2$ herleitet, was wiederum $x = \frac{r}{2a+x}$ ergibt.

Allmählich stärkere Annäherung erhält man, wenn man statt x im Nenner allmählich die Näherungswerte einsetzt, die man schon für diese Größe erhalten hat. 1613 knüpft dann Cataldi hieran den fortgesetzten Gebrauch der Bruchbezeichnungen, also eine wirkliche Kettenbruchbezeichnung, an:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}},$$

nur daß er *et* statt + setzt. Er macht davon übrigens noch weitergehende Anwendungen und sorgt namentlich dafür, die Wurzel zwischen immer engere Grenzen einzuschließen. Solche erhält er z. B. für

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cdots}},$$

indem er den Nenner, mit dem er aufhört, $= 8\frac{1}{4}$ oder $8\frac{8}{33}$ setzt. Die Einsetzungen führen offenbar zu zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen. Er bemerkt also, daß die Näherungsbrüche der Kettenbrüche abwechselnd größer oder kleiner sind als die gesuchte Wurzelgröße.

Die hier angewendeten Kettenbrüche sind jedoch noch nicht die mit den Zählern 1. Dergleichen sind erst diejenigen, von denen Schwenter etwas später eine weniger spezielle Anwendung und zwar zu einer einfacheren Darstellung von Brüchen macht, deren Zähler und Nenner größere Zahlen sind. Man ersieht das deutlich aus folgendem Schema der Entwickelung von $\frac{177}{233}$ in einen Kettenbruch und aus der gegebenen Bildung der Näherungsbrüche:

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Hier enthält die erste Kolumne den Nenner des gegebenen Bruches, seinen Zähler und die der Reihe nach durch Division jeder Zahl in die vorangehende entstehenden Divisionsreste; die zweite Kolumne enthält die durch Divisionen entstehenden Quotienten, so daß

$$\frac{177}{233} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}$$

Die dritte Kolumne enthält die Zähler und die vierte die Nenner der allmählich gebildeten Näherungsbrüche $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{79}{104}$. Jede Zahl der 3. und 4. Kolumne wird mit der heute gebräuchlichen Regel übereinstimmend gebildet, indem die nächsthöhere Zahl mit dem links von ihr (in der 2. Kolumne) stehenden Quotienten multipliziert, zu diesem Produkte aber die zweithöhere Zahl der 3., bez. 4. Kolumne addiert wird. Man sieht hier die Grundlage der ganzen Lehre von den Kettenbrüchen mit dem Zähler 1. Sie ist später vollständig von Huygens entwickelt worden, der dasselbe wie Schwenter bezweckte und wirklich beweist, daß Kettenbrüche bessere Näherungswerte geben als irgend welche andere Brüche, deren Nenner nicht größer ist, und daß der Kettenbruch selbst zwischen 2 aufeinander folgenden Näherungsbrüchen liegt.

Aber nicht nur der in unterhaltenden Aufgaben niedergelegte zahlen-

theoretische Stoff verpflanzte sich auf die neuere Zeit. Während dieser in Bachets Behandlung unbestimmter Gleichungen 1. Grades und der Lösung derselben in ganzen Zahlen seine Früchte trug, regte die abstraktere Darstellung Diophants eine tiefere Behandlung besonders unbestimmter Gleichungen 2. Grades und ihrer Lösung in rationalen Zahlen an. Untersuchungen dieser Art waren von den Arabern fortgesetzt worden und fanden früh auch in Europa Eingang. So behandelt schon Leonardo von Pisa recht schwierige Fragen dieser Art. Verstand man es auch in den nächsten Jahrhunderten in dieser Beziehung ebensowenig wie in anderen, Leonardo zu folgen, so wurden doch solche Fragen mit voller Kraft wieder aufgenommen, als man unmittelbar mit Diophant bekannt wurde. Dies war der Fall bei Regiomontanus, der auch auf diesem Gebiete seine schnelle Aneignung des Überlieferten und sein großes Vermögen, es weiter zu führen, offenbarte. Von diesem Vermögen zeugen, um nur einige Beispiele herauszugreifen, Aufgaben, wie die, die Gleichungen

$$x + y + z = 116, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4624$$

zu lösen oder 4 Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist. Daß jedoch auch andere gleichzeitige Mathematiker die Ereignisse auf diesem Gebiete verfolgten, erhellt daraus, daß Jakob von Speier zu der letzten Aufgabe zwei Gruppen von Lösungen fand.

Mehreren anderen, namentlich Stifel, hat man auch zahlentheoretische Ergebnisse zu verdanken. Untersuchungen von etwas systematischerem Charakter finden wir bei Vieta. Seine Zeichensprache, besonders auch die Einführung von Zeichen für bekannte, aber beliebige Zahlen mußten in der Behandlung zahlentheoretischer Sätze eine ähnliche Bedeutung gewinnen wie in der Algebra. Dies zeigt sich in seinen *Zetetica*, wo er u. a. einen Teil von Diophants Aufgaben behandelt, und wo seine Zeichensprache ihm gestattet, die Allgemeinheit der Aufgaben zu bewahren, die Diophant in seiner Darstellung verloren geht, indem er sogleich den Zahlen, die freilich als beliebig vorausgesetzt werden, ganz bestimmte Werte erteilt (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 246).

In der Schrift: Notizen zur *Logistica speciosa*, der wir schon die Bestimmungen von $\sin nx$ und $\cos nx$ entnommen haben, wird die Frage nach der Bildung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke behandelt. Vieta, der in diesem wie in vielen anderen Punkten sein Interesse an dem schon von den Alten in der Mathematik Erreichten bezeugt, begnügt sich nicht mit der direkten Bestimmung solcher Dreiecke, sondern zeigt auch, wie man aus zwei oder auch nur einem derselben neue bilden kann. Der gewonnene Satz ist freilich kein anderer als derjenige, den schon Diophant kannte:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2,$$

und ist spezieller als ähnliche Umformungen bei den indischen Mathematikern; aber Vieta läßt ihn in seinem Zusammenhange mit den trigonometrischen Untersuchungen auftreten, die ihn gerade beschäftigten. Wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, d und c die eines zweiten, so ist, da Vieta *sin* und *cos* nicht besonders bezeichnet, sondern als das Verhältnis der Katheten zur Hypotenuse nimmt, seine Formel die nämliche wie

$$1 = sin^2(x \pm y) + cos^2(x \pm y).$$

Er bemerkt dazu ausdrücklich, daß, wenn man (bei unserem oberen Vorzeichen) statt der zwei gegebenen Dreiecke ein und dasselbe Dreieck zweimal nimmt, der gebildete Winkel $2x$ wird.

Finden wir somit bei Vieta keine neuen zahlentheoretischen Resultate, so gibt doch seine Darstellung, die zugleich neue Anschauungsweisen verarbeitet, den gewonnenen Resultaten größere Allgemeinheit. Dadurch gewann man auch in der Zahlentheorie eine Grundlage für die bedeutenden Erweiterungen, über die wir im nächsten Abschnitt zu reden haben.

Diese Erweiterungen wurden verschiedentlich schon von Bachet vorbereitet, und zwar nicht nur in seinen *Problèmes* durch die in vielen Beziehungen anregende Behandlung der einzelnen Aufgaben und durch die in der Einleitung gebotene klare Darstellung wichtiger allgemeiner Sätze, sondern auch in seiner Ausgabe des Diophant, in welcher die „Porismen", mit denen er sie einleitet, und die Anmerkungen, die er den Aufgaben hinzufügt, bedeutungsvoll sind. Die genannten Porismen enthalten u. a. mehrere Sätze über gewisse Zusammensetzungen von Zahlen, z. B. daß Zahlen von der modern geschriebenen Form

$$\frac{a^2 - c}{a - b} \cdot \frac{b^2 - c}{a - b} + c$$

Quadrate sein werden. Seine Anmerkungen eröffnen oft einen Blick in Gebiete, auf denen man weitergehen konnte — und bald auch wirklich weiterging.

8. Die zahlentheoretischen Sätze Fermats.

Hauptsächlich durch die hier besprochenen Arbeiten Bachets war, besonders in seinem eigenen Vaterlande die Grundlage und das Interesse für Untersuchungen über ganze Zahlen vorbereitet. Aufgaben, sogar von hoher Schwierigkeit, lagen sofort in großer Anzahl vor. Man hatte nur nötig, im Anschluß an die Behandlung unbestimmter Gleichungen 1. Grades durch Bachet auch für die unbestimmten Gleichungen 2. Grades, mit deren Lösung in rationalen Zahlen sich Diophant begnügt hatte, Lösungen in ganzen Zahlen zu suchen und übrigens solche Untersuchungen zu ver-

vollständigen, die man im Altertum begonnen hatte. Man konnte, wie auch Bachet damit angefangen hatte, die Aufgaben Diophants verallgemeinern und die Möglichkeitsbedingungen der so gebildeten allgemeineren Aufgaben suchen. Dazu hatte man nicht nur die Arbeitsmethoden des Altertums, sondern auch die Algebra Vietas, die ja schon von ihm selbst auf Aufgaben bei Diophant angewendet worden war.

Die Algebra war auf ihrem damaligen Standpunkte vielleicht für zahlentheoretische Untersuchungen sogar besonders günstig. Sie gestattete einerseits das Festhalten an den leitenden Gedanken und verlieh so allen Schlußfolgerungen die gehörige Sicherheit und Allgemeingültigkeit. Andererseits arbeitete sie noch zu schwerfällig, um zu einem verfrühten Gebrauch von Abstraktionen aufzufordern, die sich zwar an den eigentlichen Kern der Fragen halten und deren Beantwortung, wenn sie einmal gefunden, in umfassendem Maße geben, die aber die Anschauung des Zahlenmaterials aufgeben, aus welchem die Beobachtungen und Erfahrungen geschöpft werden müssen, die oft am besten zur Beantwortung vorgelegter Fragen und zur Entdeckung ganz neuer Resultate führen. Zu jener Zeit konnte keine Rede davon sein, die Zahlentheorie zu betreiben, ohne mit ihr reichliche Übung im Handhaben bestimmter ganzer Zahlen zu verbinden. Der nämliche Umstand machte dagegen die Darstellung und die Mitteilung strenger zahlentheoretischer Beweise und allgemeiner Methoden außerordentlich schwierig.

Unter den Zahlentheoretikern der Zeit, die uns hier beschäftigt, ragt wohl Fermat so weit über die übrigen empor, daß wir eigentlich nur Veranlassung haben, uns mit seinen Arbeiten und Resultaten zu beschäftigen. Die Resultate, die er ohne Beweise hinterlassen hat, und die sich teils in den nach seinem Tode veröffentlichten schriftlichen Bemerkungen zu seinem Handexemplar von Bachets Diophant, teils in seinen für einen oder mehrere Empfänger bestimmten Briefen finden, haben noch bis in unsere Zeit für die bedeutendsten Untersuchungen Ausgangspunkte abgegeben, ja, sind noch nicht einmal alle bewiesen. Es muß jedoch hervorgehoben werden, daß Fermat einerseits in dem regen Wettstreite der Mathematiker seiner Zeit, in dem er allerdings bald der erste wurde, die nötige Anregung, andrerseits später für die Schwierigkeit seiner Aufgaben und die Größe seiner Erfolge ein Verständnis fand, das sich von einer einzelnen Seite aus auf die Untersuchungen selbst erstreckte. Er hatte so nicht ganz die Verbindung mit anderen und ihren Arbeiten zu entbehren, deren auch das Genie bedarf. Diese mehr oder weniger unmittelbare Mitarbeiterschaft fand er zum Teil bei Leuten, die sich damals auf anderen Gebieten der Mathematik hervortaten, wie Descartes und später Pascal, aber auch bei weniger bedeutenden Mathematikern, die aber das Studium ganzer Zahlen, wie Sainte-Croix, Saint

Martin und vor allen Frénicle, als Spezialität betrieben. Später teilte Fermat seine Aufgaben und Resultate auch englischen Mathematikern mit, die erst durch ihn zur Beschäftigung mit diesen Fragen veranlaßt wurden. Daß übrigens seine Mitarbeiter auf dem Gebiete der ganzen Zahlen wesentlich Männer ohne umfassende mathematische Bildung waren, verschuldete es vielleicht, daß sein wiederholtes Anerbieten, seine Methoden in diesem oder jenem Punkte ausführlicher darzulegen, so wenig benutzt wurde.

Die Korrespondenz mit Frénicle, die meistens durch Mersenne vermittelt wurde, nahm auf eine recht charakteristische Weise ihren Anfang. Anläßlich einiger von Fermat über die Herstellung von Zauberquadraten gefundenen Ergebnisse, die Mersenne Frénicle mitgeteilt hatte, rühmte sich dieser in einem Briefe seiner eigenen in mehreren Beziehungen weitergehenden Resultate auf demselben Gebiete, z. B. betreffs der Herstellung derartiger Zauberquadrate aus den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, daß nicht nur diese Quadrate selbst, sondern auch die durch Wegschneiden der äußeren Felderreihen in bestimmter Anzahl entstehenden Quadrate wiederum Zauberquadrate sind. Er berührt auch gewisse Übertragungen seiner Resultate auf den Raum.

Dem äußerst überlegenen Tone gegenüber, in dem Frénicle von den Leistungen Fermats redet, macht dieser in seiner Antwort nur die einfache Bemerkung, daß, wenn er die Ehre hätte, mit Frénicle bekannt zu sein, dieser aus seinem Briefe sicherlich einige Worte weggelassen haben würde. Er begnügt sich übrigens damit, ihn auf die bedeutungsvollen Resultate hinzuweisen, die er auf dem nämlichen Gebiete durch seine Methode gefunden habe, und zwar ebenso auf solche, deren Frénicle sich rühmt, wie auf neue, von denen er gern wissen möchte, ob sie dieser durch seine Methode zu finden im stande sei, z. B. betreffs der Anzahl von Zauberquadraten mit einer gewissen Anzahl von Feldern und der Herstellung von Zauberkuben, in denen alle quadratischen, einem Paar Seitenflächen parallelen Schichten Zauberquadrate von derselben Summe sind. Der Ton des Frénicleschen Briefes hält dabei Fermat nicht ab, seine ungeheuchelte Bewunderung zu bezeugen, daß Frénicle es ohne Algebra in der Kenntnis der ganzen Zahlen so weit bringen konnte, und seine große Lust zu bekunden, Methoden genauer kennen zu lernen, mit denen man schneller und leichter als mit den seinigen arbeiten zu können scheine. Von der Zeit ab ist Frénicle nicht nur derjenige, dem er am liebsten seine Resultate mitteilt und seine Aufgaben stellt, sondern dessen Resultate und Aufgaben er zumeist auch zur Erweiterung seiner eigenen Untersuchungen benutzt. Das Verhältnis wird allerdings einmal ein wenig dadurch gestört, daß Frénicle

und Saint Martin glaubten, Fermat habe sie anführen wollen, indem er ihnen unmögliche Aufgaben gestellt habe; Fermat aber reinigt sich sogleich von dieser Beschuldigung, indem er ihnen die Lösung einer der Aufgaben mitteilt, die verlangte, ein rechtwinkliges Dreieck von der Art zu finden, daß sowohl die Hypotenuse als die Summe der Katheten Quadratzahlen sind; die von Fermat mitgeteilte Lösung ist ein Dreieck mit den Seiten: 4687 298 610 289; 4565 486 027 761; 1061 652 293 520.

Der Argwohn, es könne Fermat einfallen, unmögliche Aufgaben zu stellen, war freilich insofern nicht unbegründet, als er seinerzeit Frénicle und früher schon Sainte-Croix die Aufgaben gestellt hatte,

1. ein rechtwinkliges Dreieck [mit rationalen Seiten], dessen Inhalt eine Quadratzahl ist;
2. zwei Biquadrate, deren Summe ein Biquadrat ist;
3. eine Reihe von vier Quadraten mit derselben Differenz;
4. zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe eine Kubikzahl ist.

Er hatte sie im vollen Bewußtsein ihrer Unmöglichkeit gestellt, um aus der Antwort, die entweder auf Unmöglichkeit bei Zahlen bis zu einer gewissen Grenze oder auf absolute Unmöglichkeit lauten mußte, zu schließen, ob die beiden anderen Zahlentheoretiker mit Hilfe von Tafeln, also mehr empirisch zu Wege gingen, oder eine allgemeine Theorie besäßen. Aus seinen Bemerkungen darüber kann man entnehmen, daß letzteres bei ihm selbst der Fall war.

Die Sätze und Aufgaben, die bereits gelegentlich erwähnt sind, können als Beispiele der vielen dienen, die Fermat nach und nach aufgestellt hat. Seine Aufschlüsse über die Methoden, durch die er solche Aufgaben gefunden, gelöst und bewiesen hat, sind so geringfügig, daß die fertigen Resultate das Wesentliche des Erbteiles sind, das er der Wissenschaft hinterlassen hat. Diese Resultate sind indes so groß und bedeutungsvoll, daß man es nicht versäumen darf, die erwähnten spärlichen Aufschlüsse, die sich namentlich in seinen Briefen finden, zu benutzen, um wenigstens den Zusammenhang zwischen den Untersuchungen aufzufinden, die zu den wichtigsten seiner zahlreichen Entdeckungen geführt haben.

Ein Teil derselben betrifft die Zerlegbarkeit von Zahlen. Zunächst wollen wir ein Verfahren anführen, von dem er ausnahmsweise vollständig Rechenschaft ablegt, und das dazu dient, Faktoren einer vorgelegten Zahl zu finden, wozu Fermat oft Veranlassung hatte. Das Verfahren ist besonders dazu geeignet, nachdem man durch die üblichen Versuche die kleineren Primfaktoren ausgeschieden, solche Faktoren zu finden, die der Quadratwurzel der Zahl nahe liegen. Ist die Zahl selbst N, a die größere der beiden der Quadratwurzel zunächst liegenden ganzen Zahlen, so hat man

$$N = a^2 - b.$$

Ist b hier keine Quadratzahl, so findet man durch eine sehr einfache Rechnung eine Zahl $b_1 = b + 2a + 1$, so daß

$$N = (a+1)^2 - b_1$$

wird; durch die nämliche Rechnung erhält man weiterhin

$$N = (a+2)^2 - b_2$$

u. s. w. Daß die allmählich gefundenen Zahlen b keine Quadratzahlen sind, kann man in den meisten Fällen an der letzten oder den beiden letzten Ziffern sehen; nur wo dies Kennzeichen nicht vorliegt, hat man eine Quadratwurzelausziehung zu versuchen. So fährt man fort, bis man eine Zerlegung in

$$N = p^2 - q^2 = (p-q)\ (p+q)$$

erhält; da nun N schon durch Absonderung des Faktors 2 ungerade gemacht worden ist, können auf diesem Wege alle Zerlegungen in Faktoren gefunden werden.

Die Sätze Fermats über die Teilbarkeit der Zahlen von einer gewissen bestimmten Zusammensetzung sind mit einer Klasse von Untersuchungen verknüpft, die ihn früh beschäftigten, und in denen er es seinen Briefen nach allmählich zu hoher Meisterschaft gebracht haben muß. Sie schlossen sich den Forschungen des Altertums über die sogenannten vollkommenen und befreundeten Zahlen an, umfaßten aber außerdem auch solche Zahlen, die zur Summe ihrer aliquoten Teile (d. h. der Summe aller Zahlen, die in ihnen aufgehen) in gegebenen Verhältnissen stehen.

Um die Bemerkungen Fermats über seine dazu angewendeten Methoden zu verstehen, muß man sich erinnern, daß die Summe der aliquoten Teile der Zahl $p^\alpha \cdot q^\beta \cdots$, wo $p, q \cdots$ Primzahlen sind,

$$(1 + p + \cdots + p^\alpha)\ (1 + q + \cdots + q^\beta) \cdots - p^\alpha \cdot q^\beta \cdots$$

oder

$$\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q-1} \cdots - p^\alpha\ q^\beta \cdots$$

ist.

Diesen allgemeinen Satz spricht Fermat allerdings nirgends aus; seine ausführlichsten Bemerkungen darüber knüpfen sich zudem an solche einfache Fälle an, wo von Zahlen von der Form $2^\alpha \cdot p$ oder $2^\alpha \cdot p \cdot q$ die Rede ist, in denen p und q Primzahlen sind. Hierin schließt er sich sowohl Euklid, als Thâbit ibn Kurra an, die beziehungsweise die vollkommenen Zahlen von der Form $2^\alpha \cdot p$ und gewisse befreundete Zahlen von der Form $2^\alpha \cdot p \cdot q$ oder $2^\alpha \cdot r$ bestimmt haben (Zeuthen, Altertum u. Mittelater, S. 158 u. 311). Fermat behauptet eine Methode zu besitzen, durch welche er aus einer Zahl von der Form $2^\alpha \cdot p \cdot q$, wie 120 $(= 2^3 \cdot 3 \cdot 5)$, die halb so groß ist wie die Summe ihrer aliquoten Teile, die nächste 672 $(= 2^5 \cdot 3 \cdot 7)$

hergeleitet habe, welche die nämliche Eigenschaft besitze. Er gewann also aus einer Gleichung von der Form

$$(2^{\alpha+1}-1)(1+p)(1+q) = 3 \cdot 2^{\alpha} \cdot p \cdot q,$$

in der $\alpha = 3$, $p = 3$, $q = 5$, eine neue, in welcher α und q beziehentlich gleich 5 und 7 geworden sind.

Dieselbe Methode will er angewendet wissen, um aus den befreundeten Zahlen 220 $(= 2^2 \cdot 5 \cdot 11)$ und 284 $(2^2 \cdot 71)$ die neuen befreundeten Zahlen 17296 $(= 2^4 \cdot 23 \cdot 47)$ und 18416 $(= 2^4 \cdot 1157)$, also aus einer Lösung der beiden Gleichungen

$$(2^{\alpha+1}-1)(p+1)(q+1) = 2^{\alpha} \cdot p \cdot q + 2^{\beta} \cdot r = (2^{\beta+1}-1)(r+1),$$

in denen p, q und r Primzahlen sind, eine zusammengesetztere herzuleiten.

Er bemerkt ferner von seiner Methode, daß sie die nämliche sei wie die von ihm in seiner Differentiation angewendete. Demzufolge muß sie in Umformung von Gleichungen bestanden haben, indem statt einer gewissen Größe, z. B. q, eine andere, z. B. $q + h$, eingesetzt wird, was mit einer Vertauschung von α mit einem neuen Werte verbunden gewesen sein muß, also in einfachen algebraischen Umformungen.

Die Resultate, die Fermat hier mitteilt, sind weder im Vergleich zu denen, die wir bei dem soeben angeführten arabischen Schriftsteller finden, noch zu den gleichzeitig von Descartes und Sainte-Croix gewonnenen besonders weittragend; allein er besaß ihnen gegenüber einen methodischen Ausgangspunkt, der ihn teils in den Untersuchungen dieser Art viel weiter, teils zu ganz anderen fruchtbringenden Betrachtungen führen sollte.

So sieht man, daß er schon bei den hier genannten Untersuchungen einer genauen Kenntnis der Teilbarkeit der Zahlen von der Form $2^n - 1$ bedarf. Er hat darüber folgende Sätze aufgestellt: $2^n - 1$ ist zerlegbar, wenn n zerlegbar ist; $2^n - 2$ ist durch $2n$ teilbar, wenn n eine Primzahl (jedoch nicht 2) ist, und in diesem Falle ist $2^n - 1$ durch keine anderen Primzahlen teilbar als solche, welche die Form $2rn + 1$ haben. Kurz darauf verallgemeinert er den zweiten dieser Sätze, indem er behauptet, daß n, wenn es eine Primzahl ist, die kein Teiler von a ist, in $a^{n-1} - 1$ aufgeht. Auch dieses im besonderen als „Fermatsches“ bekannte Theorem bewies er nicht; es läßt sich aber, wie bekannt, elementar beweisen. Es ist auch für Untersuchungen über Summen aliquoter Teile brauchbar, wenn die betreffenden Zahlen andere Primfaktoren als 2 enthalten.

Von der Frage nach der Zerlegbarkeit der Zahlen von der Form $2^n - 1$ ward Fermat natürlich auch zur Erörterung der Zerlegbarkeit der Zahlen von der Form $2^n + 1$ geführt, zumal sie für ihn auch bei den Unter-

suchungen über Zahlen von Bedeutung war, die zu der Summe ihrer aliquoten Teile in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Er behauptete einerseits, daß solche Zahlen zerlegbar seien, wenn n keine Potenz von 2 ist, was offenbar richtig ist, andrerseits, daß $2^{2^r}+1$ immer eine Primzahl sei. Euler fand später, daß letztere Behauptung allerdings nicht richtig ist, weil $2^{32}+1$ durch 641 teilbar ist; es muß deshalb hervorgehoben werden, daß Fermat seinerseits stets gestand, er besitze keinen vollständigen Beweis, wenn er sich auch in seinen Briefen von der Richtigkeit des Satzes mehr und mehr überzeugt erklärt. Zu dieser Überzeugung gelangte er nicht nur durch die Beobachtung, daß die ersten Zahlen dieser Form wirklich Primzahlen sind, sondern auch, wie er sagt, dadurch, daß er von einer Menge Zahlen bewies, daß sie in Zahlen der angegebenen Form tatsächlich nicht aufgehen können. Die Resultate, die er so erzielte, würden, wenn sie uns bekannt wären, eine von der Unrichtigkeit des aufgestellten allgemeinen Satzes unabhängige Bedeutung haben. Diese Unrichtigkeit ist indessen ein schlagendes Zeugnis von der Wichtigkeit eines streng durchgeführten mathematischen Beweises auch für solche Fälle, in denen man sich geneigt fühlen könnte, mit dem Taktgefühl des geübten Mathematikers vorlieb zu nehmen.

Daß auch Fermat selbst sich nur ungern darauf allein verlassen will, zeigt sich darin, daß er öfters auf den Wunsch zurückkommt, für den Satz einen wirklichen Beweis zu finden, und andere auffordert, durch den Beweis des Satzes seiner vermeintlichen Entdeckung die Krone aufzusetzen. Deshalb darf uns auch dieser Fall nicht in dem Glauben daran erschüttern, daß er für die Behauptungen, von denen er es selbst sagt, auch wirklich Beweise besessen habe, wennschon er zu verstehen gibt, daß diese Beweise derart mit anderen zahlentheoretischen Geheimnissen zusammenhängen, daß sie erst in einem von ihm beabsichtigten Werke über Zahlentheorie ihren rechten Platz finden könnten. Er hat es leider nie erscheinen lassen, ja, kaum je vollständig ausgearbeitet. Die allermeisten seiner unbewiesenen Behauptungen haben übrigens in der seitdem verflossenen Zeit ihre volle Bestätigung gefunden. Bezüglich einiger, für welche dies noch nicht der Fall ist, liegt die Möglichkeit vor, daß sogar ein so klarer Denker wie Fermat sich durch einen Beweis habe täuschen lassen, den er nicht selbst Gelegenheit gehabt, in einer vollständigen Redaktion bis in alle Einzelheiten durchzuführen.

Eine solche Möglichkeit kann zunächst dem folgenden merkwürdigen Satze gegenüber vorliegen, den er nur in einer einzigen seiner Randbemerkungen zu Bachets Diophantausgabe ganz im allgemeinen ausspricht:

Die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

läßt sich bei rationalen Werten von x, y und z für andere Werte von n als $n = 2$ nicht lösen. Diese Behauptung ist nämlich noch nicht für alle Werte von n bewiesen. Für $n = 3$ erkannte schon der Araber Al Chodschandî die Richtigkeit des Satzes. Für $n = 4$ ist der Beweis in dem Fermatschen Beweise eines gleich zu erwähnenden anderen Satzes einbegriffen. Fermat hat übrigens auch den Satz aufgestellt, daß sich die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ nicht in ganzen Zahlen lösen lasse. Dieser Satz ist allgemeiner als der vorhergehende. Denn, wenn man die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ in rationalen Zahlen lösen könnte, würde man sie ihrer Homogenität wegen auch in ganzen Zahlen lösen können.

Neben dergleichen negativen Sätzen, auf welche Fermat durch den Versuch geführt wurde, die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten bei den Alten zu erweitern, erzielte er im Anschluß teils an die Alten, teils an die früheren derartigen Versuche Bachets auch positive Resultate. So hatte die bestimmte Aufgabe Diophants: zwei Zahlen zu finden, wenn ihre Differenz und die ihrer Kuben gegeben sind, schon Bachet zur Behandlung der unbestimmten Aufgaben veranlaßt: zwei (rationale) Zahlen zu finden, deren Kubensumme oder -differenz der Differenz zweier gegebenen Kuben gleich ist. Fermat zeigt, daß die Möglichkeitsbedingung, die Bachet für diese Aufgaben aufstellte, unrichtig ist, und fügt selbst den Satz hinzu, daß sich die Summe zweier Kuben auf unendlich viele Weisen in eine Summe zweier anderen Kuben (von rationalen Zahlen) zerlegen lasse. Dieser Satz ergänzt den Satz von der Unmöglichkeit, die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ durch rationale Zahlen zu erfüllen. Auf einen anderen sehr umfassenden Satz wird Fermat dadurch geführt, daß Diophant bei der Lösung einer Aufgabe vorauszusetzen scheint, daß sich jede Zahl in eine Summe von höchstens 4 Quadraten zerlegen lasse. Dies zu beweisen war Bachet vergebens bemüht gewesen; es soll erst Sainte-Croix gelungen sein, Fermat aber fand folgende umfassende Verallgemeinerung: jede Zahl kann als Summe von 1, 2, $3 \cdots n$ n-eckszahlen gebildet werden.

Hinsichtlich der Darstellung von Zahlen als Summen von Quadratzahlen geht er weiter und untersucht, auf wie viele Weisen eine solche Zusammensetzung bei gegebenen Zahlen stattfinden könne, wie er denn auch die kleinste Zahl bestimmt, die sich entweder selbst oder deren Quadrat sich auf eine bestimmte Anzahl verschiedener Arten als Summe zweier Quadratzahlen darstellen läßt. Dazu dienen ihm teils Regeln, die für Primzahlen von bestimmter Form, teils solche, die für zusammengesetzte Zahlen gelten. Die wichtigste der Primzahlformen ist $4n + 1$, von welcher ausgesagt wird,

daß eine Primzahl von dieser Form selbst sowie ihr Quadrat sich nur auf eine Weise als Summe zweier Quadrate, ihr Kubus und Biquadrat auf zwei Weisen, ihre 5. und 6. Potenz auf drei Weisen u. s. w. darstellen lasse. Primzahlen von der Form $3n + 1$ können als $x^2 + 3y^2$, von der Form $8n + 1$ und $8n + 3$ als $x^2 + 2y^2$ geschrieben werden, wobei x und y rational sind.

Bleibt es auch ein Rätsel, wie Fermat diese doch sehr allgemeinen Sätze habe beweisen können, von denen wir hier einige der wichtigsten Beispiele angeführt haben, so hat er doch selbst wenigstens über den allgemeinen Gang seiner Beweisführung einigen Aufschluß gegeben. Um einen negativen Satz zu beweisen, der darauf ausgeht, daß sich eine Aufgabe (z. B. die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, dessen Inhalt ein Quadrat ist) nicht durch ganze Zahlen lösen lasse, weist er, wie er sagt, nach, daß man aus einer schon erhaltenen Lösung eine zweite in kleineren Zahlen würde herleiten können. Von dieser würde dann das nämliche gelten; da sich aber die Verminderung ganzer Zahlen nicht bis ins Unendliche fortsetzen lasse, so sei die Aufgabe unmöglich.

Schwerer fiel es Fermat, wie er gleichfalls mitteilt, eine geeignete Form für vollständige Beweise der ebenso allgemeinen positiven Sätze zu finden, die besagen, daß sich Zahlen von einer gewissen Form stets auf eine gewisse Weise zusammensetzen lassen. Er erreicht sein Ziel, indem er die positiven Sätze negativ ausdrückt, weil ja, was stets stattfindet, niemals stattzufinden aufhört. Beispielsweise führt er an, daß er eben auf diese Art seinen für die Zerlegung von Zahlen in eine Summe von Quadraten besonders wichtigen Satz beweise, eine Primzahl von der Form $4n + 1$ lasse sich stets als eine Summe zweier Quadrate schreiben. Es gelingt ihm durch den Nachweis, daß, wenn eine gewisse Primzahl von dieser Form sich nicht auf diese Weise schreiben ließe, es niedrigere Primzahlen von derselben Form geben würde, mit denen dasselbe ebensowenig der Fall wäre. Diese Verminderung würde schließlich dazu führen, daß 5 sich nicht aus zwei Quadraten zusammensetzen ließe, was unrichtig sei, da $5 = 2^2 + 1^2$. Der Satz selbst muß also richtig sein.

Während diese Gedankengänge klar und einfach sind, vermißt man bei den meisten der Sätze Fermats jeglichen Aufschluß darüber, wie die für die Beweisführung notwendige Reduktion zu unternehmen sei. Was jedoch die soeben genannte Aufgabe betrifft: ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Seiten ganze Zahlen seien, und dessen Inhalt ein Quadrat sei, so gibt eine seiner Bemerkungen zu Bachets Diophant über diese Reduktion genügende Aufschlüsse, um sie zu folgendem Beweise vervollständigen zu können.

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten ganze Zahlen sind, lassen sich, wie Fermat es nach dem Muster der Alten zu tun pflegt, darstellen als

$$x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2, \quad 2xy.$$

Da ein gemeinschaftlicher Faktor der Seiten, der in dem Areale als quadratischer Faktor auftreten würde, wegfallen kann, so kann man obendrein annehmen, daß $x^2 - y^2$, also auch $x + y$ und $x - y$ ungerade Zahlen sind, und daß x und y, also auch $x + y$ und $x - y$ alle zueinander prim sind.

Es soll nun die Annahme versucht werden, der Inhalt des Dreiecks

$$xy\,(x - y)\,(x + y)$$

sei ein Quadrat. Dazu wird erfordert, daß die einzelnen Faktoren es sind oder daß

$$x = u^2, \quad y = v^2,$$
$$u^2 + v^2 = p^2, \quad u^2 - v^2 = q^2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$2v^2 = p^2 - q^2 = (p - q)\,(p + q).$$

$p + q$ und $p - q$ werden beide gerade Zahlen, da infolge der Voraussetzungen p^2 und q^2 ungerade sind; sie können aber außer 2 keine anderen gemeinschaftlichen Faktoren haben, da u^2 und v^2 zueinander prim sind. Aus der gefundenen Gleichung folgt also, daß

$$p + q = \begin{cases} 2m^2 \\ n^2 \end{cases}, \quad p - q = \begin{cases} n^2 \\ 2m^2, \end{cases}$$

wo n eine gerade Zahl ist. Sodann erhält man

$$u^2 = \frac{p^2 + q^2}{2} = (m^2)^2 + \left(\frac{n^2}{2}\right)^2.$$

Die ganzen Zahlen m^2 und $\frac{n^2}{2}$ werden also Seiten eines neuen rechtwinkligen Dreiecks mit dem quadratischen Inhalte $\frac{m^2 n^2}{4}$. Daß die Seiten dieses neuen Dreiecks kleiner als die des ursprünglichen sind, erhellt daraus, daß das Quadrat über seiner Hypotenuse u^2 oder x Faktor einer der gegebenen Katheten ist. Da nun eine fortgesetzte Abnahme ganzer positiver Zahlen unmöglich ist, so ist die versuchte Annahme es auch.

Daß unsere Vervollständigung des Beweises Fermats wesentlich nur darin besteht, dasjenige, was Fermat auf seine Weise hinreichend andeutet, in der Sprache der modernen Algebra darzustellen und, was er für leicht beweislich erklärt, näher zu begründen, wird aus folgender Wiedergabe seiner eigenen Worte ersichtlich sein, indem wir nur zur Erläuterung die Gleichungen einschalten, durch die das nämliche wie durch die von ihm gebrauchten Wendungen ausgedrückt wird:

„Wenn der Inhalt des Dreiecks ein Quadrat wäre, so würde es zwei Biquadrate geben, deren Differenz $[u^4 - v^4]$ ein Quadrat wäre, und somit zwei Quadrate, deren Summe sowohl wie Differenz wiederum Quadrate wären $[u^2 + v^2 = p^2,\ u^2 - v^2 = q^2]$. Es gibt also eine solche aus einem Quadrat und dem Zweifachen eines Quadrats zusammengesetzte Zahl, die selbst ein Quadrat ist $[p^2 = 2v^2 + q^2]$. Wenn aber eine Quadratzahl aus einem Quadrat und dem Zweifachen eines Quadrats zusammengesetzt ist, so wird die Wurzel auch aus einem Quadrat und dem Zweifachen eines Quadrats $\left[p = m^2 + 2\left(\frac{n^2}{2}\right)^2\right]$ zusammengesetzt sein, wie wir leicht beweisen können. Daraus folgt dann, daß diese Wurzel die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, das quadratische Glied $[m^2]$ die eine, das zweifache Quadrat $\left[2\left(\frac{n^2}{2}\right)^2\right]$ aber die andere Kathete ist".

Von der durch die Änderung erreichten Verminderung der ganzen Zahlen, welche der Aufgabe genügen müßten (falls sie möglich wäre), gibt Fermat keine nähere Begründung.

Man wird bemerken, daß der Beweis den Beweis dafür in sich begreift, daß $u^4 - v^4$ kein Quadrat, also auch keine vierte Potenz sein kann, daß sich also $u^4 = v^4 + t^4$ nicht in ganzen, folglich auch nicht in rationalen Zahlen lösen läßt.

In so zusammengedrängter Gestalt konnte auch dieser ausnahmsweise mitgeteilte Beweis den Zeitgenossen Fermats, für welche die hier benutzten algebraischen Umschreibungen nicht so nahe lagen, wie uns, besonders aber den in algebraischer Beziehung weniger geschulten Zahlentheoretikern Schwierigkeiten bereiten. Daß Fermat in seiner Darstellung nicht selbst algebraische Zeichen angewendet hat, hängt eng damit zusammen, daß er ein seltenes Vermögen besessen haben muß, Gedanken ohne äußere Hilfsmittel festzuhalten, und in seinen Arbeiten überhaupt außerordentlich selten zur algebraischen Zeichensprache seine Zuflucht nimmt; er bedient sich ihrer wesentlich nur in der noch wenig entwickelten Form, die Vieta ihr gegeben hatte. Es ist indessen leicht einzusehen, daß eine so ausführliche Darstellung des Beweises, wie die von uns gegebene, sehr weitläufig werden würde, wenn sie durchaus in Worten gegeben werden sollte. So wird es verständlich, nicht nur daß Fermat, wie er hier und anderswo sagt, für sie am Rande seines Diophant nicht genügenden Raum hat finden können, sondern auch, daß er überhaupt über seine Beweise und Methoden so wenig mitgeteilt hat. Sein häufiges Anerbieten, über einzelne Sätze Aufschlüsse zu geben, ist, soweit man sehen kann, nicht benutzt worden, ja, er würde es bei der Weitläufigkeit, deren Notwendigkeit wir hier berührt haben, und bei dem Zusammenhange zwischen seinen vielen verschiedenen zahlentheoretischen

Beobachtungen kaum recht haben erfüllen können. Dieser Zusammenhang würde die Ausarbeitung der gesamten Darstellung seiner Ansichten erfordert haben, die er, wie wir sahen, allerdings beabsichtigte. Zur vollständigen Ausarbeitung ließen ihm jedoch seine amtlichen Geschäfte kaum die nötige Muße; außerdem stellten sich ihrer Herausgabe Schwierigkeiten in den Weg.

Nur wenige der zahlentheoretischen Resultate Fermats lagen sonach in einer solchen Gestalt vor, daß seine Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger sie benutzen und auf ihnen weiter bauen konnten. Eine Ausnahme machen teils einige Resultate, von denen wir im nächsten Abschnitt zu reden haben, weil sie Fermat zu ganz anderen Untersuchungen verwertete, teils eine ganz besondere Aufgabe, von der wir allerdings nicht einmal Fermats eigene Lösung kennen, deren Behandlung aber, nachdem er einmal die Mathematiker dazu herausgefordert hatte, von seinen Zeitgenossen besonders jenseits des Kanals in Angriff genommen wurde. Sie bezweckt die Auflösung der Gleichung

$$ax^2 + 1 = y^2$$

in ganzen Zahlen, wenn a eine gegebene ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist. Fermat, der die Aufgabe durch beispielsweise Angabe der Lösungen für bestimmte Werte von a erläutert hat, verlangt den Beweis, daß sie unendlich viele Lösungen habe. Brouncker und Wallis verstanden die Aufgabe fälschlich zunächst so, als ob x und y nicht ganzzahlig, sondern nur rational zu sein brauchten, in welchem Falle sie, wie Fermat bemerkt, ziemlich leicht ist. Später fanden die genannten englischen Mathematiker eine schwerfällige Auflösung, welche infolge einer Verwechselung, die Euler verschuldete, Pell zugeschrieben wurde. Die Aufgabe erhielt deshalb den ganz irreleitenden Namen der Pellschen Aufgabe. Ihre Behandlung fuhr übrigens fort, die Mathematiker als ein Hauptproblem der Zahlentheorie zu beschäftigen. Übrigens hatten sich schon die indischen Mathematiker an dieser Aufgabe versucht und sie auf die nämliche Weise, wie später Lagrange, gelöst, ohne jedoch wie er beweisen zu können, daß ihre Methode auch tatsächlich immer zum Ziele führe (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 284—86).

Fermats übrige Entdeckungen auf dem Gebiete der Zahlentheorie sind erst von Euler einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden und bilden den Ausgangspunkt für dessen eigene zahlentheoretische Arbeiten. Er benutzte das wenige, was über Fermats Behandlungsweise vorliegt, wie seinen oben mitgeteilten Beweis der Unmöglichkeit, die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ in ganzen Zahlen zu lösen; meistens aber mußte er neue Beweise ausfindig machen. Einen ähnlichen Einfluß haben die Resultate Fermats auf die zahlentheoretischen Arbeiten Lagranges gehabt. Er

erstreckt sich weiterhin auch auf Legendre und Gauß, wenn auch besonders der letztere völlig neue Bahnen bricht. Trotz der durch sie gewonnenen großen Fortschritte finden die Zahlentheoretiker dennoch in den vielen Sätzen Fermats, von denen einige immer noch unbewiesen sind, stets Anregung zu neuen Untersuchungen. Ist es auch Fermat nicht gelungen, eine zusammenhängende Zahlentheorie zu geben, so kommt doch seinen zahlentheoretischen Entdeckungen und den dadurch hervorgerufenen Bemühungen, ihre Richtigkeit zu beweisen, ein Hauptanteil der Ehre zu, daß die Zahlentheorie seitdem eine so bedeutende Entwickelung und einen so starken, inneren Zusammenhang gewonnen hat, wie dies jetzt der Fall ist.

Fermats Behandlung zahlentheoretischer Fragen überragt die Leistungen der gleichzeitigen Mathematiker so hoch, daß wir von ihnen eigentlich nur bemerken konnten, daß sie es auf irgend einem engeren Gebiete zu mehr oder weniger Beachtenswertem brachten. Von gleichzeitigen Untersuchungen, die eine etwas andere Richtung einschlugen, sollen jedoch noch Pascals Regeln für die Teilbarkeit von im Decimalsystem geschriebenen Zahlen mit einfachen Faktoren, darunter 7, erwähnt sein. Als Ertrag des eindringlichen Verständnisses Pascals für die Bedeutung der systematischen Zahlenschreibung kann auch seine Rechenmaschine genannt werden, die nach denselben Prinzipien wie die praktischsten Rechenmaschinen der Gegenwart konstruiert ist. In den im folgenden Abschnitt zu erwähnenden Untersuchungen, die teilweise auch mit der Zahlentheorie in Verbindung stehen, steht Pascal an der Seite Fermats.

9. Binomialkoeffizienten, Kombinationen und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir haben vorhin (S. 101) gesehen, daß man schon seit Stifel die Bildung von Binomialkoeffizienten als Glieder solcher Differenzenreihen höherer und höherer Ordnung kannte, bei denen man von der natürlichen Zahlenreihe als der Differenzenreihe 1. Ordnung ausging, vor der indes noch eine Reihe von lauter Einern vorausgesetzt wurde. Die entsprechende Reihe 2. Ordnung wird durch die Dreieckszahlen, die 3. Ordnung durch die Pyramidalzahlen gebildet. Die Untersuchungen des Altertums über figurierte Zahlen, die in neuerer Zeit, namentlich von Maurolico, fortgesetzt wurden, bildeten somit eine Vorbereitung auf die Untersuchungen, die uns hier beschäftigen. Sie wurden von Stifels Nachfolgern in Deutschland fortgesetzt, unter denen zu Anfang des 17. Jahrhunderts Faulhaber ohne nähere Begründung Ausdrücke für die Summe der r^{ten} Potenzen von Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zu einer beliebigen Zahl für Werte von r bis $r = 11$ aufstellte. Wie wir sogleich bei der Besprechung Fermats sehen

werden, steht dies Thema in enger Verbindung mit der Herstellung der Glieder von Differenzenreihen verschiedener Ordnung, die wir heute für das n^{te} Glied der Reihe r^{ter} Ordnung oder für die Summe der n ersten Glieder der Ordnung $r-1$ durch

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

ausdrücken. Aus diesem Grunde liegt die Annahme nicht fern, daß Faulhaber diese Herstellung gekannt habe. Übrigens war die Regel früher nur für $r=2$ bekannt. Die Summe von Gliedern einer einfachen Differenzenreihe war nämlich schon Archimedes bekannt und ward schon von ihm angewendet (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 43 u. 181). Die vollständige Regel für diejenige Bildung der Reihenglieder durch Multiplikation, welche durch obige Formel ausgedrückt wird, finden wir dagegen erst in einem Briefe Fermats v. J. 1636. Daß wenigstens eine so allgemeine Aufstellung damals den Mathematikern etwas Neues war, zeigt sich darin, daß Pascal sie viele Jahre später aufs neue fand und sich beeilte, sie Fermat mitzuteilen, ohne daß es ihm durch ihren fortgesetzten Briefwechsel klar wurde, daß dieser sie schon lange kannte.

Fermat hatte diese Formel auch verwertet, um ganz allgemein eine andere Aufgabe zu lösen, nämlich die Berechnung der Summe Σm^r von (r^{ten}) Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zu einer gewissen Zahl, eine Aufgabe, die im Altertum nur für $r=2$ (Archimedes) und $r=3$ und 4 (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 182, 244, 287, 312) gelöst worden war. Wie er dies macht, teilt er allerdings nicht mit; das ist aber insofern minder wesentlich, weil diese Berechnung dem schon Angeführten zufolge keine Schwierigkeiten darbieten konnte; denn

$$\sum \frac{m\,(m+1)\cdots(m+r-1)}{1\cdot 2\cdots r}$$

ist zusammengesetzt aus Gliedern von der Form

$$\Sigma m^r,\ \Sigma m^{r-1},\cdots,\Sigma m.$$

Aus den Fermat bekannten Ausdrücken für die Summe von Gliedern einer Differenzenreihe beliebiger Ordnung kann man also allmählich Σm^r für immer höhere Werte von r berechnen. Wir werden später (III 2, c und d) sehen, wie Fermat und darauf Wallis, der gewiß die Berechnung der hier erwähnten Potenzsummen selbständig gefunden hat, nach dem Vorbilde des Archimedes die Ausdrücke dafür zur Bewerkstelligung von Quadraturen benutzten. Daß Fermat auch mit der Bestimmung der Anzahl von Permutationen, Kombinationen u. s. w. vertraut war, erhellt u. a. aus seinen Angaben über die Anzahl von Zauberquadraten.

Eine völlig zusammenhängende und begründete Darstellung der Eigen-

schaften und Verhältnisse der Glieder der verschiedenen Differenzenreihen finden wir erst im *Traité du triangle arithmétique* Pascals. Das sogenannte arithmetische Dreieck ist freilich nur eine Umgestaltung der graphischen Reihendarstellung Stifels, ja, stimmt ganz mit dem Tartaglias (S. 102) überein, und die Herstellung der Glieder durch Multiplikation war, wie vorhin angegeben, früher von Fermat gefunden. Pascal aber führt für diese Herstellung einen allgemeinen Beweis. Der Beweis, den er mit voller Konsequenz auf diesen und weitergehende Sätze anwendet, ist der mathematische oder sogenannte vollständige Induktionsbeweis. Er bietet ihn in der klaren und bestimmten Form, in der man ihn auch nach seiner Zeit fortwährend auf Sätze derselben Art anwendet. Man beweist einesteils, daß ein Satz gilt, wenn eine darin vorkommende beliebige Zahl n einen gewissen niedrigen Wert r oder niedrigere Werte hat, anderenteils, daß er, wenn er für den beliebigen Wert n und niedrigere Werte gilt, auch für den nächst höheren Wert $n + 1$ gelten muß, und folgert demnächst, daß er dann für alle Werte von n richtig bleibt, die größer als r sind.

Durch die graphische Darstellung vermag Pascal seinen Sätzen einen völlig allgemeinen Ausdruck und eine allgemeine Begründung zu verleihen, weil es, wenn er eine Zahl als in einer gewissen Reihe (in der $m + 1^{\text{ten}}$) und in einer gewissen Kolumne (in der $n + 1^{\text{ten}}$) stehend bezeichnet, dasselbe besagt, wie heute die Bezeichnung $\binom{m+n}{m}$. Außer solchen Sätzen enthält seine Schrift vollständige Beweise für die wichtigsten Anwendungen der behandelten Zahlen, nämlich teils als Binomialkoeffizienten, teils als Anzahl von Kombinationen. Letzteres führt dann auf ihre Verwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bevor wir die Begründung einer exakten Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Fermat und Pascal besprechen, müssen wir jedoch zeitlich etwas zurückgehen. Schon Tartaglia hatte bei der Aufstellung seiner Tafeln für Differenzenreihen verschiedener Ordnung zunächst die Bestimmung der Anzahl gewisser Kombinationen vor Augen gehabt. Wie wir gesehen haben, erstrecken sich diese Reihen nur bis auf das 6. Glied $1, 6, 21 \cdots$ in Differenzenreihen der Ordnungen $0, 1, 2 \cdots$. Der Zweck war nämlich, die Anzahl der wesentlich verschiedenen Würfe 6, 21 u. s. w. zu bestimmen, die mit 1, 2 u. s. w. Würfeln möglich sind. Diese Zahl wird, wenn die Anzahl der Würfel r ist, der Summe der 6 ersten Glieder der Differenzenreihe der Ordnung $r - 1$ oder dem 6. Gliede der Reihe der Ordnung r gleich sein und hat somit den Wert, den wir nach Fermat als

$$\frac{6 \cdot 7 \cdots (6 + r - 1)}{1 \cdot 2 \cdots r} \text{ oder } \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+5)}{1 \cdot 2 \cdots 5}$$

darstellen können.

Die erste Aufstellung des Resultates in Form einer Summe zeigt, daß es durch allmählich wiederholte Hinzufügung je eines Würfels begründet sein muß. Für jeden Wurf mit dem zuletzt hinzugekommenen Würfel sollen nur solche Würfe mit den übrigen aufgezählt werden, die höchstens ebensoviele Augen aufweisen, wie der zuletzt hinzugekommene. Es kommt nämlich in der vorliegenden Aufgabe auf eins heraus, ob der eine oder der andere Würfel eine gewisse Anzahl Augen aufweist.

Dies Aufzählen wesentlich verschiedener Würfe steht in Verbindung mit dem gar zu fleißigen Gebrauche der Würfel in damaliger Zeit nicht nur zum Spielen, sondern auch zu einer Art Orakel, wobei jeder Wurf seine besondere Bedeutung haben sollte. Tartaglias Tafel gab nun darüber Bescheid, wie viel Antworten die Würfel geben könnten; wenn man aber glaubte, diese Antworten besäßen die gleiche Wahrscheinlichkeit, so irrte man offenbar; denn, während z. B. ein Wurf, bei dem alle Würfel ein und dieselbe bestimmte Anzahl Augen aufweisen, nur auf eine Weise entsteht, wird (wenn $r \leqq 6$) ein solcher, bei dem r Würfel verschiedene Anzahlen von Augen aufweisen sollen, so viel Male entstehen, als man die r Würfel permutieren kann. Tartaglias Worte bieten jedoch keinen Anlaß, ihm einen so groben Irrtum zuzutrauen. Sein Zeitgenosse Cardano gibt sogar in der Schrift *De ludo aleae* ausdrücklich darüber Aufschluß, wievielmal die verschiedenen Würfe mit 2 oder 3 Würfeln unter den überhaupt möglichen entstehen können, und dadurch zugleich, welche Wahrscheinlichkeit ein jeder von ihnen besitzt.

Daß man jedoch zu jener Zeit geneigt war, den in Frage stehenden Irrtum zu begehen, zeigt sich in der Erklärung des Wortes, das zu dem Namen Hasardspiel Veranlassung gegeben hat. Dies Wort ist das arabische *asar*, das schwierig bedeutet und von der Gesamtaugenzahl gebraucht wird, die nur bei einem bestimmten Wurf herauskommen kann. Auch dabei werden die Würfe gleich gerechnet, die nur einer Vertauschung der Würfel entsprechen. Bei 3 Würfeln rechnet man z. B. zu den schwierigen Würfen nicht nur 3, welcher Wurf nur auf eine Weise entstehen kann, nämlich als $1 + 1 + 1$, sondern auch 4, welcher Wurf als $1 + 1 + 2$ auf 3-fache, aber nicht wesentlich verschiedene Weise entstehen kann.

Wahrscheinlichkeitsberechnungen sind sicherlich angestellt worden, solange man Hasardspiele betrieb, und mit mehr oder weniger objektiver Sicherheit ausgeführt worden, je nach der größeren oder geringeren Einsicht des Spielers und seinem geringeren oder größeren Aberglauben. Die bloße Erfahrung, mit welcher Häufigkeit verschiedene Kombinationen eintreten, war gewiß auch hierbei von Bedeutung. Daß sich diese Erfahrung bei sehr zahlreichen (und richtig beobachteten) Wiederholungen den theoretischen Schlüssen nähern wird, hebt schon Cardano hervor; er spricht also das

Gesetz der großen Zahlen aus. Eine Wahrscheinlichkeitsrechnung, die durchaus auf exakte Schlüsse baut, finden wir indessen erst bei Pascal und Fermat, von denen wir eben gesehen haben, daß Pascal besonders die für diese Rechnung so wichtige Kombinationslehre entwickelte. Auch sie nehmen die Anwendung aufs Glücksspiel zum Ausgangspunkt, besonders anläßlich einer Aufgabe, die Pascal von seinem Freunde Méré, einem eifrigen Spieler, gestellt bekam; durch ihre deutlichen und einfachen Beispiele aber hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu anderen und wichtigeren Anwendungen emporgeschwungen.

Die hier berührte Aufgabe bezweckt, die rechte Teilung des Einsatzes zu finden, wenn ein Gesamtspiel, das durch eine Reihe von Einzelspielen ausgeführt wird, nicht zu Ende gebracht ist. Wir wollen hier annehmen, daß derjenige als Gewinner des Gesamtspieles angesehen wird, der zuerst s Einzelspiele gewonnen hat, daß aber das Spiel unterbrochen worden ist, als der Spieler A a Spiele, B b Spiele gewonnen hatte, wo $a < s$, $b < s$.

Diese Aufgabe ist freilich nicht erst von dem besagten Freunde Pascals erfunden worden, sondern, wenn auch weniger befriedigend, schon von älteren Schriftstellern behandelt worden, so von Luca Paciuolo, welcher meinte, der Einsatz sei nach der Anzahl von Einzelspielen, die jeder der beiden Spieler gewonnen habe, also nach dem Verhältnis $a : b$ zu verteilen. Hiergegen wandte Cardano mit Recht ein, daß dann die Anzahl s der Einzelspiele, die überhaupt gewonnen werden sollten, unberücksichtigt bleiben würde. Er sah zugleich ein, daß die Lösung, streng genommen, die Vereinbarung weiterer Voraussetzungen erfordere; er war aber in deren Aufstellung nicht glücklich. Eine wirklich rationelle Behandlung erhielt die Aufgabe dagegen, wie gesagt, durch Fermat und Pascal; besonders ihr Briefwechsel und Pascals Schrift über das arithmetische Dreieck klären uns darüber auf.

Die Methode Fermats kennen wir zunächst durch ihre Erwähnung in dem Antwortschreiben Pascals und durch Fermats Berichtigung einer Anwendung auf den Fall von mehr als 2 Spielern, die Pascal ihm beilegen wollte. Sie beruht darauf, daß eine nähere Entscheidung, wenn die Spiele fortgesetzt würden, in einer gewissen endlichen Anzahl von Spielen $(s - a + s - b - 1)$ erreicht werden würde. Er stellt nun alle die $(2^{2s-a-b-1})$ möglichen Fälle auf. Wenn α von ihnen A, β von ihnen B zum Gewinner machen, so soll der Einsatz zwischen ihnen nach dem Verhältnis $\alpha : \beta$ geteilt werden. Wenn also $s = 3$, $a = 1$, $b = 0$, so bedarf es zur Entscheidung höchstens noch 4 Spiele. Diese können auf folgende 16 Weisen ausfallen, indem wir durch A oder B bezeichnen, daß beziehungsweise A oder B gewinnt, und in den senkrechten Zeilen die verschiedenen Möglichkeiten der Spiele angeben:

A A A A B A A A B B B A B B B B
A A A B A A B B A A B B A B B B
A A B A A B A B A B A B B A B B
A B A A A B B A B A A B B B A B.

Nur in den 5 letzten dieser Fälle wird B, in den übrigen 11 wird A gewinnen. Es kommen also A $\frac{11}{16}$ und B $\frac{5}{16}$ des Einsatzes zu, oder, wie man es auch ausdrücken kann: Der Wert des von A zuerst gewonnenen Spieles beträgt $\frac{3}{16}$ des ganzen Einsatzes, oder dies Spiel gilt soviel, als hätte er von B $\frac{3}{8}$ seines Einsatzes gewonnen.

Man hat an den gefundenen Brüchen $\frac{11}{16}$ und $\frac{5}{16}$ eben die Größen, die man heute den Wahrscheinlichkeiten dafür beilegt, daß beziehungsweise A oder B gewinnt, nämlich die Quotienten, die man durch Division der Anzahl der für A oder B günstigen Fälle durch die Anzahl der möglichen Fälle erhält. Dieser Begriff der Wahrscheinlichkeit ist also im wesentlichen schon in damaliger Zeit vorhanden, wenn er auch noch nicht ausdrücklich aufgestellt wurde. Übrigens sehen wir aus einem der Briefe Pascals, daß Roberval einwendete, nach dieser Methode seien noch 4 Spiele zu spielen, einerlei, ob z. B. A von 2 oder 3 Spielen schon die 2, die ihm noch fehlten, gewonnen habe oder nicht, was in 8 der aufgestellten Reihen der Fall sein würde. Hiergegen machte Pascal geltend, daß man die Spiele, die gespielt würden, nachdem A gewonnen habe, eben, weil sie für den Ausfall keine Bedeutung hätten, nach Belieben mitzählen oder nicht mitzählen könne. Die Voraussetzung, auf der die Lösung Fermats beruht, war also durchaus natürlich, und er war deshalb berechtigt, sie zu wählen.

Dies fand Pascal auch dadurch bestätigt, daß er selbst durch ganz andere Betrachtungen zu dem nämlichen Resultate kam. Er beginnt mit dem Falle, wo A 2 der 3 Einzelspiele, die überhaupt gewonnen werden sollen, B nur 1 gewonnen hat (mit obigen Bezeichnungen $s = 3$, $a = 2$, $b = 1$). Im nächsten Spiel wird A entweder ganz gewonnen haben, oder mit B gleich stehen. Im ersteren dieser beiden gleich wahrscheinlichen Fälle muß er den ganzen Einsatz bekommen, im letzteren steht er B gleich und kann also die Hälfte des Einsatzes für sich fordern. Er hat also, falls das Spiel vor diesem neuen Spiel unterbrochen wird, Anspruch auf

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{4}$$

des Einsatzes. Hat A 2 und B 0 gewonnene Spiele, so wird ein neues Spiel entweder A den Sieg bringen, oder wieder den soeben betrachteten Fall ergeben, in welchem A $\frac{3}{4}$ des Einsatzes zu fordern hat. Wird vor diesem neuen Spiel aufgehört, so hat er also auf

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\text{ oder }\frac{7}{8}$$

des Einsatzes Anspruch. Hat schließlich A nur 1, B 0 gewonnene Spiele, so wird ein neues Spiel mit gleicher Wahrscheinlichkeit für A die soeben erwähnte Forderung auf $\frac{7}{8}$ des Einsatzes ergeben, oder beide gleichstellen. Also hat A, wenn das Gesamtspiel vor diesem neuen Spiele unterbrochen wird,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\text{ oder }\frac{11}{16}$$

des Einsatzes zu fordern; zu demselben Resultate kamen wir aber auch durch die Methode Fermats.

In seiner Schrift über das arithmetische Dreieck ist Pascal sogar im stande, den allgemeinen Satz aufzustellen und zu beweisen, daß, wenn A noch m, B noch n Spiele fehlen, um ganz zu gewinnen, die Kasse zwischen ihnen nach folgendem Verhältnis zu teilen sei:

$$\frac{1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\cdots+\binom{m+n-1}{n-1}}{1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\cdots+\binom{m+n-1}{m-1}}.$$

Die hier aufgestellten Binomialkoeffizienten sind durch ihren Platz in dem arithmetischen Dreiecke bezeichnet, und der Beweis ist die vollständige Induktion.

Teils war die hier genannte Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht die einzige, mit der Pascal und Fermat sich beschäftigten, teils war sie von einer solchen Natur, daß sie ihnen die Augen über die allgemeinen Prinzipien öffnen mußte, nach denen solche Aufgaben zu behandeln sind. Dies offenbarte sich denn auch, als sie mit einem dritten, nicht minder hervorragenden Gelehrten in Verbindung kamen, der etwas später und von Berichten über ihre Untersuchungen, ohne sie jedoch näher zu kennen, etwas beeinflußt, derselben Klasse von Aufgaben seine Aufmerksamkeit gewidmet hatte und gleichfalls in die Grundprinzipien ihrer Behandlung völlig eingedrungen war, Huygens. Gleich nach Vollendung seiner Schrift *De ratiociniis in ludo aleae* (1657) schickte er den französischen Mathematikern, um ihre Fähigkeiten auf diesem Gebiete zu erproben, einige hierher gehörige Aufgaben, deren Beantwortung ihm allerdings zeigte, daß auch Fermat und Pascal die allgemeine Methode zu ihrer Lösung besaßen. Er selbst stellt folgenden Satz als Grundlage seiner Untersuchungen auf: Wenn von $p+q$ (gleich wahrscheinlichen) Fällen p Fälle den Gewinn a, q Fälle den Gewinn b ergeben, so ist ihr Gesamtwert

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Man sieht, daß dies das von Pascal angewendete, nur allgemein ausgesprochene Prinzip ist. Wenn, wie bei Pascal, auch die Größen a und b Wahrscheinlichkeiten sind, so sieht man, daß der hier aufgestellte Satz mit dem Satze zusammenfällt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder einer oder ein anderer von mehreren einander ausschließenden Fällen eintritt, der Summe der Wahrscheinlichkeiten eines jeden einzelnen Falles gleichkommt. Auch der zweite Hauptsatz, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei Ereignissen beide eintreffen, dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten eines jeden einzelnen Falles gleichkommt, war, wie man sieht, in der Tat von Pascal benutzt worden.

Die drei genannten Gelehrten waren also im Besitze der Prinzipien, aus denen sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung demnächst entwickeln sollte. Vierzehn Jahre, nachdem Huygens' Schrift erschienen war, wendete sein bekannter Landsmann Jan de Witt die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Untersuchungen über die Werte von Leibrenten an. Diese Untersuchungen waren auf der Grundlage von Huygens' Prinzip und zusammengesetzter Zinsrechnung leicht ausführbar, wenn die wahrscheinliche Lebensdauer derjenigen bekannt ist, welche die verschiedenen Altersstufen erreicht haben. Die diesbezüglichen Voraussetzungen de Witts waren jedoch ziemlich willkürlich. Einige 20 Jahre später behandelte Halley die nämliche Aufgabe, aber auf Grund von Resultaten, die er mit Sorgfalt und Umsicht einer wirklichen Totenliste entnahm. Seine Arbeit findet sich in den *Philosophical Transactions* von 1693. Da nur eine einzelne Erfahrungsreihe gebraucht wird, so erscheinen die verlangten Wahrscheinlichkeiten ohne Ausgleichung. Halley berücksichtigt auch die zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten, wenn es sich um die Lebensdauer von 2 oder 3 Personen handelt.

Übrigens kann man sagen, daß die moderne Wahrscheinlichkeits- und Beobachtungslehre durch Keplers und Briggs' numerische Rechenarbeiten auch praktisch vorbereitet wurde. Keplers Aufstellung von Gesetzen, die aus den durch Beobachtung gewonnenen Zahlengrößen folgen, ist an und für sich eine Ausgleichung dieser Beobachtungen.

10. Geometrie, Anwendung der Zentralprojektion.

Wenn wir hier die außerordentlich üppige Entwickelung der meisten Zweige der Mathematik durch mehr als ein Jahrhundert haben verfolgen können, ohne bis jetzt von den besonderen Fortschritten der Geometrie zu reden, so beruht dies nicht etwa darauf, daß dieser Teil der Mathematik versäumt wurde oder außerhalb der Entwickelung stand. Im Gegenteil bildete die Geometrie die Grundlage, auf der die übrigen Fortschritte aufgebaut wurden, und an ihr suchte man eben eine Stütze, wenn das Gebäude recht fest

stehen sollte. Dies haben wir ja sogar Vieta tun sehen, und zwar zu derselben Zeit, wo er die Zeichensprache einführte, die, weiter entwickelt, die reine Mathematik von der Geometrie unabhängig machen sollte. Man bediente sich ihrer besonders im ersten Teile des Zeitraumes, der uns hier beschäftigt hat, in noch unmittelbarerer Weise, wenn man z. B. bei der Behandlung von Gleichungen 3. Grades die einzelnen Glieder der rechten Seite der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

durch die Kuben und Parallelepipeda darstellte, aus denen der Kubus $(a + b)^3$ zusammengesetzt ist. Wir haben Neper eine Differentialgleichung, die als Definition der Logarithmen dient, geometrisch darstellen sehen (S. 134) und werden sehen, daß man den neu aufkommenden Infinitesimaluntersuchungen gleichfalls eine geometrische Form gab. Diese behielt man sogar teilweise in zahlentheoretischen Aufgaben bei, indem man von rechtwinkligen Dreiecken u. s. w. redete.

Während auf dem letztgenannten Gebiete nur von einer Beibehaltung von Benennungen die Rede war, die einmal Geltung hatten, wurde es, wenn man exakt sein wollte, geradezu als eine Notwendigkeit betrachtet, überall, wo von Größen die Rede war, die alle sowohl rationalen als irrationalen Werte annehmen sollten, auf die Geometrie und die Proportionslehre zu bauen, die nun einmal mit der Geometrie in Verbindung gebracht war. Die mathematische Genauigkeit beruht nämlich eben darauf, daß man immer zuvörderst der vollständigen Festigkeit der Grundlage sicher ist, auf der man demnächst weiterbauen soll. Eine neue Grundlage zu bereiten, die für die hochstrebenden Bauten, die man jetzt nach und nach aufführte, ganz besonders geeignet sein sollte, dazu hatte man keine Zeit. Man mußte ihnen deshalb durch dasjenige eine Stütze zu verschaffen suchen, was an sich schon fest stand, durch die alte griechische Geometrie. Diese gibt also für die Entwickelung, mit der wir uns bisher beschäftigt haben, den Hintergrund ab.

Es war übrigens damals ganz natürlich, stets wieder zu dieser Grundlage seine Zuflucht zu nehmen. Das Studium der Alten war noch immer der gemeinschaftliche Ausgangspunkt, auf den man verweisen mußte, wenn man auf ein sicheres Verständnis rechnen wollte. Man kannte die Alten, eignete sich, indem man bei ihnen in die Schule ging, ihren Gedankengang an und lernte bei ihnen solche Auffassungen finden, die demjenigen Mathematiker oder Geschichtschreiber, der sich heute in überlegenerer und deshalb oberflächlicherer Weise mit ihren Schriften bekannt machen will, oft verloren gehen.

Dadurch wurde man zu den Fortschritten angeregt, die über die

Mathematik des Altertums weit hinaus führten, und mit Hilfsmitteln versehen, die sich weit außerhalb des im Altertum angebauten Gebietes verwerten ließen. So haben wir ja schon gesehen, wie die geometrischen Untersuchungen, durch welche die Trigonometrie sich entwickelt hat, zu Formeln führten, die für die Theorie der Gleichungen von großer Bedeutung waren, und werden von derselben Verbindung noch weitere Beispiele antreffen.

Die mit der Geometrie des Altertums und ihrem Verfahren gewonnene innige Bekanntschaft mußte indessen auch innerhalb des Gebietes selbst, auf dem die alten Mathematiker sich bewegt hatten, manch neue Frucht bringen. Dabei können wir uns jedoch in dieser Darstellung nicht verweilen, die namentlich auf die Entwickelung der Anschauungsweisen, der Methoden und der Mittel abzielt, mit denen die Mathematik arbeitet. Wir werden deshalb hier nicht die glänzenden geometrischen Leistungen schildern, durch die sich Vieta, wie früher erwähnt (S. 121), den Namen des Apollonius Gallus erwarb, indem er aufs neue die Konstruktion eines Kreises fand, der 3 gegebene Kreise berührt, und so eine Aufgabe löste, die freilich im Altertum bereits von Apollonius gelöst worden war. Wir werden auch nicht die neuen Konstruktionsaufgaben besprechen, die er und andere durch Hilfsmittel lösten, die auch im Altertum bekannt waren.

Tatsächlich neue geometrische Hilfsmittel, die sogleich eine weitgreifende Bedeutung erhielten und später eine noch viel größere erlangen sollten, finden wir dagegen teils in einer neuen und planmäßigen Anwendung der Perspektive oder Zentralprojektion, teils in der Verbindung zwischen der Geometrie und der unter ihrem Schutze herangewachsenen Algebra, die es mittlerweile zu einer solchen Unabhängigkeit von der Geometrie gebracht hatte, daß umgekehrt jetzt sie dieser eine selbständige Stütze sein konnte. Hier wollen wir erst von der Zentralprojektion reden, von der zu Fermats Zeit Desargues und Pascal weitgehende Anwendungen machten, die, wenn sie im Sinne dieser beiden großen Mathematiker fortgesetzt worden wären, schon damals zur Begründung der projektiven Geometrie geführt haben würden.

Im Altertum verwendete man allerdings die Zentralprojektion zu der Darstellung von Kegelschnitten, die diesen Kurven ihren gemeinschaftlichen Namen gegeben hat; aus ihr leitete man aber (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 200—205) nur eine einzelne planimetrische Eigenschaft der Kegelschnitte her, legte aber sodann diese Eigenschaft den Kurvenbehandlungen in der Ebene ausschließlich zu Grunde, gab also sogleich die Behandlung durch Zentralprojektion wieder auf. In einer besonderen Gestalt erhielt sie jedoch mehrfach Anwendung im Altertum, besonders in der Astronomie,

nämlich als stereographische Projektion. Im Analemma des Ptolemäus (S. 112) wird rechtwinklige Projektion angewendet.

Schon im Anfang der neueren Zeit gibt es Anzeichen einer viel umfassenderen Anwendung der Zentralprojektion. Albrecht Dürer hatte dieses Hilfsmittel durch seine mathematischen Regeln für perspektivische Konstruktionen weiter entwickelt. Sein Zeitgenosse und Landsmann Johannes Werner, der die ältesten Berichte über die Bestimmung der Kegelschnitte durch Menächmus, kaum aber das Werk des Apollonius kannte, gewinnt auf stereometrischem Wege die Achsengleichung der Kegelschnitte. Hieran — und nicht, wie behauptet worden ist, an eine neue stereometrische Untersuchung — knüpfte er eine planimetrische Herleitung der gleichfalls dem Menächmus zugesprochenen Asymptotengleichung.

Dagegen hat etwas später Maurolico für den letztgenannten Satz einen stereometrischen Beweis geführt, dessen Gedankengang kurz so wiedergegeben werden kann. Es sei (Fig. 4) TAB ein ebener Schnitt durch die Achse eines Umdrehungskegels. Ihm parallel ist in der Entfernung a ein hyperbolischer Schnitt gelegt, den wir in der Hyperbel $EFGH$ senkrecht auf die Ebene der Figur projiziert haben. Bezeichnet nun $IFGK$ die Projektion eines beliebigen, der Grundfläche parallelen Schnittes, so erhält man, da dies ein Kreis ist, $IF \cdot FK = a^2$. Daraus folgt wieder, daß das durch den beweglichen Punkt der Hyperbel und die Asymptoten AT und BT bestimmte Parallelogramm konstant ist. Die Asymptoten des Schnittes selbst findet Maurolico, der sich einer anderen Figur bedient, ausdrücklich als die Spuren, welche in der Hyperbelebene von den Tangentialebenen der Kegelfläche längs der mit dieser Ebene parallelen Erzeugenden entstehen. Maurolico gibt auch einige stereometrische Beweise für Sätze über Tangenten und zwar in völlig bewußtem Gegensatze zu dem Streben des Apollonius, fast alles in der Ebene beweisen zu wollen. Sein Versuch, die damals noch unbekannten Bücher 5 bis 7 des Apollonius wiederherzustellen, stimmt allerdings nicht mit dem, was sie tatsächlich enthalten; er zeigt aber, daß er Apollonius gut genug kannte, um selbst auf der gegebenen Grundlage weiterzuarbeiten.

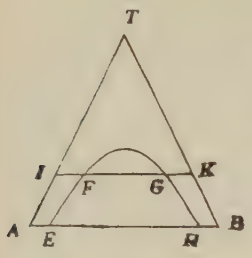

Fig. 4.

Auch die durch das koppernikanische System hervorgerufenen astronomischen Untersuchungen mußten den Gebrauch der stereometrischen Methoden fördern. Es galt nämlich jetzt, den Zusammenhang zwischen der heliozentrischen oder tatsächlichen und der geozentrischen oder scheinbaren Bahn eines Planeten zu finden. Während erstere in einer Ebene durch die

Sonne liegt, ist letztere die Projektion dieser Bahn auf die Himmelskugel. Daß hier das Projektionszentrum selbst beweglich ist, kompliziert die Sache in hohem Grade; eben deshalb aber waren die Methoden, durch die Kepler aus den scheinbaren Bahnen die tatsächlichen herleitete, zu den am weitesten gehenden Anwendungen stereometrischer Betrachtungen zu rechnen, und eben deshalb förderten sie die der Projektionslehre zu Grunde liegenden Prinzipien. In seiner Schrift *Astronomiae pars optica* (1604) machte er von der Zentralprojektion direkten Gebrauch, wennschon nicht besonders von ihrer Anwendung auf Kegelschnitte. Allein er wird anderweit veranlaßt, auf diese eine moderne Betrachtungsweise anzuwenden, indem er die Parabel als Übergangsform zwischen Ellipse und Hyperbel betrachtet und namentlich die Hauptsätze über die Brennstrahlen der Parabel als Grenzfall der entsprechenden Sätze über Ellipse und Hyperbel darstellt.

Besonders brachte jedoch die Bestimmung der Planetenbahnen durch Kepler die Kegelschnitte und nicht zum wenigsten ihre Brennpunkte zu neuen Ehren. Er verwendete hierbei folgenden Satz, der in seiner Untersuchung ungefähr denselben Platz einnimmt, wie heute die Gleichung eines Kegelschnittes in Polarkoordinaten mit einem Brennpunkt als Pol, und dessen Richtigkeit jetzt leicht durch die bekannte Gleichung bewahrheitet werden kann: Wenn man von einem beweglichen Punkte N eines Kreises mit dem Zentrum O die Senkrechte NQ auf einen festen Durchmesser AC fällt, so ist der Ort eines solchen Punktes M von NQ, dessen Entfernung FM von einem festen Punkte F des Durchmessers AC der Projektion (RN) von FN auf den Durchmesser ON (oder der Entfernung von F von der Kreistangente in N, also FP) gleich ist,

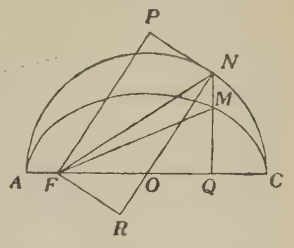

Fig. 5.

eine Ellipse mit dem Durchmesser AC als Hauptachse und dem Punkte F als Brennpunkt.

Diesen und ähnliche Sätze deduzierte und bewies Kepler geometrisch auf Grund der Lehre des Apollonius von den Kegelschnitten. Eine Äußerung von ihm zeigt jedoch, daß man auch zu seiner Zeit, die, wie schon erwähnt, durch fleißige Benutzung der Schriften der Alten mit ihrem Gedankengang vertrauter wurde, das Werk des Apollonius nicht für besonders durchsichtig ansah. Um die Schwerfälligkeit seiner eigenen Beweise zu entschuldigen, führt Kepler nämlich die Kegelschnitte des Apollonius als Beispiel dafür an, daß es Sachen gebe, die sich nicht so darstellen ließen, daß sie bei kursorischem Lesen sofort verständlich seien. Damit die Lehre von den Kegelschnitten auch anderen Leuten als Kepler und seinesgleichen

zugänglich werden könne, bedurfte es also einer einfacheren und zeitgemäßeren Darstellung dieser Lehre als der, welche sich bei Apollonius findet. Eine solche lieferte Descartes' Freund und Zeitgenosse Mydorge. Wir wollen uns aber bei seinem Werke nicht aufhalten, da es, wenn auch in übersichtlicher Form, doch wesentlich den durch Apollonius überlieferten Bahnen folgt. Ganz neue und weitgreifende Gesichtspunkte hat man dagegen Desargues zu verdanken, der seinen geometrischen Untersuchungen, besonders über die Kegelschnitte, die systematische Anwendung der Perspektive zu Grunde legte.

Um für die durch Desargues bezeichneten großen Fortschritte den rechten Hintergrund zu gewinnen, dürfen wir uns jedoch nicht damit begnügen, durch eine Besprechung der früheren, sehr bescheidenen Anläufe auf dem von ihm betretenen Wege die Neuigkeit dieser Fortschritte hervortreten zu lassen, sondern müssen auch umgekehrt darauf unsere Aufmerksamkeit richten, wie weit es die mehr praktische Lehre von der Perspektive, für welche man bisher die Geometrie zu Hilfe gezogen hatte, die aber Desargues jetzt umgekehrt umfassenden geometrischen Untersuchungen zu Grunde legte, schon vor ihm gebracht hatte, und inwiefern sie für eine solche Anwendung in ihrem damaligen Entwickelungsstande geeignet war. Hiervon bekommt man einen guten Begriff durch das große Werk Guido Ubaldos, *Perspectiva*, das 1600 erschien. In diesem Werke, dessen Verhältnis zu älteren Behandlungen der Lehre von der Perspektive wir hier nicht zu untersuchen haben, sind besonders die Regeln für die Abbildung einer ebenen Figur (gewöhnlich wird an eine horizontale gedacht) auf einer anderen (gewöhnlich vertikalen) Ebene klar und bestimmt entwickelt und werden viele verschiedene Lösungen von Aufgaben mitgeteilt, in denen verschiedene Punkte und Strecken als gegeben angenommen werden. Ihnen allen zu Grunde liegt die perspektivische Darstellung der verschiedenen Systeme von Parallelen der ursprünglichen Ebene durch solche, die durch feste Punkte gehen, welche in einer der Schnittlinie der beiden Ebenen parallelen Geraden liegen. Die Abbildung wird ausgeführt, indem die Ebene der gegebenen Figur mit einem Netze überzogen wird, das aus zwei Systemen von Parallelen besteht, die sodann durch 2 Strahlenbüschel abgebildet werden, von denen jedoch das eine, wenn ein System von Parallelen in der gegebenen Figur mit der Schnittlinie der Ebenen parallel ist, selbst ein Parallelenbüschel werden kann. Die Abbildung P' eines Punktes P stellt sich so als der Durchschnittspunkt der Strahlen dar, die den zu den beiden Systemen von Parallelen gehörigen Geraden durch P entsprechen.

Ubaldo hebt ausdrücklich hervor, daß die Konstruktion von dem perspektiven Mittelpunkt unabhängig ausgeführt wird, wenn man nur

(Fig. 6) die Richtungspunkte A und B kennt, die 2 Systemen von Parallelen in der gegebenen Figur entsprechen. Der Strahl in einem der dadurch bestimmten Büschel, der einer gewissen Parallelen in dem entsprechenden Parallelenbüschel entspricht, wird nämlich dadurch bestimmt, daß er die Schnittlinie der beiden Ebenen in demselben Punkte schneiden muss wie diese. Es liegt somit in der Tat eine Konstruktion zweier homologen oder kollinearen Figuren vor, wenn man die Homologieachse und die Punkte der einen kennt, die zwei unendlich fernen Punkten der anderen entsprechen. Ubaldo konstruiert auf diese Weise eine Ellipse als Abbildung eines Kreises der gegebenen Figur. Das Bild seines Mittelpunktes, das er auch konstruiert, wird in der Tat in Bezug auf die Ellipse der Pol der Geraden durch die beiden gegebenen Richtungspunkte A und B. Es zeigt sich ferner durch eine seiner Konstruktionen, daß die Sehnen der Ellipse, welche die Endpunkte zweier Sehnen durch den Pol verbinden, einander auf der Polare schneiden. Nur unterläßt es Ubaldo, aus seinen Konstruktionen allgemeine geometrische Schlüsse zu ziehen. So hebt er nicht hervor, daß hier Eigenschaften vorliegen, die jedem Punkte der Ebene eines Kegelschnittes und einer damit verbundenen Geraden anhaften.

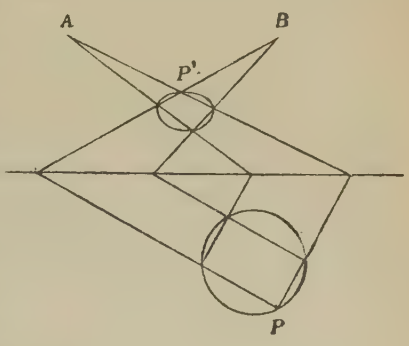

Fig. 6.

Weniger Bedeutung hat es hier für uns, daß Ubaldo auch ein auf der Grundebene stehendes Raumgebilde abbildete, indem er den Höhenmaßstab der verschiedenen mit der Bildebene parallelen Ebenen mittels der Richtungspunkte paralleler horizontaler Geraden erhielt, und daß er die Perspektive auf verschiedenen krummen Flächen lehrte. Auch wollen wir nicht untersuchen, in welchen Beziehungen Desargues in seiner Lehre von der Perspektive (1636) über das schon von Guido Ubaldo Geleistete hinausgeht. Daß er jedoch auch auf diesem mehr praktischen Gebiete Neues zur Geltung brachte, zeigt sich u. a. an dem Widerstand, den er hervorrief (S. 35). In einem Anhang deutet er auf die allgemeinen Prinzipien, die in der Lehre von der Perspektive angewendet werden, und auf die Hilfsmittel hin, welche sie für weitergehende Untersuchungen darbieten. In demselben Anhang führt er auch die später in seiner Lehre von den Kegelschnitten behandelte und für die Perspektive selbst wichtige Aufgabe an, die Geraden zu konstruieren, die in der Abbildung die Achsen eines abgebildeten Kegelschnittes darstellen.

Das im Anhang Versprochene wird in seiner Schrift von den Kegelschnitten (1639) erfüllt, von der wir jedoch erinnern müssen, daß sie vom Verfasser nur als Entwurf (*Brouillon project*) betrachtet wurde. Deshalb hat man weit mehr den üppigen Reichtum an damals vollständig neuen Betrachtungsweisen und neuen Sätzen, den die Schrift darbietet, als den Mangel an Zusammenziehung ihrer einzelnen Teile und Sätze zu beachten. Man findet neben einer guten, in der Ausarbeitung durchgeführten Grundlage einer allgemein angelegten projektiv-geometrischen Lehre von den Kegelschnitten eine Menge neuer und sehr allgemeiner Sätze, die er ohne Beweise mitteilt, deren Begründung aber durch die von ihm eingeführten neuen Gesichtspunkte ziemlich leicht fällt, während sie ohne diese äußerst schwer sein würde.

Seine Gesichtspunkte sind vollständig allgemein und projektiv-geometrisch. Nicht nur faßt er parallele Gerade als Spezialfall von Geraden durch denselben Punkt auf, der sich dann ins Unendliche entfernt hat, sondern die unendlich fernen Punkte der Ebene werden zugleich als Punkte einer unendlich fernen Geraden aufgefaßt. Cylinder werden als Spezialfall von Kegeln aufgefaßt. Von Parabeln mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser*) wird gesagt, daß sie sich in einem unendlich fernen Punkt berühren, und von 2 Hyperbeln mit denselben Asymptoten, daß sie sich in 2 unendlich fernen Punkten berühren. Alle diese Behauptungen gelten, weil man von den speziellen Fällen durch Zentralprojektion zu den allgemeinen übergehen kann. Dadurch erhält man auch ein Mittel, um von Sätzen, welche spezielle Fälle betreffen, die einfacher und besser bekannt sind, zu allgemeineren zu gelangen.

Desargues hat es selbst reichlich benutzt. Während wir bei Apollonius von der Polartheorie nur die allererste Bestimmung der Polare als des geometrischen Ortes der Punkte finden, welche mit dem Pole in Bezug auf diejenigen Punkte harmonisch sind, in welchen die Verbindungslinie mit dem Pole den Kegelschnitt schneidet, hat Desargues, wenn auch keine völlig begründete Polartheorie, so doch eine Reihe einschlägiger Sätze, aus denen eine solche Theorie entwickelt werden kann. Als hierher gehörig können wir sogar einen Satz wie denjenigen anführen, daß die Linienpaare, die einen festen Punkt eines Kegelschnittes mit den Punktepaaren verbinden, die auf diesem von den Strahlen eines Büschels abgeschnitten werden, eine Involution bilden. Übrigens wird nicht nur das unendlich Ferne, sondern

*) Hier hat Desargues allerdings *essieux*, was zunächst Achsen bedeutet; seiner Auseinandersetzung nach genügt es aber, daß die Kurven einen gewöhnlichen Durchmesser gemeinsam haben.

auch das unendlich Kleine als etwas Spezielles in die allgemeinen Angaben einbegriffen. Eine Tangente ist somit eine Sekante, deren Schnittpunkte zusammenfallen, und ist so die Polare ihres eigenen Berührungspunktes.

Desargues bemerkt selbst, er habe die meisten dieser Sätze zunächst durch das „Relief", d. h. durch perspektivische Erweiterung bewiesen, und macht ausdrücklich auf 2 verschiedene Gebilde als Ausgangspunkte aufmerksam, die bei dieser Beweisführung genommen werden können. Das eine erhält man, indem man den Pol das Zentrum eines Kreises sein läßt, in welchem Falle die Beweise darauf beruhen, daß die Ordinaten auf ihren Durchmessern senkrecht stehen, das zweite, indem man die Polare einen beliebigen Durchmesser sein läßt. Von diesen Gebilden werden die Eigenschaften dann auf eine beliebige Zentralprojektion übertragen. Außer den Sätzen über Pol und Polare werden wir sogleich noch einen weitgreifenden Satz zu nennen haben, den er durch eine ähnliche auf Zentralprojektion gegründete Verallgemeinerung gewinnt.

Wie leicht ausführbar derartige Erweiterungen auch sind, so bleibt doch das eine mißlich, daß man für die Allgemeinheit des entwickelten Satzes nicht sofort volle Sicherheit erhält. Desargues liefert zwar sehr wesentliche Beiträge, um auch dieser Unannehmlichkeit abzuhelfen; aber seine für die Herleitung der neuen Sätze so außerordentlich fruchtbaren Betrachtungen werden doch nicht überall auf eine solche Weise durchgeführt, daß sie zugleich eine vollständige Beweisführung darböten. Die Beweise der einzelnen Sätze, die er wirklich durchführt, knüpfen auch nicht unmittelbar an perspektivische Erweiterungen, sondern vielmehr an eine auf allgemeine Gültigkeit angelegte Theorie an, deren Grundlage im Anfange seiner Schrift in ihrem vollen Zusammenhang entwickelt ist. Da es gilt, nicht nur deskriptivische, sondern auch metrische Eigenschaften einer Figur auf ihre Zentralprojektion zu übertragen, muß diese Theorie, wenn auch in geometrischer Gestalt, einen algebraischen Ausgangspunkt nehmen. Es geschieht bei Desargues in der Weise, daß er im Anfang seiner Schrift zunächst eine vollständige Lehre der Involution von Punktepaaren einer Geraden gibt. Der Name Involution rührt von ihm her. Einige Grundzüge dieser Lehre finden sich schon bei Pappus in der Besprechung der verlorenen Schrift des Apollonius über den bestimmten Schnitt (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 215), die darüber noch mehr enthalten zu haben scheint. Desargues hat diese Besprechung wahrscheinlich ebenso gut gekannt, wie ein zeitgenössischer Beurteiler seines Buches (Beaugrand), der ausdrücklich darauf verweist; Desargues hat aber diese Lehre mit Rücksicht auf seine Behandlung der Kegelschnitte selbst vervollständigt und weiter entwickelt.

Eine Reihe von involutorischen Punktepaaren einer Geraden, die wir AA', BB', CC' nennen wollen, wird erst als solche bestimmt, in Bezug auf welche ein Punkt O der Geraden dieselbe Potenz hat, so daß

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' \cdots$$

Durch algebraische Umformung ergibt sich daraus die Gleichung

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

und die analogen, wodurch man Relationen erhält, die ohne Einmischung anderer Punkte ausdrücken, daß die 6 Punkte A, A'; B, B'; C, C' eine Involution bilden. Diese algebraischen Umgestaltungen und solche, die zu anderen Relationen führen, nimmt Desargues in Übereinstimmung mit der antiken geometrischen Algebra des 2. Buches des Euklid vor, auf das er ausdrücklich verweist. Von O — dem Zentralpunkt, wie wir jetzt sagen würden — hebt Desargues ausdrücklich hervor, daß dieser Punkt in der Involution mit dem unendlich fernen Punkte verbunden sei.

Desargues erörtert die verschiedenen Lagen, die die Punktepaare der Involution zu dem Zentralpunkt und zueinander einnehmen können, indem sie entweder alle einander trennen, oder alle einander nicht trennen, und zeigt, daß die Involution in letzterem Falle 2 Doppelpunkte B und C enthält, und daß dann (ohne Rücksicht auf den damals unbekannten Gebrauch von Vorzeichen für Linienstrecken)

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{CA}{CA'}.$$

Diese Verbindung, die wir heute harmonisch nennen, bezeichnet Desargues als eine Involution von 4 Punkten. Er unterläßt auch die Besprechung von Spezialfällen nicht, z. B. daß der Mittelpunkt einer Strecke in Bezug auf die Endpunkte der Strecke mit dem unendlich fernen Punkte harmonisch verbunden ist.

Daß die Involution projektivisch ist, oder daß die Zentralprojektion dreier involutorischen Punktepaare wieder drei involutorische Punktepaare ergibt, kann Desargues sodann leicht mittels der Relation zwischen den Segmenten der Seiten eines Dreiecks beweisen, die durch eine beliebige Transversale abgeschnitten werden. Diesen Satz benennt er nach Ptolemäus; er läßt sich jedoch wenigstens bis auf Menelaus zurückführen (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 234). Aus der bewiesenen Projektivität erhellt eine entsprechende Verbindung zwischen den 3 projizierenden Linienpaaren. Desargues behandelt hierbei auch solche Spezialfälle von Involution von 4 Geraden wie denjenigen, in welchem 2 Gerade die Winkel zwischen den beiden anderen halbieren.

Daß eine Gerade von den 6 Seiten eines vollständigen Vierecks (wie wir heute sagen) in involutorischen Punktepaaren geschnitten wird, kann Desargues auch durch den Satz des Menelaus beweisen. Um dasselbe von den Durchschnittspunkten einer Geraden mit einem Kreise und mit den Seiten eines eingeschriebenen Vierecks zu beweisen, muß er zugleich die Sätze über die Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis benutzen; diese Sätze citiert er nach dem 3. Buche des Euklid. Wir werden diesen Beweis der fundamentalen Bedeutung des Satzes wegen kurz wiedergeben.

Es sei $BCDE$ das eingeschriebene Viereck, dessen Gegenseiten durch eine Transversale in den Punktepaaren P und Q, I und K geschnitten werden, während L und M die Schnittpunkte der Transversale mit dem Kreise sind. F ist der Schnittpunkt der Verlängerungen der Seiten CD und BE. Sodann ist

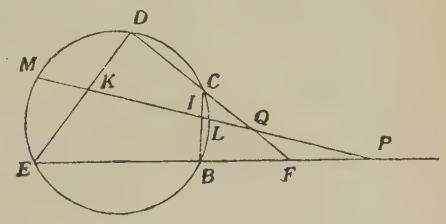

Fig. 7.

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE} = \frac{QC \cdot QD}{FC \cdot FD} \cdot \frac{FC \cdot FD}{PB \cdot PE} = \frac{QC \cdot QD}{FC \cdot FD} \cdot \frac{FB \cdot FE}{PB \cdot PE},$$

oder, da

$$\frac{QC}{FC} \cdot \frac{FB}{PB} = \frac{QI}{PI} \text{ und } \frac{QD}{FD} \cdot \frac{FE}{PE} = \frac{QK}{PK},$$

auch

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK}.$$

Die Involution von $I, K;\ L, M;\ P, Q$ ist somit erwiesen. Da nun jede Figur, die einen Kegelschnitt, ein eingeschriebenes Viereck und eine schneidende Transversale enthält, in eine solche umprojiziert werden kann, in welcher der Kegelschnitt durch einen Kreis ersetzt ist, ist es vollständig erwiesen, daß die Transversale von dem Kegelschnitt und den Gegenseiten in involutorischen Punktepaaren geschnitten wird. Desargues hat nämlich schon früher hervorgehoben, daß seine Beweise, wo er nicht ausdrücklich das Gegenteil sagt, auf alle Fälle anwendbar sind, also nicht nur bei der in der angewendeten Figur vorkommenden gegenseitigen Lage der Punkte und Geraden. Durch diese Bemerkung erhalten seine Begründungen dieselbe Allgemeinheit, die heute durch den Gebrauch von Vorzeichen ihren vollständigeren Ausdruck gewinnt.

Der bewiesene Satz kann allerdings als in der von den Alten gegebenen Bestimmung eines willkürlichen Kegelschnittes als „Ort zu 4 Geraden" (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 213—215) besonders einbegriffen gelten, und die Annahme liegt nicht fern, daß die soeben angeführte

Schrift des Apollonius über den bestimmten Schnitt die Bearbeitung eines Materials enthalten habe, die kraft dieses Satzes der Kegelschnittlehre zu gute kommen sollte. Es geschieht jedoch mit vollem Rechte, wenn man ihn jetzt den Satz des Desargues nennt, nicht nur, weil er ihn zuerst ausdrücklich aufgestellt hat, sondern auch, weil er ihn als die allgemeine Grundlage hervorhebt, von der aus man mit fast alleiniger Anwendung von Spezialisationen die ganze Lehre von der Bestimmung und den Eigenschaften eines einzelnen Kegelschnittes herzuleiten vermag. Beispiele hiervon gibt Desargues in seinen Beweisen der schon erwähnten Sätze über Pol und Polare, konjugierte Durchmesser u. s. w., wenn er sie auch, seiner Aussage gemäß, erst anders bewiesen hat. Er zeigt auch, wie man durch Anwendung seines allgemeinen Satzes auf den Spezialfall, in welchem das Viereck ein Trapez ist, erst eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Darstellung der Kegelschnitte durch Apollonius und dann auch diese selbst erreichen kann, indem man den Durchmesser zu den parallelen Seiten des Trapezes zur Transversale nimmt. Nur die Lehre von den Brennpunkten erfordert die Entwickelung einiger neuen Elementarsätze über den Kreis; aber auch hier bekundet Desargues, wie wir sehen werden, eine zu damaliger Zeit einzige Unabhängigkeit von dem Verfahren des Apollonius.

Die Anschauungsweisen und Sätze, die Desargues in seinem Entwurfe zu einer Lehre von den Kegelschnitten aufgestellt hat, setzen ihn in den Stand, die am Schlusse seiner Lehre von der Perspektive gestellte Aufgabe zu lösen: in der perspektivischen Darstellung eines Kegelschnittes die Punkte und Geraden zu finden, die dem Zentrum, den Achsen und den Brennpunkten entsprechen. Hierzu benutzt er die auf der Bildebene entstehende Spur s einer der Ebene des Kegelschnittes selbst parallelen Ebene durch den Scheitel T des projizierenden Kegels. Der Pol P dieser Spur ist die Projektion des gesuchten Zentrums, die konjugierten Strahlen durch den Pol sind Projektionen der konjugierten Durchmesser. Sie bestimmen auf s eine Involution M, M'. Eine zweite Involution, von der wir ein beliebiges Punktepaar N, N' nennen wollen, wird auf s durch gegenseitig senkrechte Gerade durch T und in der Ebene Ts bestimmt. Die Geraden, die P mit dem diesen beiden Involutionen gemeinsamen Punktepaar verbinden, sind Projektionen der Achsen. Der Schnittpunkt jeder dieser Geraden mit einer Tangente, die von einem Punkte N der zweiten der schon genannten, auf s liegenden Involutionen gezogen wird, und ihr Schnittpunkt mit der Geraden, die den Berührungspunkt mit dem Punkte N' verbindet, der zu demselben Punktepaare wie N gehört, werden ein Punktepaar einer neuen Involution bilden. Diese neue Involution ist die Projektion derjenigen, die auf der Achse durch die Schnittpunkte mit der Tangente und Normale desselben

Punktes der Kurve gebildet wird. Ihre Doppelpunkte, die auf der einen der beiden Achsenprojektionen reell sind, werden also Projektionen der Brennpunkte.

Als kurze Darstellung in der Sprache der modernen Geometrie hat dieser tatsächlich genaue Bericht in der Form etwas frei sein müssen. Wie gut Desargues die hier angewendeten Prinzipien beherrschte, ergibt sich vielleicht am besten daraus, daß er selbst, unabhängig von der Lehre von den Brennpunkten, den allgemeinen und projektivischen Involutionssatz ausgesprochen hat, den er bei der Konstruktion der Projektionen der Brennpunkte benutzt, und daraus, daß er mit Hilfe eines seiner Schüler, Pujos, der auch einen anderen, ähnlichen Beitrag zu seinem Buche geliefert hat, einen direkten Beweis dieses allgemeinen Satzes ausgearbeitet hat, der jedoch offenbar erst durch projektivische Erweiterung gefunden ist.

Einige Erweiterungen der Polartheorie auf Flächen 2. Ordnung und Untersuchungen, welche 2 Kegelschnitte betreffen, sind zu wenig durchgeführt, um Ergebnisse von Bedeutung zu bringen; sie zeigen aber, daß Desargues für die Tragweite seiner Betrachtungsweisen Verständnis hatte.

Desargues, der, wie man sich erinnern wird, Architekt und Ingenieur war, hat außerdem mehrere kleine Schriften herausgegeben, in denen seine Theorien praktisch im Gebiete der Kunst und des Handwerkes angewendet werden; so auf die Lehre von der Perspektive, wobei er sogar auf eine rationelle Behandlung der Luftperspektive bedacht ist, auf die Ausführung von Steinschnitten, die Konstruktion von Sonnenuhren u. s. w. Sie verbessern teils die schon übliche Praxis, teils geben sie ihr wenigstens eine exakte Begründung. Zugleich enthalten mehrere Schriften seines Schülers, des Kupferstechers Bosse, seine eigene Erklärung, daß sie in Übereinstimmung mit seinen Methoden ausgearbeitet sind, wie denn bei Bosse überhaupt mehreres unmittelbar von Desargues herrührt.

Aus seinen kleineren Schriften wollen wir 3 rein geometrische Sätze herausgreifen, die der Lehre von der Perspektive angefügt sind, weil sie es ermöglichen, einschlägige Konstruktionen in einer einzigen Ebene auszuführen. Sie betreffen die jetzt sogenannten perspektivischen (homologen, kollinearen) Figuren der Ebene, d. h. solche, die einander Punkt für Punkt, Gerade für Gerade entsprechen, und in denen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch denselben Punkt gehen, die Schnittpunkte entsprechender Geraden in einer Geraden liegen.

Der erste Satz besagt, daß 2 Dreiecke, welche die erste dieser Eigenschaften besitzen, auch letztere besitzen, der zweite, daß 2 vollständige Vierecke homolog sind, wenn 5 Seiten des einen entsprechende Seiten des andern in Punkten einer Geraden schneiden. Diese Sätze sind einleuchtend,

wenn die Figuren in verschiedenen Ebenen liegen. Liegen sie aber in derselben Ebene, so werden sie durch den Satz des Menelaus bewiesen. Die angeführten Sätze haben bekanntlich eine grundlegende Bedeutung in der projektiven Geometrie, wie sie von Staudt darstellt. Dann müssen sie jedoch ohne Hilfe von Proportionen bewiesen werden.

Der dritte Satz besagt, daß, wenn man auf den Seiten des Vierecks $ABCD$ 4 Punkte E auf AB, 4 Punkte F auf BC, 4 Punkte G auf CD und 4 Punkte H auf DA wählt, die Größe

$$\prod \frac{AE}{BE} \cdot \prod \frac{BF}{CF} \cdot \prod \frac{CG}{DG} \cdot \prod \frac{DH}{AH},$$

wenn die Produkte Π für jede Gerade auf alle 4 Punkte derselben ausgedehnt werden, unverändert bleibt, sobald man zu einer perspektivischen Figur übergeht. Der Satz gilt bekanntlich auch, wenn das Viereck mit einem m-Eck, die 4 Punkte jeder Seite mit n Punkten vertauscht werden; der Wert 4 für diese beiden Zahlen aber ist sicherlich auch nur beispielsweise gewählt. Der Satz wird durch den Satz des Menelaus bewiesen. Er ist der nämliche, den Poncelet später der Behandlung projektivischer metrischer Eigenschaften zu Grunde gelegt hat.

Wir haben noch zu bemerken, daß Bosse in einer nach dem Tode Desargues' herausgegebenen Arbeit versuchte, eine von diesem angegebene Konstruktion von Basreliefs klarzulegen. Soweit man die sehr fehlerhafte Darstellung verstehen kann, hat Desargues hier die Konstruktion homologer (kollinearer) Raumgebilde zur Anwendung gebracht, was auch an und für sich am wahrscheinlichsten ist.

Wir haben Desargues bereits einen tüchtigen Mitarbeiter, Pujos, citieren sehen; Pascal setzte sodann in einem Alter von 16 Jahren in einer ganz kleinen Schrift, *Essai sur les coniques*, in glänzender Weise Desargues' Arbeit fort. Hier ist der Satz aufgestellt, den Desargues mit Bewunderung und vollem Verständnis seiner Tragweite *la Pascale* nannte, und der die Figur betrifft, die wir das *Pascalsche Sechseck* nennen, während es Pascal selbst anderswo *Hexagramma mysticum* nennt. Dieser Satz drückt, wie bekannt, die Verbindung zwischen 6 beliebigen Punkten eines Kegelschnittes auf andere Weise aus, als es durch den Desarguesschen Satz geschieht, nämlich so, daß, wenn diese Punkte in beliebiger Anordnung zu Ecken eines (eigentlichen oder uneigentlichen) Sechsecks gemacht werden, die drei Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden liegen. Hinsichtlich des Beweises führt er nur an, daß der Satz erst für den Kreis bewiesen wird, von dem er dann durch Projektion auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen wird. Pascal, der es selbst ausspricht, daß seine Arbeit unter

dem Einfluß der Schriften Desargues' entstanden ist, sagt, daß man aus dem hier angeführten Satze alle Sätze über Durchmesser, Parameter, Tangenten u. s. w., sowie Konstruktionen von Kegelschnitten durch gegebene Punkte oder mit anderen gegebenen Bedingungen herleiten kann, und Desargues behauptet, daß dieser Satz die 4 ersten Bücher des Apollonius in sich schließe.

Pascal nimmt sich jedoch nicht die Zeit, dies alles auszuführen. Dagegen teilt er einige andere völlig allgemeine Beziehungen zwischen Punkten eines Kegelschnittes mit. Eine von ihnen drückt aus, daß

$$\frac{PM \cdot AS}{MA \cdot SQ} = \frac{PL \cdot AT}{AL \cdot TQ},$$

wenn die bezeichneten Punkte durch Schnitte eines Kegelschnittes mit Geraden bestimmt werden, wie es Fig. 8 zeigt. Die Anwendbarkeit des Satzes leuchtet ein, wenn man bemerkt, daß er nach Umschreibung in

$$\frac{PM}{MA} : \frac{PL}{LA} = \frac{AT}{TQ} : \frac{AS}{SQ}$$

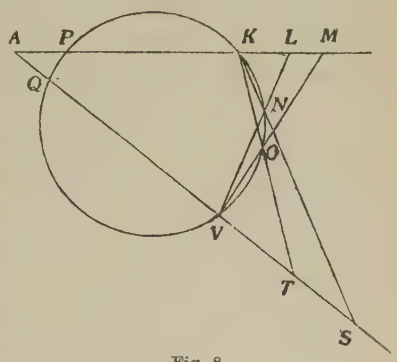

Fig. 8.

ausdrückt, daß das Doppelverhältnis, wie wir jetzt sagen, von P, A, M, L dem Doppelverhältnis zwischen A, Q, T, S gleich ist, oder, was dasselbe ist, daß die Doppelverhältnisse der Büschel, welche von V und K aus 4 andere Punkte auf den Kegelschnitt projizieren, gleich sind.

Ein anderer der allgemeinen Sätze drückt die Beziehung zwischen Schnittpunkten eines Kegelschnittes mit 3 Geraden aus, die gewöhnlich als Carnotscher Satz bezeichnet wird, weil Carnot ihn auf beliebige algebraische Kurven ausgedehnt hat. Außerdem stellt Pascal den entsprechenden Satz für ein Viereck $(MAPE)$ auf, indem er behauptetet, daß (Fig. 9)

$$\frac{MB \cdot MC}{PF \cdot PD} \cdot \frac{AD \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{ML \cdot MK}{PH \cdot PG} \cdot \frac{EH \cdot EG}{EK \cdot EL}.$$

Dieser Satz bezeichnet deutlich den Fortschritt, der durch die projektivische Betrachtungsweise über den Standpunkt des Apollonius hinaus gemacht ist. Sind nämlich die Geraden BC und DF, sowie die Geraden KL und GH parallel, so werden die letzten Verhältnisse auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens verschwinden, und der Satz wird sodann zu dem von uns Potenzsatz

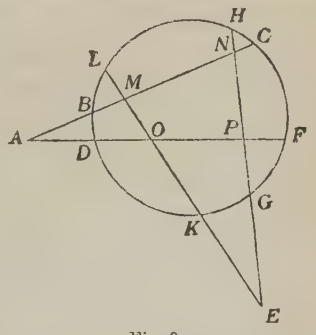

Fig. 9.

(Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 197, 208) genannten, der die wichtigste Grundlage für die weitreichenden Sätze im 3. Buche des Apollonius bildet. Pascal, der es besonders wünscht, aus seinen Sätzen alles, was sich bei Apollonius findet, herleiten zu können, hat sicherlich in seinen kurzen Überblick den hier angeführten eben deswegen mit aufgenommen, weil in ihm ein für Apollonius so wichtiger Satz mit einbegriffen ist.

Pascal führt noch ein paar Sätze und Aufgaben an, die durch seine allgemeinen Sätze bewiesen und gelöst werden können; so den Involutionssatz des Desargues, indem er seinem Urheber zugleich großes Lob spendet. Den übrigen Teil seiner Lehre von den Kegelschnitten, zu der er jedenfalls den Plan so weit fertig hatte, daß er sich seiner Durchführung sicher fühlte, schiebt er in jugendlicher Bescheidenheit vorläufig auf. Was er diesem Plane gemäß wirklich ausgearbeitet hat, wurde verschiedenen Mathematikern vorgelegt. Jetzt kennt man es nur noch durch eine kurze Mitteilung von Leibniz, dem während eines Aufenthaltes in Frankreich von der Familie des verstorbenen Pascal das Manuskript geliehen wurde. Sein Bericht zeigt uns, daß Pascal in der Tat gehalten hat, was er versprochen hatte, ja, noch mehr, insofern er einen Kegelschnitt nicht nur durch 5 gegebene Punkte, sondern auch durch 5 gegebene Tangenten und, wie es hieraus und aus einem Schreiben an den Verein der Mathematiker zu Paris hervorzugehen scheint, überhaupt durch im ganzen 5 gegebene Punkte und Tangenten bestimmte. Wenn wir auch nicht wissen, wie Pascal im einzelnen seine Pläne durchgeführt hat, so macht es uns die Bekanntschaft, die wir bereits mit den Betrachtungsweisen Desargues' gemacht haben, doch leicht verständlich, wie er, indem er in seinen allgemeinen Sätzen Punkte oder Gerade zusammenfallen oder sich ins Unendliche entfernen ließ, alles das wirklich hat erreichen können, was er errreicht haben soll.

In den Sitzungen des erwähnten Vereins der Mathematiker, zu denen Pascal durch seinen Vater schon als Knabe Zutritt fand, hatte er gewiß Gelegenheit, Desargues zu treffen. Somit mag es dieser selbst gewesen sein, der von Anfang an Pascal die Anschauungsweisen lehrte, die für das Verständnis seiner geschriebenen Arbeit den rechten Aufschluß geben. Ohne persönliche Anleitung wäre es nicht ganz leicht gewesen, in den Kern dieser Anschauungsweisen einzudringen. Die ganz neuen und genialen Hauptgedanken Desargues', die wir besonders dem entnommen haben, was er über Pole und Polaren und deren Zusammenhang mit der Lehre von den Durchmessern sagt, treten nämlich im Anfang seiner Schrift nicht deutlich hervor. Außerdem wird das Gedächtnis durch eine große Menge ganz neuer Kunstausdrücke beschwert, die er zur Darstellung

dieser neuen Gedanken für notwendig erachtet. Hinzu kommt noch die umständliche euklidische Darstellung der vielen Relationen, welche die Involutionen ausdrücken. Der Leser, der hier stehen bleibt und nicht bis zu ihrer geometrischen Anwendung gelangt, für welche sie bestimmt sind, wird, wie Beaugrand, darin nur eine verflachte Wiederholung des von Pappus über den bestimmten Schnitt des Apollonius Gesagten sehen.

Daß man bei einem solchen Lesen dazu kam, die Darstellung Desargues' als *jargon* zu betrachten, wissen wir aus einer Äußerung Fermats, der jedoch keineswegs diese Ansicht teilt, sondern im Gegenteil die Arbeiten Desargues' hochschätzt. Zu ihrem rechten Verständnis war Fermat auch besonders befähigt, da er, der auch auf diesem Gebiete mit den Alten vertraut war, geometrische Aufgaben mit derselben Sicherheit behandelte wie zahlentheoretische und es verstand, seiner Behandlung den rechten geometrischen Schwung zu geben. Er hatte seinerzeit mit dem älteren Pascal schwierige geometrische Aufgaben, Konstruktionen von Dreiecken betreffend, ausgewechselt. Zu Vietas Konstruktionen von Kreisen, die gegebene Kreise berühren, lieferte er in ebenso einfachen Konstruktionen von Kugeln, die gegebene Kugeln berühren, ein würdiges Seitenstück. Hinsichtlich derjenigen geometrischen Sätze, von denen er nach der Erwähnung bei Pappus annahm, daß sie derselben Art wären wie diejenigen in Euklids verloren gegangenem Werke über die Porismen, ist es allerdings fraglich, ob er die rechte Porismenform trifft; die sinnreich aufgefundenen geometrischen Sätze aber schließen sich jedenfalls denen der Alten gut an. In diesem Versuche stößt er zudem auf einen Satz, der durch eine perspektivische Erweiterung, auf die Fermat ausdrücklich hinweist, geradezu auf den „Satz des Desargues" führt. Fermats Satz besagt: Wenn man 2 feste Punkte N und M eines Kreises mit einem beweglichen Punkt P desselben verbindet, so schneiden sie eine mit MN parallele Sehne AD in 2 Punkten O und V derart, daß $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO}$ konstant (*datum*) wird. Gibt man P zwei verschiedene Lagen und projiziert man nun, so erhält man den Satz des Desargues. Die von Fermat angewendete Form wird indessen besonders dadurch interessant, daß die konstante Größe $\frac{AO \cdot DV}{AV \cdot DO}$ das Doppelverhältnis zwischen A, D, O und V oder zwischen den Geraden ist, welche die festen Punkte der Kurve A, D, N und M von einem beweglichen Punkt derselben aus projizieren. Wenn wir hier hervorgehoben haben, daß der Satz von der Herstellung eines Kegelschnittes durch projektivische Büschel oder als geometrischer Ort des Strahlenpunktes eines Strahlenbüschels durch feste

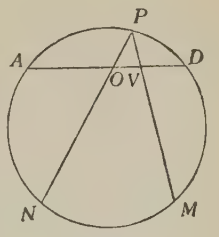

Fig. 10.

Punkte, die ein gegebenes Doppelverhältnis haben, bei Pascal und Fermat tatsächlich vorkommt — in ersterer Gestalt sogar schon bei Apollonius (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 209) —, so vergessen wir natürlicherweise dabei nicht, daß der Weg von da bis zur begriffsmäßigen Aufstellung des Doppelverhältnisses noch weit war. Denn sie stammt erst aus dem 19. Jahrhundert und rührt von Möbius her, und erst Steiner und Chasles haben dann darauf ein geometrisches System erbaut.*)

Desargues fand auch bei Descartes hohe Anerkennung. Sie galt jedoch zuvörderst seiner Person und der einsichtsvollen Urteilskraft, auf die sich ja Descartes bei seinen eigenen philosophischen und algebraischen Arbeiten, die Desargues also auch zu würdigen wußte, zu berufen liebte, sowie seinen praktischen Arbeiten und seiner Verwertung der Wissenschaft zu nützlichen Zwecken. Descartes äußert sich auch über die Kegelschnitte Desargues' anerkennend; bei diesen Äußerungen gewinnt man indes den Eindruck, als ob er zu sehr von seiner eigenen gleichzeitigen Umgestaltung der Geometrie eingenommen sei, um der Feinheit und großen Bedeutung der Desarguesschen Betrachtungsweisen recht bewußt zu werden. Wie es Descartes selbst erging, so erging es auch der ganzen gleichzeitigen Mathematik, die sich bald die Methoden Descartes' aneignete. Allerdings war es auch ein ganz neues Licht, das Descartes über weite Gebiete der Geometrie verbreitete; wie wir aber bald näher zeigen werden, war auf diesen Gebieten die auszuführende Arbeit sowohl durch die Mathematik des Altertums als auch in der unmittelbar vorangegangenen Zeit vorbereitet worden, so daß man sofort die weitere Ausbildung dieser Methoden in Angriff nehmen konnte. Die neuen Aufgaben, für die sich Descartes' Verfahren eignete, lagen auch schon vor, namentlich in den beginnenden Infinitesimaluntersuchungen. Deshalb folgten bald die tüchtigsten Mathematiker Descartes, und diejenigen Gebiete der Mathematik, die man nicht nach den Methoden Descartes' behandeln konnte, oder deren Ergebnisse nicht als Material für die weitere Entwickelung dieser Methoden zu verwenden waren, ließ man liegen. Für die Anwendung der cartesianischen Geometrie eignete sich die Geometrie des Altertums, in der die Parallelkoordinaten schon eine große Rolle spielten, und inderen Resultaten öfters Parallelen vorkommen, weit besser als die in geometrischer Beziehung allgemeineren Anschauungsweisen der projektiven Geometrie. Dies wird durch einen Vergleich zwischen dem S. 187 erwähnten Potenzsatz bei Apollonius und seiner Verallgemeinerung bei Pascal ersichtlich. Zwar sollte die projek-

*) Neuerdings hat jedoch Hr. Björnbo bei Menelaus das Zeugnis davon entdeckt, daß der Satz über die Projektivität der Doppelverhältnisse, zumal auf der Kugel, im Altertum ausdrücklich und allgemein bekannt war (Abh. z. Gesch. d. mathem. Wissensch. XIV, S. 96).

tive Geometrie der analytischen im 19. Jahrhundert Aufgaben stellen, die gewaltig zur Entwickelung sowohl des Koordinatenbegriffes als der Algebra beigetragen haben; dafür waren jedoch die analytische Geometrie Descartes' und die damalige Algebra natürlich noch nicht reif; sie wiesen solche Aufgaben einfach ab.

Daraus erklärt es sich zunächst, daß die projektive Geometrie des Desargues trotz ihrer guten Aufnahme bei den besten Mathematikern damaliger Zeit doch im übrigen noch nicht recht Wurzel fassen konnte. Dazu wäre allerdings eine besser durchgeführte und zugänglichere Behandlung erforderlich gewesen als die im Entwurfe Desargues' selbst; eine solche aber wäre sicherlich erfolgt, wenn die Zeit empfänglicher gewesen wäre; ja, sie lag — in einer Gestalt, die wir zwar nicht kennen — schon aus der Hand Pascals vor. Sie ist aber nie erschienen, und die Arbeiten Desargues' selbst blieben in dem Grade unbeachtet, daß sogar die bedeutendste von ihnen, die nur in 50 Exemplaren (?) gedruckte Schrift über die Kegelschnitte, verloren gegangen und ihr Inhalt nur durch eine von de la Hire 1679 unternommene Abschrift auf uns gekommen ist. De la Hire selbst hatte schon 6 Jahre früher eine Schrift über die Kegelschnitte herausgegeben, die jetzt verloren scheint. Es wird so verständlich, daß er im voraus für seine eigene Sache zu eingenommen war, um die Größe und die Allgemeinheit des Gedankenganges des Desargues, dessen Bedeutung weit über die Kegelschnittlehre hinausreicht, recht einsehen zu können, und daß auch er sich über die für algebraische Operationen mühselige und altmodische Form bei Desargues ein wenig aufhält.

Nach de la Hires eigenen Worten über seine ältere Arbeit scheint ihr Plan derselbe wohl durchdachte gewesen zu sein, den er später in der 1685 erschienenen größeren Arbeit, *Sectiones conicae*, durchgeführt hat. Zwar bedient auch er sich des Studiums der Kegelschnitte am Kegel selbst, also der Perspektive, was natürlich sehr wohl schon in dem älteren Werke von einer indirekten Einwirkung Desargues' herrühren kann; aber er hält sich in dieser Beziehung innerhalb der Grenzen des dem Plane seiner Arbeit nach Notwendigen und zeigt deshalb keine richtige Vorstellung von der Tragweite der projektivischen Methoden des Desargues. Ihre Anwendung zur Verallgemeinerung bekannter Sätze tritt bei de la Hire nicht in Wirkung, weil er von ihnen vor allem einen ganz entgegengesetzten, wenn auch schönen und zweckmäßigen Gebrauch macht. Während Desargues die Polarsätze zuerst aus den Sätzen über Durchmesser herleitete, liefert de la Hire zunächst einen schönen, elementaren Beweis für den Satz über die Polare in Bezug auf einen Kreis und wendet sodann die Umprojizierung an, um zu zeigen, daß in einem Kegelschnitte ein jedes System paralleler Sehnen einen Durchmesser hat. Dadurch vermeidet er den weitläufigen

planimetrischen Beweis, der einen großen Teil des 1. Buches des Apollonius in Anspruch nimmt. Bei de la Hire findet sich zwar auch eine Übertragung der Polarsätze vom Kreise auf die Kegelschnitte; dabei werden aber die unendlich fernen Punkte nicht gebraucht. Übrigens sind die Kegelschnitte des Apollonius deutlich sein Vorbild, wenn auch die Beweise einfacher sind und öfters mehrere bei Apollonius getrennte Beweise umfassen. Von so allgemeinen projektivischen Sätzen wie dem Desarguesschen oder Pascalschen, die durch Spezialisierung die ganze Lehre von einem Kegelschnitt umfassen sollten, ist gar nicht die Rede.

De la Hires Werk, das als leichter zugänglich ziemlich verbreitet ward, sollte somit die großartigen Ideen Desargues' nicht verbreiten helfen. Diese mußten deshalb aufs neue entstehen, um weitere Verbreitung zu finden. Da dies erst lange nach dem von uns hier behandelten Zeitraum geschah, soll hier nur darauf verwiesen werden, daß Lambert in der *freien Perspektive* 1758 die Prinzipien der Zentralprojektion wieder aufnahm und weiter entwickelte, die Desargues benutzt hatte, daß aber eine wirkliche Entwickelung der projektiven Geometrie erst durch die Schule Monges möglich wurde, nachdem dessen deskriptive Geometrie die Forscher mit den Operationen im Raume überhaupt vertrauter gemacht hatte. Brianchon fing damit an; derjenige aber, der endlich eine projektive Geometrie mit der Möglichkeit andauernder Entwickelung begründete, war Poncelet. So wenig knüpften seine Arbeiten an die Desargues' an, daß er erst durch die herabsetzende und nur wenig einsichtsvolle Besprechung des Desarguesschen Hauptwerkes durch Beaugrand darauf aufmerksam wurde, daß die nämlichen Ideen, die ihn selbst beschäftigten, schon im 17. Jahrhundert wach gewesen waren.

11. Die algebraischen und analytisch-geometrischen Arbeiten Fermats. Koordinaten.

Ungefähr gleichzeitig mit dem Erscheinen der Arbeiten Desargues' über die projektive Geometrie langte die Verbindung zwischen Geometrie und Algebra, die seit den ersten Tagen der wissenschaftlichen Mathematik existierte, bei einem Wendepunkte an, der, eben weil alles so gut vorbereitet war, für die künftige Entwickelung der Mathematik die allergrößte Bedeutung bekommen mußte. Diese Verbindung hatte von Anfang an darin bestanden, daß Geometrie und geometrische Darstellung für Algebra und algebraische Operationen dieselbe Stütze boten, die wir heute an der mathematischen Zeichensprache besitzen. Doch war selbst in jenen Zeiten die Entwickelung der Algebra so kräftig gewesen, daß sie umgekehrt der Mathematik wesentliche Dienste leisten konnte, z. B. wenn die Fünfteilung des

Kreises von einer Gleichung 2. Grades abhängig gemacht wurde, oder wenn Apollonius den sogenannten Verhältnisschnitt einer rein algebraischen Behandlung unterwarf. Ihre Selbständigkeit und ihre Anwendbarkeit auf die Geometrie selbst waren seitdem stets gewachsen, zuerst dadurch, daß die Algebra bei der zunehmenden Fähigkeit im Rechnen noch ganz andere Verbindungen anknüpfte als mit der Geometrie, sodann dadurch, daß sie in neuerer Zeit ihre eigene Zeichensprache bekam. Solange die Mathematik indes fortfuhr, auf der von Vieta gegebenen Grundlage weiterzubauen, war es immer noch, wie wir schon mehrmals hervorgehoben haben, die von den Alten mit so großer Stringenz entwickelte Geometrie, die den algebraischen Operationen ihren exaktesten Ausdruck verlieh.

Eine Änderung wurde hierin durch Descartes hervorgerufen; sie war bei ihm mit dem ersten öffentlichen Auftreten derjenigen Anwendung der Algebra auf die Geometrie verbunden, die sich der Koordinaten bedient, und die wir jetzt analytische Geometrie nennen. Daß sich diese umfassende und fundamentale Methode indessen ohne die Umgestaltung der Algebra entwickeln läßt, die Descartes mit ihr vornahm, erhellt daraus, daß gleichzeitig mit dem Erscheinen der Geometrie Descartes' auch Fermat, der sich in formell algebraischer Beziehung noch an Vieta hielt, in seiner erst weit später herausgegebenen Schrift *Ad locos planos et solidos isagoge* die nämliche Methode entwickelt und seinen Pariser Freunden über sie und ihre wichtigsten von ihm vorgenommenen Anwendungen verschiedene Mitteilungen gemacht hatte. Eben, weil die analytische Geometrie bei ihm an einen älteren mathematischen Standpunkt anknüpft und zugleich deutlicher ihre Verbindung mit der Geometrie des Altertums verrät, werden wir von seiner Anwendung von Koordinaten ausgehen. Bei ihm tritt zudem die Methode selbst direkter hervor als in der Geometrie des Descartes.

Zuvor wollen wir noch eine rein algebraische Arbeit Fermats besprechen, die selbstredend sowohl der analytischen Geometrie als seinen übrigen Anwendungen der Algebra zu gute kommen mußte. Es handelt sich um eine ganz kleine Schrift über die Elimination aus Gleichungen höherer Grade. Das Verfahren, das an einem Beispiele gezeigt wird, kann in größerer Kürze und Allgemeinheit so dargestellt werden: Es sei y die aus den Gleichungen

$$a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{m-1} y + a_m = 0$$
$$b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

zu eliminierende Größe. Dann ist

$$\frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{m-1} y}{a_m} = \frac{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_{n-1} y}{b_n}.$$

Durch Kürzung mit y erhält man eine Gleichung nächstniedrigeren Grades. Die Fortsetzung des Verfahrens führt schließlich zu der verlangten Elimination.

In einem Anhange wird die Elimination zur Wegschaffung von Wurzelgrößen aus Gleichungen angewendet. Es geschieht, indem man jeder Wurzelgröße eine neue Bezeichnung gibt, also z. B.

$$\sqrt[m]{ax^r + bx^{r-1} + \cdots} = t$$

setzt. Durch Erhebung dieser Gleichung in die m^{te} Potenz erhält man eine neue rationale Gleichung, indem gleichzeitig eine neue Unbekannte t hinzugekommen ist. Elimination der allmählich hinzugekommenen neuen Unbekannten ergibt sodann die gesuchte rationale Gleichung in den ursprünglichen Unbekannten.

Da die analytisch-geometrischen Arbeiten Fermats älter sind als die soeben besprochene, kann es nicht wundernehmen, in demselben Anhange einige Bemerkungen darüber anzutreffen, daß eine Gleichung mit einer Unbekannten eine einzelne Größe, eine Gleichung mit zwei Unbekannten einen geometrischen Ort in der Ebene, eine Gleichung mit drei Unbekannten eine Fläche im Raume völlig bestimmt. Diese Bemerkungen deuten übrigens auf die Weise zurück, in der man tatsächlich schon im Altertum solche Fragen wie diejenigen behandelte, die man nun von Gleichungen mit zwei oder drei Unbekannten abhängig machte. Die rein algebraische Bedeutung dieser Gleichungen selbst und besonders die unendliche Anzahl von Lösungen einer solchen Gleichung waren schon in der unmittelbar vorangehenden Zeit mit großer Bestimmtheit von Bachet (S. 148) und von Ghetaldi hervorgehoben worden.

In der Einleitung der *Isagoge* gab Fermat zum Gebrauche von Parallelkoordinaten, besonders rechtwinkligen, in der Ebene eine bestimmte Anleitung, indem er, wie er selbst sagt, die beiden Unbekannten einer Gleichung (als Strecken) unter einem gegebenen (gewöhnlich rechten) Winkel aneinanderstoßen und den Endpunkt der einen samt ihrer Richtung festliegen läßt. Er untersucht sodann die Kurve, die von dem andern Endpunkte der von den beiden Koordinaten gebildeten gebrochenen Linie durchlaufen wird.

Diese Darstellung einer Kurve ist im wesentlichen dieselbe wie die im Altertum gebräuchliche. Namentlich werden bei Apollonius die Kegelschnitte so dargestellt, nicht zum wenigsten in den Beschreibungen, die er für ihre planimetrische Behandlung zum Ausgangspunkt nimmt (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 202—203). Es besteht nur der Unterschied, der von dem verschiedenen Standpunkt der Algebra herrührt. Im Altertum traten algebraische Gleichungen besonders zwischen zwei Unbekannten gar

nicht als etwas Selbständiges auf. In der geometrischen Algebra trat eine solche nur als geometrische Abhängigkeit zwischen den Geraden, die wir heute Koordinaten nennen, als das sogenannte *Symptoma* der dadurch charakterisierten Kurve auf. Diese Benennung überträgt Fermat ganz natürlich auf die Gleichung der Kurven. Der Koordinatenbegriff kommt indes bei den Alten nicht so explizit vor, daß ihn Fermat von ihnen hätte entlehnen können: die Ordinaten sind bei ihnen mehr im allgemeinen von der Lage des Punktes der Abscissenachse, von dem sie ausgehen, als gerade von der Abscisse dieses Punktes abhängig gemacht, oder, wie man auch sagen kann, die Kurven werden als Örter eines beweglichen Punktes einer beweglichen Geraden von unveränderter Richtung bestimmt, während das Symptoma der Kurve die Abhängigkeit zwischen diesen beiden Bewegungen ausdrückt. Übrigens war der Gebrauch von Koordinaten in der Zwischenzeit nicht abgekommen, hatte vielmehr in gewissen Beziehungen sogar zugenommen. Dies gilt z. B. von der Verwendung sphärischer Koordinaten für astronomische Ortsbestimmungen und demnächst für die Untersuchung der Planetenbewegung; in der Ebene hatte Oresme (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 324) auf ähnliche Weise Koordinaten zur Darstellung empirischer Kurven verwendet. Auch Guido Ubaldo bestimmte bei seiner Konstruktion der Perspektive einer ebenen Figur (S. 179) erst ihre Punkte durch ein aus zwei Systemen von Parallelen bestehendes Koordinatennetz. Wir werden ferner, wenn wir zu den Anfängen der Infinitesimaluntersuchungen kommen, sehen, daß man auch vor Fermat regelmäßig Integrationen in Quadraturen von Kurven, die auf rechtwinklige Koordinaten bezogen sind, umgestaltete.

Die von Fermat und Descartes eingeführte Anwendung von Koordinaten zu algebraischen Bestimmungen geometrischer Örter stand indessen dem Gebrauche von Koordinaten bei den alten Geometern, besonders bei Apollonius, näher als demjenigen, den wir bei den Astronomen, bei Oresme oder in den Infinitesimaluntersuchungen finden. Wir sehen denn auch Fermat die Anregung zur Bildung und weiteren Entwickelung seiner Koordinatenmethode in den Schriften der Alten finden, besonders indem er sich bemüht, die Resultate zu beweisen, die sie uns hinterlassen haben, ohne daß die Beweise auf uns gekommen sind. Die selbständiger entwickelte Algebra setzt ihn sodann in den Stand, den gewonnenen Resultaten eine allgemeinere und kürzere Form zu geben. Als Hauptresultat stellt er zu Anfang der *Isagoge* die allgemeinen Sätze auf, daß eine Gleichung 1. Grades zwischen den Koordinaten eine Gerade, eine Gleichung 2. Grades im allgemeinen einen Kegelschnitt darstellt, und die Schrift zielt besonders auf den Beweis dieser Sätze ab.

Wie Fermat es nach und nach soweit gebracht hatte, ergibt sich teils aus einer früheren Schrift: *Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti,* teils aus seinem Briefwechsel. Die angeführte Schrift enthält Beweise für diejenigen Sätze, die durch Pappus aus der verschollenen Schrift des Apollonius über ebene Örter auf uns gekommen sind. Da die betreffenden teilweise recht einfachen Sätze über geometrische Örter, die eine Gerade oder ein Kreis werden (*τόποι ἐπίπεδοι*), vorlagen, so war für die meisten von ihnen noch keine besondere Methode erforderlich, um sie hinterher geometrisch zu beweisen. Nur in Bezug auf zwei hat die sehr allgemeine Form des aufgestellten Satzes einige Schwierigkeit bereitet; dies ist der Fall bei dem 7. Satze des 1. Buches, der besagt, daß der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einer beliebigen Anzahl von Geraden eine homogene Gleichung 1. Grades befriedigen, eine Gerade ist, und bei dem 5. des 2. Buches, nach welchem der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte eine gegebene Quadratsumme bilden, ein Kreis ist. So faßt wenigstens Fermat den wahren Sinn der etwas weitläufig dargestellten Sätze auf, obschon die 2. Stelle bei Pappus auch so verstanden werden kann, als ob daselbst eine allgemeine Gleichung 1. Grades zwischen den Quadraten der Entfernungen statthaben soll. Die überflüssige Beschränkung, daß im 7. Satze des 1. Buches die Gleichung homogen sein soll, stimmt hingegen mit Pappus' Angabe.

Die Schwierigkeit, die sich in diesem Satze insofern findet, als eine beliebige Anzahl gegebener Geraden vorkommt, überwindet Fermat in seinem Beweise durch eine allmähliche Erweiterung auf mehrere Gerade. Was den zweiten Satz betrifft, in dem es zu beweisen galt, daß der Ort eines Punktes ein Kreis ist, wenn die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von gegebenen Punkten gegeben ist, so gelingt es ihm in der ersten Schrift nur in dem Falle, wo alle die gegebenen Punkte in einer Geraden liegen, gleichfalls die Schwierigkeit zu beseitigen, die darin besteht, daß eine beliebige Anzahl von Punkten gegeben ist. Er erreicht es, indem er den gesuchten Punkt auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht, in welchem die Gerade durch die gegebenen Punkte die Abscissenachse ist, und die Abscissen der gegebenen Punkte positiv sind. Er findet sodann leicht, indem er die Quadrate der Entfernungen durch den pythagoreischen Satz bestimmt, daß auch der gesuchte Punkt eine konstante Entfernung von dem Punkte der Abscissenachse hat, dessen Abscisse das arithmetische Mittel der Abscissen der gegebenen Punkte ist.

Die Vorteile des Gebrauches von Koordinaten springen in diesem Falle so sehr in die Augen, daß Fermat sich veranlaßt fühlen mußte, dies Hilfs-

mittel auch anderweitig zu verwerten. Namentlich mußte er bald einsehen, daß sich, wie er selbst am Ende der *Isagoge* bemerkt, auf diese Weise „weit elegantere und allgemeinere Bestimmungen" der soeben genannten „ebenen" Örter aufstellen lassen als die, welche er selbst in seiner Restitution der Schrift des Apollonius gegeben hatte. Ebenso bemerkt er, daß man auf diesem Wege eine unendliche Reihe von anderen Resultaten finden kann, die sich denen des Apollonius zur Seite stellen lassen, und unter diesen nennt er ausdrücklich den allgemeineren Satz, zu dem man kommt, wenn man aus dem 7. Satze im 1. Buche des Apollonius die Voraussetzung tilgt, die Gleichung solle homogen sein.

Zugleich mußte er dazu angeregt werden, die nämliche Methode auf die von den Alten erwähnten „räumlichen" Örter (*τόποι στερεοί*; Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 212—216) anzuwenden, d. h. auf solche geometrische Örter, die Kegelschnitte werden, und namentlich auf die beiden von Apollonius so sehr hervorgehobenen, den „Ort zu 3 Geraden" und den „Ort zu 4 Geraden", d. h. auf den Ort der Punkte, welche eine der Gleichungen

$$x^2 = ayz \text{ und } xy = azu$$

befriedigen, wo a eine Konstante ist, x, y, z, u die Entfernungen des Punktes von den 3, bez. 4 Geraden sind. Ob diese Entfernungen übrigens auf den Geraden senkrecht stehen oder mit ihnen einen gegebenen Winkel bilden, ist dabei ganz unwesentlich. Mit diesen Ortsbestimmungen hat sich Fermat schon frühzeitig beschäftigt; sie waren bereits vor dem Erscheinen der Geometrie Descartes' Gegenstand brieflicher Mitteilungen, die von dem Kreise der Mathematiker zu Paris mit großem Interesse aufgenommen wurden. Wie auf die ebenen Örter, so wendete Fermat jedoch anfänglich auch auf diese geometrischen Örter speziellere Untersuchungen an. Seine erste Behandlung des für den mit Apollonius Vertrauten ziemlich leichten Ortes zu 3 Geraden gibt somit ganz die nämliche Bestimmung, die bei Apollonius selbst indirekt in einigen der Beweise enthalten ist, in denen wir eine Übereinstimmung mit der Erzeugung eines Kegelschnittes durch projektivische Büschel vorfanden (a. a. O. S. 209). Diese Behandlung nähert sich also der der analytischen Geometrie nur insoweit, als auch schon das Verfahren des Apollonius mit ihr verwandt ist. Als Fermat später dieselben Aufgaben mit Beziehung des beweglichen Punktes auf feste Koordinatenachsen zu behandeln suchte, mußte er bald einsehen, daß sich die Gleichungen der in Frage stehenden Örter quadratisch gestalteten. Es galt deshalb, nicht nur zu zeigen, daß eine solche Gleichung einen Kegelschnitt darstellt, sondern zugleich, eine genauere Bestimmung des Kegelschnittes zu erzielen.

Wir kennen somit die Vorgeschichte der *Isagoge* Fermats ganz gut. Er gibt in dieser Schrift kurz und klar eine vollständige Auseinandersetzung über die Bestimmung der Linien, die durch Gleichungen 1. und 2. Grades dargestellt werden, indem er speziell die Bedingung hervorhebt, unter welcher die Linie in letzterem Falle ein Kreis wird. Diese Auseinandersetzung umfaßt einerseits einen durch ähnliche Dreiecke geführten Beweis dafür, daß die Gleichung $ax = by$ eine Gerade durch den Ursprung darstellt, ferner eine Aufstellung der Gleichungen für den auf zwei senkrechte Durchmesser bezogenen Kreis, die auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel, die auf einen Durchmesser und die Tangente in dessen Endpunkt bezogene Parabel und die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Ellipse oder Hyperbel. Diese Kegelschnittgleichungen werden unmittelbar Apollonius entnommen. Andererseits werden mittelst Koordinatenänderungen andere Gleichungen 1. und 2. Grades auf die nämlichen Formen zurückgeführt. Wenn das Glied xy fehlt, wird dazu nur eine Verlegung des Anfangspunktes erfordert, was durchaus keine Schwierigkeiten verursachen konnte. Das Verfahren, nach dem man vorgehen muß, wenn die Gleichung ein Glied xy enthält, legt Fermat an folgendem Beispiel klar. Die Gleichung

$$2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

läßt sich umgestalten in

$$(x + y)^2 + x^2 = a^2.$$

Wenn man nun die Geraden $x + y = 0$ und $x = 0$ zu Koordinatenachsen wählt, so ist aus der Figur ersichtlich, daß die neuen Koordinaten $x_1 = x\sqrt{2}$, $y_1 = x + y$ werden, zwischen denen folgende Gleichung besteht:

$$\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2,$$

die nach Apollonius ausdrückt, daß die Kurve eine Ellipse mit den neuen Koordinatenachsen als konjugierten Durchmessern ist. Da es hierbei nur von Bedeutung ist, daß die so an drei Stellen auftretende Größe 2 konstant (*data*) ist, so wird der Beweis Fermats auch auf andere Gleichungen als die hier beispielsweise gewählte anwendbar.

Fermat vernachlässigt nicht einmal die homogene Gleichung 2. Grades in x und y. Was diese betrifft, setzt er freilich voraus, daß die Kurve außer dem Anfangspunkt noch einen Punkt enthält: er zeigt dann, daß sie zugleich die ganze Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten enthält.

Wir finden somit bei Fermat eine schon recht vollständige Erörterung der Gleichungen 1. und 2. Grades in ebenen Parallelkoordinaten; es ist

jedoch zugleich hervorzuheben, daß er seine beginnende analytische Geometrie in dem schwierigsten Punkte dieser Erörterung noch auf die Geometrie der Alten bauen muß. Wenn es nämlich als eine bekannte Sache betrachtet wird, daß Gleichungen von der Form

$$Ax^2 \pm By^2 = C$$

auch dann einen Kegelschnitt darstellen, wenn die Koordinaten schiefwinklig sind, so ist dabei vorausgesetzt, daß man es hier mit den nämlichen Kurven zu tun hat, wie wenn der Winkel zwischen den Koordinatenachsen ein rechter ist, oder daß sich stets unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser finden, von denen eins rechte Winkel bildet. Diese Voraussetzung entlehnt also Fermat noch dem Apollonius, und Descartes tut in seiner Geometrie ganz dasselbe.

Die Bestimmung geometrischer Örter stand bei den Alten in der engsten Verbindung mit ihrer Anwendung zur Erörterung und Lösung geometrischer Aufgaben oder algebraischer Aufgaben in geometrischer Form, indem man dazu den Schnitt zwischen geometrischen Örtern, besonders aber den Schnitt zwischen Kegelschnitten zur Lösung derjenigen Aufgaben benutzte, die von Gleichungen 3. und 4. Grades abhängig sein würden. Obgleich beim Aufkommen der analytischen Geometrie die Algebra bessere und rein algebraische Mittel zur direkten Behandlung solcher Gleichungen besaß, mußte man doch bemerken, daß die neuen algebraischen Koordinatenmethoden eben für die altmodische geometrische Behandlung der Aufgaben große Vorteile boten. Wir sehen denn auch sowohl Fermat wie Descartes und andere, z. B. de Sluse, die analytische Geometrie eifrig dazu verwenden, solche Kegelschnitte zu finden, die für die Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades besonders geeignet sind, indem die Wurzeln der Gleichungen als Abscissen der Durchschnittspunkte bestimmt werden. Da dies nur eine Vervollkommnung eines Auflösungsverfahrens ist, das im Begriffe war, seine Bedeutung zu verlieren, wollen wir uns in dieser Beziehung mit der Bemerkung über Fermat begnügen, daß er wohl einsah, daß eine solche Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades — die nur darin bestehen konnte, mittelst einer Beziehung 2. Grades zwischen der Unbekannten x und einer neuen Unbekannten y, z. B. $x^2 = ay$, die gegebene Gleichung in x auf eine Gleichung 2. Grades in x und y zurückzuführen — auf unendlich viele Weisen, darunter auch in einer solchen Art ausführbar sei, daß die Lösung der Gleichung durch den Schnitt zwischen einer Parabel und einem Kreise bestimmt werde. Auch dies zeugt von der Freiheit, mit der er seine Koordinaten zu handhaben verstand. Wir werden später seine Verbesserungen der Descartesschen Auflösungen von Gleichungen höheren Grades durch Kurven höherer Ordnung zu besprechen haben.

Fermat hat auch teils in Briefen, teils in einer kleinen Schrift *Isagoge ad locos ad superficiem* seine analytische Geometrie zur Bestimmung geometrischer Örter im Raume angewendet. Dabei verwendet er jedoch nicht Raumkoordinaten, sondern bestimmt die Flächen, indem er die Beschaffenheit ihrer Schnittkurve mit einer beliebigen Ebene erforscht. Er hebt in dieser Beziehung mit besonderer Vorliebe folgende Erweiterung desjenigen Satzes auf den Raum hervor, den er zuerst durch analytische Geometrie bewiesen hatte: der Ort eines Punktes, der so bestimmt ist, daß die Quadrate seiner Entfernungen von festen Punkten im Raume eine gegebene Summe bilden — oder, was ein allgemeinerer Fall ist, eine Gleichung 1. Grades erfüllen —, ist eine Kugelfläche. Die Quadrate der Projektionen der Entfernungen von den festen Punkten bis zu den Punkten des Ortes, die in einer festen Ebene liegen, auf diese Ebene erfüllen nämlich sodann eine Gleichung von derselben Form, so daß der Schnitt der Ebene ein Kreis ist. Auf ähnliche Weise findet er, daß der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von festen Ebenen eine Gleichung 1. Grades erfüllen, eine Ebene ist. Erfüllen letztere Entfernungen eine Gleichung 2. Grades, so wird der Ort eine Fläche, die jede Ebene in einem Kegelschnitt oder in Geraden schneidet. In dieser Beziehung herrscht jedoch bei Fermat einige Unsicherheit, da er Flächen 2. Ordnung wesentlich nur durch Archimedes kennt. Wenn er sich auch nicht wie dieser damit begnügt, Drehungsflächen zu betrachten, und wenn er auch elliptische und hyperbolische Cylinder mit heranzieht, so bemerkt doch auch er das Dasein von elliptischen Hyperboloiden und von hyperbolischen Paraboloiden nicht. Auch bemerkt er nicht, daß der Ort der Punkte, deren Entfernungen x, y, z von drei Ebenen die Gleichung $xy = az^2$ erfüllen (Erweiterung des Ortes zu 3 Geraden auf den Raum) eine Kegel- oder Cylinderfläche ist.

Die „Symptome“ von Kurven bei den Alten waren nicht immer nur solche, die in Worten dasselbe ausdrücken, wie eine algebraische Gleichung zwischen rechtwinkligen Koordinaten oder Parallelkoordinaten, sondern auch solche, durch die die Kurve, wie die Spirale des Archimedes, auf Polarkoordinaten oder, wie die Quadratrix (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 78 u. 76), auf ein Gemisch von rechtwinkligen und Polarkoordinaten bezogen wird. Besonders Polarkoordinaten wurden auch im Anschluß an Archimedes angewendet, als man in der neueren Zeit seine Infinitesimaluntersuchungen wieder aufnahm; man setzte sodann die Resultate miteinander in Verbindung, die in diesen und in rechtwinkligen Koordinaten in ähnlicher Weise ausgedrückt wurden. Dies haben wir später näher zu besprechen; hier soll einstweilen erwähnt werden, daß Gregorius von St. Vincentius in seinem *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum*

coni, das allerdings erst 1647 erschien, dessen Ausarbeitung aber der Zeit vor der Herausgabe der Geometrie Descartes' angehört, diese Transformationsmethode auch anderweitig verwertete. Er vergleicht nämlich die verschiedenen Eigenschaften der Archimedesschen Spirale

$$r = \frac{\vartheta}{2\pi} a,$$

wo r und ϑ Polarkoordinaten sind, mit denen der Parabel

$$x^2 = 2py = \frac{a}{2\pi} y,$$

deren in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten bestimmte Punkte (x, y) derart mit den Punkten (r, ϑ) verbunden sind, daß

$$x = r, \; y = r\vartheta.$$

Er deutet also verschiedene Sätze des Archimedes von der Spirale um und findet dadurch Sätze von der Parabel. Es sind allerdings nur solche, die sich leicht aus der Gleichung der Parabel selbst herleiten lassen, indem man diese nur in $x = 2p \frac{y}{x}$ umschreibt. Am meisten Interesse erwecken diejenigen, die an infinitesimale Untersuchungen anknüpfen, wie die gleichartige Bestimmung der Größe, die wir jetzt die Polarsubtangente einer Spirale nennen, und der Subtangente einer Parabel, sowie eine, wie wir sehen werden, auch von anderer Seite gefundene Zusammenstellung der Quadraturen der beiden Kurven. Wie einfach dies alles auch ist, so war damit doch eine glückliche Bahn betreten. Wir werden sehen, daß Gregorius auch in anderen Beziehungen an und für sich einfache Resultate erzielt, die jedoch bald unter den Händen anderer einen großen Ertrag liefern sollten.

12. Die Geometrie Descartes'.

In seinem *Aperçu historique sur les Méthodes en Géométrie* zollt Chasles den Fortschritten, die durch die 1637 erschienene *Géométrie* Descartes' bezeichnet sind, seine Anerkennung, indem er die in diesem Werke dargestellten Gedanken als *proles sine matre creata*, als Kinder bezeichnet, die keiner Mutter entsprungen sind.

Zuviel Lob hat er ihm dadurch nicht gespendet. Diese Gedanken, die vor denen, die bisher die Entwickelung der Mathematik getragen hatten, den Vorzug besaßen, nach und nach in viel weitere Kreise vorzudringen und diese an Schätzen, die bisher nur den größten Geistern vorbehalten gewesen waren, ja, sogar an der Vermehrung dieser Schätze teilnehmen zu lassen, bezeichnen eben deshalb in der Entwickelung der Mathematik den Übergang zu einer neuen Epoche. Nichtsdestoweniger scheint uns der Aus-

druck Chasles' ganz irreleitend. Wir führen gerade diesen Ausdruck vielmehr als scharfen Gegensatz zu der Auffassung an, die hier geltend gemacht werden soll; eben, um unsere Auffassung zu verdeutlichen, gedenken wir hier der bekannten Worte Chasles' und bieten unser eigenes Urteil als eine Widerlegung derselben. Dadurch wollen wir uns jedoch keineswegs zu dem berühmten Werke Chasles' im allgemeinen in Widerspruch setzen. Das große Verdienst dieses Werkes besteht darin, die zu seiner Zeit außerordentlich wenig beachtete geschichtliche Entwickelung der besonders geometrischen Methoden, namentlich aber den Teil dieser Entwickelung hervorgehoben zu haben, der auf die moderne Geometrie Bezug hat, zu deren vorzüglichsten Vertretern er selbst gehört. So hat wesentlich er unsere Zeit mit den Arbeiten Desargues' bekannt gemacht. Der Einfluß der Geometrie Descartes' erstreckte sich dagegen auf die ganze Mathematik und war allgemein bekannt. Mit ihm brauchte sich Chasles deshalb nicht besonders zu beschäftigen. Die angeführten Worte sollen denn auch zunächst nur zu erkennen geben, daß er die außerordentliche Bedeutung des Werkes Descartes' und die Neuheit der dadurch hervorgerufenen Bewegung völlig einsah.

Als keiner Mutter Kind kann man, wie wir gesehen haben, eher die projektivische Geometrie Desargues' bezeichnen; eben deshalb war sie auch nicht geeignet, Frucht zu bringen; sie war selbst gewissermaßen eine unfruchtbare Mutter. Die Geometrie Descartes' dagegen war wohl vorbereitet, und diese Vorbereitung hatte in einer derartigen Bearbeitung des ganzen mathematischen Erdbodens bestanden, daß die neuen Gedanken Descartes' alsbald reiche Frucht tragen konnten.

Als mutterloses Kind wird man am allerwenigsten die analytische Geometrie Descartes' im engeren Sinne ansehen dürfen, da wir soeben ihre Zwillingsschwester, die analytische Geometrie Fermats, und ihren Ursprung kennen gelernt haben. Fermats und Descartes' gleichzeitige Anwendungen von mit der Algebra verbundenen Koordinaten waren einander ungefähr ebenbürtig, wenn man nur die Größe der eigentlichen mathematischen Schwierigkeiten in Betracht zieht, die sich dadurch überwinden lassen. Es mußte sich somit in der Geometrie Descartes' noch etwas anderes finden, was gerade die weitgreifenden Folgen haben konnte, auf die wir hingedeutet haben. Die Ursache davon hat man nämlich keineswegs nur in dem mehr zufälligen Umstande zu suchen, daß die Arbeit Descartes' lange vor der Fermats herausgegeben wurde. Hatte dieser doch bereits vor der Herausgabe der Geometrie Descartes' Mitteilungen über seine analytisch-geometrischen Untersuchungen an den Kreis gelangen lassen, in welchem er am ehesten Anschluß erwarten konnte und in der Tat auch hohe Anerkennung gewann, an den der Pariser Mathematiker.

In Descartes' Geometrie werden Gedanken vorgetragen, die nicht allein auf eine so fruchtbare Anwendung der Algebra auf die Geometrie abzielen wie die eigentliche sog. analytische Geometrie; vielmehr kehren sie das hergebrachte Verhältnis zwischen Algebra und Geometrie geradezu um und bezeichnen so eine Reform der ganzen Mathematik, die bisher ihre anerkannte Grundlage in der Geometrie gehabt hatte, von nun an aber in der Algebra erhielt. Diese konnte daher fürderhin nicht umgekehrt wieder auf die Geometrie bauen, sondern mußte selbständig und unmittelbar als allgemeines Organ der Arithmetik und des Rechnens auftreten. Diese Reform ist gewissermaßen durch die ganze vorhergehende Entwickelung vorbereitet. Ein Teil dieser Vorbereitung, den wir schon bei der Besprechung der analytischen Geometrie Fermats berührt haben, findet sich bereits in der Entwickelung der Verbindung zwischen Geometrie und Algebra, die man, jedoch in umgekehrter Weise, zuerst in der geometrischen Algebra aufgestellt hatte. Hinzukommen mußte noch die Entwickelung der Rechenkunst und der Hilfsmittel der Algebra selbst, besonders ihrer Zeichensprache, die vor allem vonnöten war, um der Algebra auch wirklich sowohl in logischer wie in technischer Beziehung die notwendige Unabhängigkeit von der durch die Leistungen der Vorzeit so reich ausgestatteten Geometrie zu sichern. Auf diese Entwickelung haben wir schon im vorhergehenden überall hingewiesen. Die arithmetische Auffassung der Algebra, die in den algebraischen Operationen nur einen Ausdruck arithmetischer Rechnungen sieht, ist bereits öfters hervorgetreten: die Inder kannten gar keine andere Auffassung; man trifft sie weiterhin bei einzelnen arabischen Schriftstellern an, und von Neueren macht sie z. B. Simon Stevin geltend (S. 96). Sie ist wohl auch da im Spiele, wo man sich noch logisch verpflichtet fühlte, die allgemein gültigen Operationen geometrisch aufzufassen. Aber erst bei und durch Descartes erlangt die auf die Arithmetik gebaute Algebra eine solche Entwickelung, daß er ihr und den großen Erleichterungen, die sie mit sich führt, als exakter und allgemein anwendbarer Methode volle Anerkennung verschaffen kann.

Um recht zu sehen, worin der von Descartes herrührende Fortschritt besteht, muß man seine Auffassung der Algebra und seine algebraischen Hilfsmittel mit denen Vietas vergleichen; denn, wenn man auch schon in Vietas algebraische Sprache Verbesserungen eingeführt hatte, indem man z. B. seine Bezeichnung der Potenzen durch besondere Wörter, wie *quadratum*, *cubus* u. s. w., durch Wiederholung des gleichen Faktors, also *A cubus* durch *A A A*, ersetzte, so wurde doch von den bedeutendsten Schriftstellern, wie namentlich von Fermat, in der Hauptsache immer noch die Algebra Vietas zu Grunde gelegt. Wir haben zudem daran zu erinnern, daß

Vieta zwar tatsächlich die Zeichensprache durchweg zum Ausdrucke von Rechnungen verwendete, doch aber noch überall da zu geometrischen Deutungen seine Zuflucht nehmen zu müssen glaubte, wo für die allgemeine Gültigkeit volle Sicherheit erfordert wurde. Dementsprechend haben wir auch Desargues die algebraische Involutionstheorie, die seinen geometrischen Untersuchungen zu Grunde gelegt werden sollte, auf Euklid aufbauen sehen (S. 182). Gerade wegen der damit verbundenen Schwierigkeit hält Descartes in einem Briefe Desargues vor, daß es weit mehr Leute gebe, die wüßten, was Multiplikation ist, als Leute, die wüßten, was Zusammensetzung von Verhältnissen sei.

Descartes sah also klar ein, daß eine verständliche und leicht zu gebrauchende Algebra ihren Ausgangspunkt in den arithmetischen Rechnungen finden müßte, nicht aber in geometrischen Operationen und Formen wie etwa denjenigen, durch welche bisher die Lehre von den Proportionen mit der Geometrie verbunden gewesen war. Diesen neuen Ausgangspunkt hebt er auf den ersten Seiten seiner Geometrie deutlich und bestimmt hervor. Wenn er auf diesen Seiten sagt, was man in der Geometrie zu tun habe, so heißt dies dasselbe, wie die Grundlage der allgemeinen Mathematik aufstellen, da diese bislang in der Geometrie ihren vollkommensten Ausdruck gefunden hatte.

Descartes beginnt mit der Bemerkung, daß alle geometrischen Probleme sich auf die Längenbestimmung von Strecken zurückführen lassen. „Wie die ganze Arithmetik nur aus 4—5 Operationen, nämlich Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelausziehung besteht, so ist in der Geometrie, um die Strecken zu finden, die man sucht, nur vonnöten, andere hinzuzufügen oder abzuziehen; oder, wenn man eine Strecke, die ich, um sie desto besser mit den Zahlen zu verknüpfen, als Einheit bezeichnen will, und die man im allgemeinen nach Belieben wählen kann, außerdem aber zwei andere hat, eine vierte zu finden, die sich zu der einen von beiden verhält wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist wie die Multiplikation; oder eine vierte zu finden, die sich zu der einen von beiden verhält wie die Einheit zu der anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder schließlich eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen zu der Einheit und einer anderen Strecke zu finden, was dasselbe ist wie die Quadratwurzelausziehung u. s. w. Und ich trage kein Bedenken, um mich besser verständlich zu machen, diese arithmetischen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen."

In dieser Einleitung, deren Sperrungen sich jedoch nicht bei Descartes finden, gibt er allgemeine, von der Rationalität der Größen unabhängige Definitionen der arithmetischen Operationen: Multiplikation,

Division und Wurzelausziehung. Die allgemeine Gültigkeit wird allerdings nur dadurch erreicht, daß diese Definitionen auf der bisher zur Geometrie gehörigen Lehre von den Proportionen aufgebaut werden; einerseits wird aber diese Anleihe nur ein für allemal gemacht, während man früher bei neuen Untersuchungen immer wieder zur Geometrie seine Zuflucht nehmen mußte, andrerseits läßt sich die Lehre von den Proportionen leicht der geometrischen Form entkleiden. Wenn nun Descartes demnächst mathematische Formeln anwendet, so ist es von Anfang an vollkommen klar, daß die in ihnen dargestellten Multiplikationen u. s. w. den gegebenen gemeingültigen Definitionen gemäß aufgefaßt werden sollen. Diese Formeln erhalten übrigens immer einen Sinn, mögen sie nun rücksichtlich der in ihnen enthaltenen Strecken homogen sein oder nicht. Im ersteren Falle sind sie von der Wahl der Einheit unabhängig, im letzteren entsprechen sie, wie Descartes selbst hervorhebt, einer ganz bestimmten Einheit. Größen, wie a^2, b^3 nennt er zwar in Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch Quadrat und Kubus; er bemerkt aber ausdrücklich, daß auch sie als Strecken aufgefaßt werden können. Die geometrische Bezeichnung von Größen hat sich so allerdings auch bei ihm erhalten; sie wird aber, wie man sieht, nicht anders angewendet, als heutigen Tages der Begriff der Zahl. Die Verbindung mit der Geometrie, die überdies stets notwendig ist, wenn die Algebra auf geometrische Aufgaben angewendet werden soll, wird jedoch durch ausdrückliche Angabe der Konstruktionen aufrecht erhalten, durch welche die beschriebenen algebraischen Operationen geometrisch ausgeführt werden.

Nach der Aufstellung dieser Voraussetzungen finden sich S. 3—4*) allgemeine Regeln für die analytische Auflösung einer Aufgabe: Man betrachte die Aufgabe als gelöst und gebe jeder der darin enthaltenen bekannten wie unbekannten Größen ihre Bezeichnung. Ohne zwischen ihnen irgend welchen Unterschied zu machen, benutze man das Gegebene, um eine und dieselbe Größe auf 2 verschiedene Weisen auszudrücken, wodurch man eine Gleichung erhält. Man bilde so viel Gleichungen, als man Unbekannte hat. Läßt sich das nicht bewerkstelligen, so ist die Aufgabe unbestimmt, und man darf sodann einen Teil der Größen beliebig wählen. Darauf wird die weitere algebraische Behandlung skizziert.

Bevor wir indes genauer besprechen, wie Descartes seine Regeln anwendet, und besonders, aus welcher Veranlassung und unter welcher Form bei ihm der Gebrauch von Koordinaten auftritt, wollen wir seine technischen Hilfsmittel, namentlich aber die Zeichensprache, die er zu seiner

*) Ich citiere nach der bei A. Hermann 1886 erschienenen französischen Ausgabe.

Verfügung hatte, und ihren Gebrauch betrachten. Für die Durchführung seiner Neuerung genügte es nämlich nicht, daß er ihre logischen Voraussetzungen durch Anleihen bei der Lehre von den Proportionen sicher stellte. Um ganz von dem geometrischen Untergrunde losgetrennt zu werden, mußte die auf das Rechnen begründete Algebra selbst die nötigen, bequemen Hilfsmittel besitzen.

Die Zeichensprache war, wie wir gesehen haben, in der Tat zur Zeit Descartes' so entwickelt, daß er sie bei zweckmäßigem Gebrauche des Vorhandenen und nach einer einzigen Verbesserung wohl benutzen konnte, um in anschaulicher Weise alle algebraischen Operationen nicht nur darzustellen, sondern auch auszuführen. Die erwähnte Verbesserung bestand in der Einführung der jetzt gebräuchlichen Bezeichnung der Potenz. Sie sollte bald nach Descartes benutzt werden, um den Exponenten eine beliebige, ja, eine fortwährend variierende Größe sein zu lassen, so daß man z. B. bei der Erklärung der Logarithmen der Zusammenstellung einer geometrischen und einer arithmetischen Reihe entraten konnte. In dem Werke Descartes' selbst aber verleiht sie allen Formeln und den dadurch ausgeführten Operationen eine solche Einfachheit und Anschaulichkeit, daß man ihnen mit derselben Leichtigkeit wie den algebraischen Operationen irgend eines modernen Buches folgen kann. Seine Zeichensprache weicht tatsächlich von der der Gegenwart nur darin ab, daß er noch keine Wurzelexponenten kennt, sondern z. B. die Kubikwurzel durch $\sqrt{C\cdots}$ ausdrückt, ferner durch eine andere Form des Gleichheitszeichens und schließlich dadurch, daß von den Buchstaben, die bei ihm durch die Bank rationale und irrationale Größen bedeuten, stets vorausgesetzt wird, daß sie positive Größen bezeichnen (S. 99). So wendet er, um negative Wurzeln zu vermeiden, S. 5 dieselbe Umschreibung der Gleichung an wie Vieta, und betrachtet er auch die durch Buchstaben dargestellten bekannten Größen als positiv. Eine Gleichung 4. Grades mit vollständig beliebigen [reellen] Koeffizienten [das Glied 3. Grades ist weggeschafft] schreibt er daher S. 66

$$+ x^4 \cdots px^2 \cdots qx \cdots r \infty 0,$$

wo die Punkte entweder + oder − bedeuten. Erst Hudde hat (1658) in einem Anhang zur Geometrie Descartes', dessen Inhalt wir später zu besprechen haben, die Koeffizienten, die Vorzeichen mit eingerechnet, durch einzelne Buchstaben wie p, q, r bezeichnet und somit eine ganz allgemein gültige algebraische Behandlung durchgeführt.

Wenn wir im vorhergehenden andere Schriftsteller eine Zeichensprache haben anwenden sehen, die in vielen Beziehungen der Descartes' nahe stand, ja, wenn wir vom Altertum her Schriftsteller ohne jegliche Zeichen-

sprache Gedankengänge haben ausdrücken sehen, die wir durch diese Zeichensprache haben darstellen müssen, wenn wir ferner gesehen haben und im folgenden noch sehen werden, wie Fermat verwickeltere und tiefer liegende Schwierigkeiten überwindet als Descartes, und wenn wir ihn schließlich eine analytische Geometrie ohne Zuhilfenahme anderer algebraischer Hilfsmittel als der damals schon vorliegenden haben ausarbeiten sehen, so kann man sich vielleicht versucht fühlen, die Fortschritte zu gering anzuschlagen, die hier an die Spitze der ganzen mathematischen Tätigkeit Descartes' gestellt sind. Die Bedeutung dieser Fortschritte wird indes gerade dadurch verständlich, daß wir so oft zu der von Descartes durchgeführten algebraischen Form haben unsere Zuflucht nehmen müssen, um Gedanken so vieler älterer Schriftsteller verständlich zu machen, was wir sonst in einigermaßen kurzer und anschaulicher Form schwerlich hätten fertig bringen können. Wir haben es tun können, teils weil die Auffassung und Behandlung der Algebra durch Descartes sich als gut genug bewährt hat, um dermaßen durchzudringen, daß sie heutigen Tages schon vom Elementarunterricht der Schule her bekannt ist, teils weil sie schon an und für sich zu manchem, was früher mit großer Weitläufigkeit dargestellt werden mußte und nur fähigeren Mathematikern zugänglich war, in so hohem Grade den Weg geebnet hat. Wir müssen indes davor warnen, die Gedankengänge, die wir nur mittelst der algebraischen Sprache haben darstellen können, deren Bildung Descartes zu einem gewissen Abschluß gebracht hat, mit dieser Sprache und diesen Hilfsmitteln zu verwechseln, die wir deshalb nicht weniger bewundern, weil die nämlichen Gedanken seinerzeit ohne sie festgehalten wurden. Dies wäre eine Ungerechtigkeit auch gegen Descartes, durch den sie erst zu voller Entwickelung und voller Anerkennung gelangten, so daß sie jetzt unter der Hand eines jeden, der sich nur die nötige Fertigkeit in ihrer Handhabung aneignet, nutzbar geworden sind.

Diese Fertigkeit ist indessen vonnöten, und das Werk Descartes' selbst zielt nicht unmittelbar auf Einübung in ihr ab. Die Methoden sind nämlich im wesentlichen nur aus dem Gebrauch ersichtlich, den er selbst von ihnen macht, und zu dem er mehr nur orientierende Bemerkungen als ausführliche Erläuterungen gibt. Vieles nimmt sich Descartes gar nicht die Zeit vollständig durchzuführen; er fordert die Leser einfach auf, selbst ihre Kräfte daran zu üben. Ja, wie er selbst bemerkt, hat er sogar Teile seiner Geometrie mit guter Absicht schwerer verständlich gemacht, damit eben diejenigen, die etwa selbst glaubten, das nämliche leisten zu können wie er, sein Eigentum nicht ohne weiteres sollten benutzen dürfen.

Wenn seine Methoden dennoch durchdrangen, so beruht dies teilweise

wohl darauf, daß sie in seinem Buche den Kundigen zugänglich genug waren und von ihnen nachher weiter verbreitet werden konnten; teils ist auch unter den Augen Descartes' selbst eine „Einleitung" zu seiner Geometrie ausgearbeitet worden, die zwar nicht herausgegeben wurde, aber, da sie gleich nach der Veröffentlichung der Geometrie 1637 an Mersenne übersandt wurde, doch die nötige Verbreitung gewann. Hier finden sich zuvörderst detaillierte Regeln für das Buchstabenrechnen in der durch Descartes erweiterten Zeichensprache; denn deren geläufige Einübung war nötig, um die Zeichensprache zu Berechnungen anwenden zu können, und ermöglichte es überhaupt erst, in dieser Sprache sichere mathematische Schlußfolgerungen zu ziehen. Die Regeln, wie man die Aufgaben als Gleichungen zu gestalten habe, sind hier auch weit vollständiger gegeben als in seiner Geometrie. Ferner wird hier auch seine algebraische Geometrie („analytische Geometrie") vollständiger erläutert als in seiner Geometrie (auf deren Darstellung wir gleich zu reden kommen), und die algebraischen Methoden werden sodann auf einige trigonometrische und geometrische Aufgaben angewendet, darunter auch auf die später von Fermat behandelte (S. 189), eine Kugel zu bestimmen, die 4 andere Kugeln berührt.

Hauptsächlich sind es die neue arithmetische Grundlage der Algebra und die große Entwickelung der beim algebraischen Rechnen angewendeten Hilfsmittel, die dem Descartesschen Gebrauch von Koordinaten einen von dem der Alten, ja, sogar von dem Fermats ganz verschiedenen Charakter verleihen. Die geometrischen Operationen werden in viel vollständigerer Weise in Rechnungen umgesetzt. Descartes stellt jedoch in seiner Geometrie nicht selbst allgemeine Regeln für die analytische Geometrie auf. Er zeigt sie mehr an der Behandlung der Aufgaben selbst, wodurch ihre Überlegenheit über ältere Behandlungsweisen deutlicher zum Vorschein kommt. Wie außerordentlich groß diese Überlegenheit auch ist und während der späteren Entwickelung der Mathematik noch werden sollte, so überschätzt sie Descartes doch selbst, wenn er S. 7—9 die Arbeiten der Alten in ganz oberflächlicher Weise herabwürdigt, auf die er selbst sich doch in so vielen Fragen stützt, und die doch die Resultate enthalten, deren Begründung wiederherzustellen er sich ja zur Aufgabe machte. Dazu gehörte auch für ihn zuvörderst, daß der Ort zu 3 und 4 Geraden (S. 197) ein Kegelschnitt ist; er verband aber damit sofort die Anwendung seiner analytischen Geometrie, um auch die Örter zu mehr als 4 Geraden zu finden, die bei Pappus erwähnt werden (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 237). Es sind dies Örter von Punkten solcher Art, daß das Produkt ihrer Entfernungen von n Geraden zu dem Produkte ihrer Entfernungen von n oder $n - 1$ anderen Geraden in einem konstanten Verhältnis steht. Eine solche Kurve findet er

durch eine Gleichung n^{ten} Grades dargestellt, indem er S. 10—13 eine der Geraden zur Abscissenachse und die Entfernungen von dieser zu Ordinaten wählt. Da die Entfernungen unter einem beliebigen Winkel gegen die Geraden genommen werden, so sind die Koordinaten im allgemeinen nicht rechtwinklig. Für die Entfernungen von den übrigen Geraden lassen sich durch trigonometrische Berechnung Ausdrücke 1. Grades finden. Descartes hebt nicht nur den Grad n der Gleichung in x und y hervor, sondern S. 13—14 auch, daß sie für einen Ort zu $2n-1$ Geraden, wenn y die Entfernung von einer der n ersten bezeichnet, in Bezug auf x nur vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade sein wird, so daß es z. B. eine „ebene", d. h. eine mittelst Zirkels und Lineals lösbare Aufgabe (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 212) wird, Punkte eines Ortes zu 5 Geraden zu finden. Daß er auch bemerkt haben sollte, es sei eine „ebene" Aufgabe, Punkte eines Ortes zu 6 Geraden zu konstruieren, indem die Punkte als Durchschnittspunkte mit Geraden durch den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden aus je einer der beiden Gruppen bestimmt werden könnten, läßt sich nicht erwarten.

Das hier Dargelegte findet sich im 1. der 3 Bücher seiner Geometrie. Im 2. Buche werden die krummen Linien, von denen die gefundenen Örter eine Probe geben, eingehender erörtert. Obgleich Descartes selbst nicht damit anfängt, wollen wir erst kurz angeben, wie er S. 21—26 nachweist, daß eine Gleichung 2. Grades einen Kegelschnitt darstellt, also auch, daß die Örter zu 3 oder 4 Geraden, deren Gleichungen 2. Grades sind, Kegelschnitte sind. Durch Auflösung der Gleichung in Bezug auf y findet er einen Ausdruck von der Form

$$y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + e}.$$

Hierin ist $y - ax - b$ selbst die mit einer Konstanten multiplizierte Entfernung von einer Geraden, und die Größen x sind mit den Strecken proportional, welche die Ordinaten auf dieser Linie abschneiden (Vgl. Fermat, S. 198). In einem neuen Koordinatensystem mit der Linie $y = ax + b$ als Abscissenachse und derselben Ordinatenrichtung wie vorhin wird deshalb die Kurve durch eine Gleichung von der Form

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C$$

darzustellen sein, die leicht auf die Formen zu bringen ist, die nach Apollonius einen Kegelschnitt darstellen, der in Bezug auf die Ordinaten die neue Abscissenachse zum Diameter hat. Nur wird die Darstellung Descartes' weitläufiger, teils dadurch, daß er die zur Verlegung des Anfangspunktes in den Mittelpunkt erforderlichen Rechnungen tatsächlich ausführt, teils dadurch, daß er zwischen den 3 Kegelschnitten sondert und ihre zu den konjugierten Diametern gehörigen Parameter bestimmt. Descartes

fügt ferner S. 26—28 der analytischen Bestimmung eine Synthese hinzu, in der bewiesen wird, daß die gefundenen Kurven wirklich die angegebene Eigenschaft besitzen. Dieser Beweis wird mittelst derselben Rechnungen geführt wie die Analyse, durch welche die Gleichungen der Kurven zuerst aus diesen Eigenschaften hergeleitet worden sind, indem sie nun natürlich in der entgegengesetzten, der Synthese entsprechenden Ordnung ausgeführt werden. Wie man sieht, führt Descartes seine Analyse nicht weiter zurück als Fermat, gründet aber wie dieser seine Erörterungen auf die Apollonische Beziehung eines Kegelschnittes auf ein Paar beliebiger konjugierter Durchmesser.

Mit vollem Rechte legt Descartes großes Gewicht auf den allgemeinen Überblick über alle die algebraischen oder, wie er sie nennt, die geometrischen Kurven, den man durch die analytische Geometrie erhält, und auf die damit verknüpfte Einteilung nach dem Grade der Gleichung, die zu ihrer Darstellung dient. Die Ehre für die angeführte Einteilung, durch die nicht etwa einzelne, sondern alle algebraischen Kurven einer stets weitergehenden Untersuchung unterworfen werden können, gebührt daher Descartes, wenn auch zu rügen ist, daß er S. 18 und 20 die durch eine Gleichung des Grades $2n-1$ oder $2n$ dargestellten Kurven zu einem Geschlecht (*genre*), dem n^{ten}, vereinigt. Verleitet wird er dazu übrigens durch die unrichtige Voraussetzung, daß sich, ebenso wie man eine Gleichung 4. Grades in einer Unbekannten (hier also in den Ordinaten) auf eine Gleichung 3. Grades zurückführen könne, so auch eine Gleichung 6. Grades auf eine Gleichung 5. Grades zurückführen lasse u. s. w. Auch irrt sich Descartes, wenn er S. 21 annimmt, daß man jede Kurve seines n^{ten} Geschlechts als Ort zu $4n$ Geraden herstellen könne. Hätte er darin recht, so würde schon Pappus eine alle algebraischen Kurven umfassende Bestimmung aufgestellt haben.

Da sich Descartes bei Kurven 2. und höheren Geschlechtes (3. und höherer Ordnung) nicht auf allgemeine, alle derartigen Kurven umfassende Erörterungen einlassen kann, so sucht er namentlich teils solche Kurven auf, deren Konstruktion sich einigermaßen leicht mechanisch bewerkstelligen läßt, teils solche, die als die einfachsten Beispiele von Kurven des betreffenden Geschlechtes betrachtet werden können. Diese Forderungen werden beide durch die Kurve

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$$

erfüllt, die einerseits, wie er Seite 30 zeigt, der Ort zu 5 Geraden ist, von denen 4 parallel und äquidistant sind, nämlich $x = 0$, $y = -a$, $y = 0$, $y = a$, $y = 2a$, andererseits zu einer Klasse von Kurven gehört, die durch

das allgemeine Herstellungsverfahren konstruiert werden können, das er S. 18 folgendermaßen klarlegt:

Eine Gerade drehe sich um einen festen Punkt $(0, b)$. In unveränderlicher Verbindung mit dem Durchschnittspunkt dieser Geraden und der Abscissenachse wird eine Kurve $[f(x', y) = 0$, wo wir die Abscisse x' von dem Durchschnittspunkte mit der Abscissenachse aus rechnen wollen] mit der Abscissenachse parallel verschoben. Die gesuchte Kurve sei der Ort des Durchschnittspunktes der sich drehenden Geraden und der beweglichen Kurve. Ihre Gleichung findet man, indem man in die Gleichung der beweglichen Kurve $x' = \frac{xy}{b-y}$ einsetzt. Man findet sodann S. 30 obenstehende Gleichung, wenn $b = 2a$ und die bewegliche Kurve die Parabel $y^2 = a(a - x')$ ist. Verallgemeinerungen der so konstruierten Kurve erhält Descartes teils durch Beziehung auf schiefwinklige Koordinaten, teils indem er den festen Geraden verschiedene Entfernungen voneinander beilegt. Das Herstellungsverfahren ist offenbar der Herstellung einer Konchoide entlehnt, indem die bewegliche Kurve sodann ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkt der sich drehenden Geraden und der Abscissenachse liegt. Wird die bewegte Kurve durch eine Gerade ersetzt, so erhält man eine Hyperbel, deren Gleichung Descartes aufstellt. Dagegen begeht er S. 20 einen Irrtum, der jedoch, da er die Bildung der Gleichung der erzeugten Kurve richtig erklärt, nur auf einer weniger sorgfältigen Prüfung beruhen kann. Er sagt nämlich, das Geschlecht der erzeugten Kurve müsse im allgemeinen um 1 größer sein als das der beweglichen. Fermat, der in einer kleinen Schrift Irrtümer in der Geometrie Descartes' berichtigt hat — wirkliche sowohl als solche, die auf einem Mißverständnis der gar zu knappen Ausdrucksweise Descartes' beruhen — gibt nicht das allgemeine Resultat, sondern begnügt sich damit, an einem Beispiel zu zeigen, daß die Angabe Descartes' nicht genau ist.

Zum wichtigsten Inhalt des 2. Buches gehört eine Regel für die Bestimmung von Normalen und somit für Tangenten zu algebraischen Kurven, deren Gleichung man kennt. Davon und von der seitens Descartes' damit verbundenen Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten werden wir in Verbindung mit anderen Infinitesimaluntersuchungen ausführlicher zu reden haben. Nicht nur auf Kegelschnitte und die soeben erwähnte Kurve wendet Descartes seine Methode an, sondern auch auf die Kurven, die nach ihm die Descartesschen Ovalen genannt werden. Die Bestimmung ihrer Tangenten hatte, wie wir sehen werden, für ihn ein wichtiges optisches Interesse.

Zu Ende des 2. Buches berührt Descartes S. 52 noch die Erweite-

rung seiner analytischen Geometrie auf den Raum, namentlich zur Herstellung von Raumkurven. Sie ergibt sich daraus, daß man ihre Projektionen auf 2 gegenseitig senkrechte Ebenen auf Koordinaten in diesen Ebenen mit ihrer Durchschnittslinie als gemeinschaftlicher Achse bezieht. Dieser Andeutung eines rechtwinkligen Raumkoordinatensystems wird die unrichtige Bemerkung hinzugefügt, daß die Normalen zu den zwei ebenen Kurven in den Projektionen eines Kurvenpunktes Projektionen einer Normale zur Raumkurve sein werden.

Auch Descartes erblickt in den geometrischen Örtern, zu deren Bestimmung er neue Mittel gefunden, wesentlich ein Hilfsmittel zur graphischen Auflösung von Gleichungen. Hiermit beschäftigt er sich im 3. Buch. Die Vorbereitung der Konstruktionen hat zugleich eine Gesamtbehandlung der Theorie der Gleichungen veranlaßt. Teilweise enthält sie zwar Transformationen, die schon Vieta gekannt hatte, sie läßt aber zugleich zum Vorschein kommen, wie viel durch die große Entwickelung der Zeichensprache an Übersichtlichkeit gewonnen ist. Von Neuem treffen wir S. 57 die sogenannte Zeichenregel Descartes', die besagt, daß eine geordnete algebraische Gleichung so viele positive Wurzeln haben kann, wie die Reihe ihrer Koeffizienten Zeichenwechsel darbietet, und so viele negative, wie sie Zeichenfolgen besitzt. Allerdings wird für diese Regel kein Beweis geführt; da sie aber angeblich eine Folge davon ist, daß jeder positiven oder negativen Wurzel $\pm a$ ein Faktor $x \mp a$ der linken Seite der geordneten Gleichung entspricht, muß er sie gefunden haben, indem er sah, daß man durch Multiplikation eines Polynoms mit $x - a$ einen neuen Zeichenwechsel einführe. Im Falle imaginärer Wurzeln hält Descartes seine Regel insofern aufrecht, als er auch von der Anzahl positiver und negativer imaginärer Wurzeln redet und diese Zahlen derart bestimmt, daß die Regel sowohl reelle als imaginäre Wurzeln umfaßt.

Was übrigens in diesem 3. Buche das größte Interesse darbietet, ist teils eine neue Auflösung von Gleichungen 4. Grades, teils eine vollständige Angabe, inwiefern eine Aufgabe, die von einer Gleichung 3. oder 4. Grades abhängig ist, durch Zirkel und Lineal oder, mit anderen Worten, inwiefern die Gleichung durch Quadratwurzeln gelöst werden könne.

Wenn die Gleichung 4. Grades auf die Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

gebracht worden ist, wo wir der Bequemlichkeit halber annehmen wollen, daß die Koeffizienten positiv oder negativ sein können, stellt Descartes S. 66—67 die Gleichung

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)\,y^2 - q^2 = 0$$

als Bedingung dafür auf, daß sich die linke Seite der gegebenen Gleichung als das Produkt zweier Faktoren 2. Grades

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right)$$

schreiben lasse. Die Hilfsgleichung ist in y^2 3. Grades. Dies Resultat stellt Descartes freilich nur als fertig hin, also in synthetischer Form, die dazu führende Analyse aber wird in Schootens von Descartes anerkanntem Kommentare geboten. Hier wird die linke Seite der Gleichung 4. Grades mit dem Produkte

$$(x^2 - yx + z)\;(x^2 + yx + v)$$

identifiziert, wonach man durch Gleichsetzung der verschiedenen Koeffizienten von x die notwendigen Gleichungen zur Bestimmung von y, z und v erhält. Dies ist eine Anwendung der soeben erwähnten Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Was die Lösbarkeit durch Zirkel und Lineal oder durch Quadratwurzeln allein betrifft, so stellt Descartes S. 65 fest, daß eine Gleichung 3. Grades nur zu lösen sei, wenn die Gleichung reduzibel ist oder sich in eine Gleichung 1. Grades und eine Gleichung 2. Grades zerlegen läßt. Wenn man die Gleichung derart umgestaltet hat, daß die Koeffizienten ganze und rationale Größen sind, und zwar der erste von ihnen 1, muß sie in dem genannten Falle eine ganze Wurzel haben, die nur unter den Faktoren des von x unabhängigen Gliedes zu suchen ist. Soll eine Gleichung 4. Grades durch Zirkel und Lineal oder ohne andere Wurzelgrößen als Quadratwurzeln gelöst werden können, so muß (S. 67) die Hilfsgleichung, die in y^2 3. Grades ist, die nämliche Bedingung erfüllen. Als Aufgabe, die derart behandelt werden kann, benutzt Descartes S. 70 eine bekannte antike „Einschiebung", nämlich die Konstruktion einer Geraden, die durch einen Punkt der Halbierungslinie eines rechten Winkels geht, und auf der die Schenkel des Winkels eine gegebene Strecke abschneiden. Diese Aufgabe hatte, wie wir gesehen haben, auch sonst bei Mathematikern der neueren Zeit Aufmerksamkeit erregt. Girard hatte (siehe S. 109) eine algebraische Lösung gefunden, Ghetaldi hatte sie geometrisch gelöst, und in den Briefen Huygens' findet sich eine dritte elegante Auflösung. In der algebraischen Behandlung Descartes' erhält die Aufgabe die besondere Bedeutung eines Beispiels für die Anwendung seiner allgemeinen Methode, die Lösbarkeit durch Zirkel und Lineal zu finden. Als Unbekannte betrachtet er die Strecke, welche die gesuchte Gerade auf einem der Schenkel des Winkels, von der Projektion des gegebenen Punktes auf diesen Schenkel aus gerechnet, ab-

schneidet. Die Gleichung wird 4. Grades, und die entsprechende Hilfsgleichung 3. Grades ergibt sich als reduzibel. Descartes bemerkt, daß dies auch der Fall sein müßte, wenn eine andere Größe als Unbekannte betrachtet worden wäre. Das Verfahren beruht also nicht nur auf der glücklichen Wahl eines gerade für diese Aufgabe passenden Kunstgriffes. Es kann jedoch durch eine besonders glückliche Wahl der Unbekannten vereinfacht werden, wie Newton bei seiner Behandlung derselben Aufgabe in der *Arithmetica universalis* bemerkt. Die Gleichung wird nämlich nur 2. Grades, wenn man die Unbekannte einfach den Mittelpunkt der eingeschobenen Strecken bestimmen läßt. Newton benutzt die Aufgabe als Beispiel für die Regel, daß man, um eine Gleichung auf den möglichst niedrigen Grad zu bringen, als Unbekannnte eine Größe wählen soll, die nicht mit gleichem Rechte mit einer anderen vertauscht werden kann.

Man hat im 19. Jahrhundert mit wissenschaftlicher Strenge bewiesen, daß die Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades sich tatsächlich nicht durch Quadratwurzeln allein oder durch Zirkel und Lineal ausführen läßt, mit Ausnahme der von Descartes aufgestellten Fälle. Während Descartes mit Recht seine Leser gewöhnlich auffordert, als Übung solche Beweise durchzuführen, die geradezu Anwendungen seiner Methoden sind, sieht er, daß in diesem Punkte eine Frage von prinzipieller Bedeutung vorliegt, die er selbst beantworten muß. Seine S. 79 angeführten Gründe bezeugen denn auch einen scharfen Blick dafür, daß die Anzahl der nicht auszuscheidenden Wurzeln hier eine Rolle spielen muß; sie besitzen aber keine volle Beweiskraft. Die Bestimmung zweier mittleren Proportionalen und die Dreiteilung des Winkels, auf die sich die Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades zurückführen läßt, erfordern seiner Erklärung nach eine Bestimmung von 2 mittleren Größen oder 2 mittleren Punkten, die nicht durch den Kreis, dessen Krümmung ja überall gleichmässig ist, sondern erst durch die Kegelschnitte erreicht werden kann, deren Krümmung „von 2 verschiedenen Dingen abhängt".

Gleichungen 3. und 4. Grades löst er S. 72 durch eine feste Parabel und einen Kreis, z. B. die Gleichung

$$z^4 = pz^2 + qz + r$$

durch die Parabel

$$z^2 = x$$

und den Kreis

$$\left(z - \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}p\right)^2 = \tfrac{1}{4}q^2 + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}p\right)^2 + r.$$

Die Lösung der kubischen Gleichung erhält man hieraus, indem man $r = 0$ setzt.

Zur Auflösung von Gleichungen 5. und 6. Grades benutzt er S. 80 den Schnitt eines Kreises mit der Kurve, die auf die früher erwähnte Weise durch eine Gerade, die sich um einen Punkt dreht, und eine Parabel erzeugt wird, die sich parallel verschiebt. Die Gleichung

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$$

wird somit durch die Kurve

$$nxy - y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u} = 0$$

gelöst, deren Erzeugung genauer nachgewiesen wird, und durch den Kreis

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{m}{n^2}\,y = \frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2},$$

wo

$$n = \sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}p^2},$$

$$m = \frac{r}{2} + \sqrt{u} + \frac{pt}{4\sqrt{u}}.$$

Wenn auch diese Auflösungsverfahren selbst nicht von bleibendem Werte gewesen sind, so gaben doch die umfassende Verallgemeinerung und die Sicherheit, mit der das von den alten Geometern Begonnene durch regelrechte Rechnungen weitergeführt wurde, vorzügliche Beweise für die Überlegenheit der analytischen Geometrie.

Descartes gibt noch einige Winke bezüglich einer ähnlichen Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Seine allgemein gehaltenen Äußerungen sind von Fermat als bestimmte Angaben des „Geschlechtes" der dazu erforderlichen Kurven aufgefaßt worden, und als solche würden diese Angaben unrichtig sein. Fermat, der einfach die Kurven nach dem Grad ihrer Gleichungen sondert, zeigt, daß eine Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades durch 2 Kurven n^{ten} Grades gelöst werden kann, daß man aber in vielen speziellen Fällen mit Kurven niedrigerer Grade auskommen kann. Er zeigt namentlich, daß eine solche Vereinfachung bei den Kurven stattfinden kann, die zur Bestimmung einer gewissen Anzahl von mittleren Proportionalen dienen sollen, also zur Lösung binomischer Gleichungen.

13. Die Analyse des Endlichen nach Descartes.

Durch die Geometrie Descartes' hatte die Algebra und die auf ihr beruhende Analyse des Endlichen die Entwickelungsstufe erreicht, bis zu

der wir in diesem Buche die Geschichte der Mathematik verfolgen wollen. Die hier behandelte Periode erstreckt sich jedoch etwas weiter, insofern die Infinitesimaluntersuchungen erst gegen das Ende des Jahrhunderts an einem völlig entsprechenden Wendepunkte anlangten.

Wir meinen den Übergang von Einzeluntersuchungen zu Untersuchungen nach allgemeinen und umfassenden Methoden, der in mehreren Beziehungen mit dem Übergang der Industrie von handwerksmäßigem zu fabrikmäßigem Betrieb zu vergleichen ist. Die von der Hand gemachten Gegenstände, die es verdient haben, bis auf späte Zeiten aufbewahrt zu werden, und dazu solide genug gewesen sind, rühren von einzelnen tüchtigen Personen her, die es zugleich verstanden haben, jeder einzelnen ihrer Arbeiten ihre praktische und künstlerische Individualität aufzuprägen. Jedes Stück ist etwas für sich; da man lange Zeit von einer einzigen Arbeit in Anspruch genommen war, ohne gleichzeitig die Gedanken auf die Erzeugung von etwas anderem zu richten, und ausschließlich nur die Mittel vor Augen hatte, die eben dem Gegenstande entsprachen, den man gerade darstellen wollte, so konnte man ihm oft eine solche Vollkommenheit verleihen, daß die Bemühungen späterer Zeiten, ihr gleichzukommen, scheitern mußten. Nahm man dann eine neue Aufgabe in Angriff, so brachte man dazu alle die Erfahrungen mit, die man bei der vorhergehenden eingeerntet hatte. So kam man allmählich in den Besitz gewisser Arbeitsmethoden und konnte an ihnen auch die Gehilfen teilnehmen lassen; diese Methoden konnten so nach und nach reichliche und verschiedenartige Anwendung finden. Daß sie sich aber bis dahin entwickeln sollten, daß jedermann ohne besondere Voraussetzungen auch nur etwas davon erlernen, und demnächst mehrere zusammen je einen Teil der nämlichen Arbeit sollten ausführen können, darauf legte man kein Gewicht, ja, man vermied wohl am liebsten die daraus entstehende Konkurrenz. Die Großindustrie dagegen konnte infolge einer derartigen Entwickelung der Arbeitsmethode auch viel weniger ausgebildete Arbeiter in ihre Dienste nehmen und einige nur in dem einen, andere nur in einem anderen Teil der betreffenden Arbeit einüben. Durch solche gemeinschaftliche Tätigkeit vermochte sie wesentlich gleichartige und sehr zweckmäßige, oft allerdings nur wenig interessante Gegenstände massenhaft zu produzieren; sie gelangte dahin, ganz dieselben Arbeitskräfte zur Herstellung der verschiedenartigsten Gegenstände ausnutzen und neue Arbeitsgeräte schaffen zu können, durch die man Schwierigkeiten zu überwinden wußte, die man früher als reine Unmöglichkeiten betrachtet hatte. Des Vergleiches wegen, den wir hier vor Augen haben, wollen wir noch daran erinnern, daß der Industrielle, der heute auf einem speziellen Gebiete etwas besonders Schönes oder Gutes erzeugen oder nach anderen Ideen als denjenigen, die augenblicklich gang

und gäbe sind, arbeiten will, es gewiß nicht versäumen darf, das zu beachten, was diejenigen erzeugt haben, die seinerzeit auf demselben Gebiete Einzelarbeit betrieben haben.

Wenn ein Mathematiker der Gegenwart davon hört, daß man schon im Altertum oder in der Periode der neueren Zeit, mit der wir uns bisher beschäftigt haben, irgend einen Satz kannte, der heute nur als Ergebnis weit jüngerer Methoden auftreten könnte, und den vielleicht sogar ein mit diesen Methoden Vertrauter kaum ausfindig machen würde, so liegt es für ihn, der Art und Weise entsprechend, auf die er selbst gelernt hat, neue Ergebnisse zu gewinnen, nahe, sich anfänglich einzubilden, daß man in jenen Zeiten ganz andere Methoden besessen habe. Vertieft er sich aber dann in die Untersuchung, die zu jenem Ergebnis geführt hat, so wird ihm diese am leichtesten durch eine Zusammenstellung mit den Betrachtungsweisen verständlich, mit denen er selbst vertraut ist, also gewöhnlich durch eine Übertragung in die moderne algebraische Sprache, indem er die vorliegenden logischen Raisonnements in die Buchstabenrechnung umsetzen kann. Er wird so bis zu einer fundamentalen Betrachtung vordringen können, die sich in dem überlieferten Beweise öfters als ganz die nämliche erweisen wird, wie in demjenigen, den er mittelst seiner eigenen Methoden etwa selbst konstruiert hätte. Dies ist eine einfache Folge davon, daß die logischen Zusammenhänge eine rein objektive Gültigkeit besitzen, die unabhängig von den verschiedenen Formen ist, unter denen sie uns zum Bewußtsein kommen können. Es wird ihm dabei jedoch begegnen, daß diese gemeinschaftliche Grundbetrachtung, die er selbst durch ein paar Federzüge darzustellen vermag, in der alten Darstellung mit bedeutenden Umwegen verbunden ist. Meistens werden diese Umwege darin bestehen, daß die Alten im einzelnen Falle alles das erst entwickeln mußten, was der Mathematiker der Gegenwart ein für allemal gelernt und eingeübt hat, um es sowohl in diesem als in allen anderen ähnlichen Fällen zu verwenden. Handelte es sich wirklich, wie es damaliger Zeit der Fall war, nur darum, die einzelnen, bestimmten Aufgaben aufzulösen, so hätte eben der Mathematiker der Gegenwart bei der Einübung der allgemeinen Methoden, die im Einzelfalle nur eine sehr teilweise Anwendung finden, einen weit größeren Umweg gemacht als derjenige, der nur das in Betracht zieht, was für die gerade vorliegende Frage von Bedeutung sein kann. Die Umwege, die der Entdecker des Satzes selbst wirklich gemacht haben mag, werden dagegen gewöhnlich die vorliegende Frage selbst umkreisen und somit eine Einsicht in diese verschaffen, die für denjenigen ganz verloren geht, der gleich zu Methoden seine Zuflucht nimmt, die geeignet sind, auf bestimmt formulierte Fragen, auf andere ebenso gut wie auf die vorliegende, bestimmte Antworten zu

geben. So wird es verständlich, daß man in jenen Zeiten oft solche Seiten des vorliegenden Themas entdeckte, die mit den heutigen Methoden zwar leicht beweisbar sind, auf die man aber vielleicht kaum verfallen würde. Es wird auch nicht wundernehmen, daß man neue Ergebnisse hauptsächlich auf denselben Wegen fand und bewies, die durch die heutigen Methoden angegeben werden, in wie verschiedenartiger Sprache man auch die Behandlung mag ausgedrückt haben. Die großen Fortschritte damaliger Zeit werden ferner dadurch verständlich, daß diese Ergebnisse von hervorragenden Leuten herrühren, die auch in der Gegenwart Mittel gefunden hätten, um mit Erfolg in irgend einer vorausgesehenen oder nicht vorausgesehenen Beziehung Fragen zu behandeln, zu deren Beantwortung selbst jetzt noch keine fertige Methode vorliegt.

Solche Leute besitzen in Betrachtungen, die mit Erfolg angestellt werden können, gewissermaßen Erfahrungen und vermögen sie von einer Aufgabe auf eine andere, ja, oft von einem Gebiete auf ein ganz verschiedenartiges, wie von der Geometrie auf die Zahlentheorie, zu übertragen. Sie haben auch aus der Behandlung anderer Fragen durch ihre Vorgänger ähnliche Erfahrungen gesammelt. So haben wir oft die Methoden, als deren mehr oder minder spezielle Anwendungen wir sogar sehr alte Untersuchungen, wenn wir sie uns heute recht verständlich machen wollen, auffassen müssen, zu immer klarerem Bewußtsein vordringen sehen, bis endlich die Methode etwas an und für sich geworden ist, was man ein für allemal kennen lernt, und worin man sich durch Übung eine derartige mechanische Sicherheit aneignen kann und muß, daß man dadurch unmittelbar eine Menge von Aufgaben beherrscht, die früher jede für sich gelöst werden mußten.

Was man zu dem Zeitpunkte, bis zu dem wir jetzt in unserer Darstellung vorgerückt sind, derart errungen hatte, war eine Buchstabenrechnung, die man fast ebenso mechanisch wie die Zahlenrechnung einüben kann, und die in sich alle Operationen der Mathematik des Endlichen befaßt, was man auch seit Descartes anerkannte. Die Operationen der geometrischen Algebra waren in der Einleitung seiner Geometrie in Rechenaufgaben verwandelt, und dasselbe ward mit dem früher mit der geometrischen Algebra verknüpften Gebrauche von Koordinaten der Fall. Dieser Gebrauch wurde dadurch systematischer, und zugleich wurde mit der Geometrie die ganze Mathematik, die bisher in der Geometrie ihre feste Grundlage gehabt hatte, eng mit den in der Zeichensprache ausgeführten Rechnungen verknüpft. — Zu einem ähnlichen Standpunkt gelangte die Infinitesimalmathematik Ende des Jahrhunderts durch die Grundlegung der Differential- und Integralrechnung, nach einer vorhergehenden Entwickelung, welcher der Leser selbst im 3. Teile dieses Buches viele Beispiele

zu näherem Vergleiche mit der Kunst des hervorragenden Handwerkers entnehmen kann. Schon früher hatte sich ein Übergang ähnlicher Art vollzogen, als sich die Zahlenrechnung durch den Gebrauch der indischen Zahlen in einer Weise entwickelte, daß ein jeder sie mechanisch erlernen konnte. Dieser Übergang fand aber, wie bekannt, an verschiedenen Orten zu sehr verschiedenen Zeiten statt.

Durch die Einführung einer allgemeinen Methode, mit der man mechanisch verfahren kann, tritt die ganze mathematische Arbeit oder doch der Teil von ihr, den die Methode befaßt, in ein neues Stadium ein. Erstens gewinnt die Mathematik dadurch an Bedeutung für die ganze Kultur. Sie kann von nun an unmittelbar von Vielen angewendet werden, die ihrer bedürfen, ohne besondere Anlagen für die Mathematik zu besitzen, und kann dadurch mannigfachen Nutzen stiften. Für die Entwickelung der Mathematik selbst gewinnt diese größere Verbreitung dadurch an Bedeutung, daß der erweiterte Kreis von Mitarbeitern viele in sich begreifen muß, deren mathematische Anlagen sonst wohl nie entdeckt worden wären, wie auch die größere Anzahl von Anwendungen immer aufs neue bedeutende Fragen entstehen läßt. Ferner macht sich in der inneren Entwickelung der Mathematik vieles fast von selbst, indem sich die Methoden unmittelbar dazu anwenden lassen, die Hilfsmittel selbst zu bearbeiten oder neue Ergebnisse zu finden, die in Gestalt von Formeln, die leicht im Gedächtnisse haften, Ausgangspunkte für neue mechanische Operationen bilden, und schließlich die Fragen zu beantworten, die sich von selbst erheben, sobald man in den angefangenen Untersuchungen weitergeht. Wie bedeutungsvoll der Ertrag solcher Untersuchungen auch sein mag, so können sie selbst uns doch nicht in dem Grade interessieren wie diejenigen, durch die sich ganz neue Betrachtungsweisen geltend machen, und die somit nicht selbst mittelst einer fertigen Methode haben entwickelt werden können. Die fertigen Methoden konnten indes diese neuen Untersuchungen auch mannigfach erleichtern und fördern, ohne doch unmittelbar für sie bestimmt zu sein. So werden wir in dem folgenden Abschnitt einige der besten Früchte der neu begründeten Algebra innerhalb der Mathematik in der kräftigen Hilfe erblicken, welche die Algebra, die mit ihr verbundene Buchstabenrechnung und die analytische Geometrie der Entwickelung der Infinitesimalmethoden leisten. Auf der andern Seite sind verschiedene der Fortschritte der Algebra selbst, wie die Lehre von den gleichen Wurzeln und die Trennung der Wurzeln einer Gleichung eng mit den Infinitesimaluntersuchungen verbunden und finden deshalb auch erst im nächsten Abschnitt ihren Platz.

Aus diesen Gründen und, weil die Analyse des Unendlichen jetzt in so hohem Grade die Mathematiker in Anspruch nahm, haben wir hier nur

noch einzelne zerstreute Aufschlüsse über die Analyse des Endlichen in der letzten Hälfte des 17. Jahrhunderts hinzuzufügen, und bei den meisten brauchen wir sogar nur kurz zu verweilen.

Zuerst wollen wir von der prinzipiellen Frage reden, von der Tragweite der algebraischen Rechnung selbst. Diese war bei Descartes, wie im vorigen Abschnitte erwähnt, dadurch gesichert, daß bei ihm die in der Zeichensprache dargestellten Operationen nichts anderes sind als die allgemeinen Operationen, die bisher in der antiken Lehre von den Proportionen ihren exakten Ausdruck gefunden hatten. Da diese Lehre eng mit der geometrischen Darstellung der Größen verbunden war, so geschah dies also durch eine Anleihe bei der Geometrie. Da jedoch die Prinzipien der Proportionslehre selbst, die im 5. Buche Euklids enthalten sind, an und für sich nicht geometrisch sind, so würde es nicht schwer sein, diese Anleihe wieder zu tilgen. Darauf war man aber keineswegs bedacht. Man war in dem Grade davon in Anspruch genommen, die Herrschaft, welche die Algebra jetzt nach Descartes über das ganze Gebiet der Mathematik ausdehnen konnte, und zu deren Ausübung sie immer bessere technische Hilfsmittel gewann, auch wirklich auszuüben, daß man sich bis ins 19. Jahrhundert hinein nur wenig um die logische Grundlage dieser Herrschaft bekümmerte.

Diese mehr praktische Richtung tritt besonders kräftig in einer Schrift von Wallis mit dem bezeichnenden Titel: *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum* hervor. Die Algebra gestaltet sich hier zu einer einfachen und unbewiesenen Erweiterung der ursprünglich ganze Zahlen voraussetzenden Rechenoperationen auf alle möglichen Größen. Diese rein praktische Tendenz, die er — hier wie auf dem infinitesimalen Gebiete — verfolgt, gibt er selbst unumwunden zu. Er sondert nämlich ausdrücklich zwischen *Arithmetica* (und *Geometria*) *speculativa* und *Arithmetica* (und *Geometria*) *practica*. Ersterer zollt er ein erkenntliches, aber kühles Lob (*quamvis haec* [*speculativa*] *quidem dignitate multum praecedat*); ihm selbst aber kommt es offenbar am meisten darauf an, den Nutzen und die Vorteile der *Arithmetica practica* und der *Geometria practica* herauszustreichen, die er beziehungsweise *scientia bene numerandi* und *scientia bene mesurandi* nennt.

Diese Vorteile bestehen, was die auf der Arithmetik beruhende Algebra betrifft, in der großen Leichtigkeit, mit der alle Operationen ausgeführt werden. Wallis läßt sie besonders hervortreten, indem er in zwei Kapiteln beziehungsweise den Inhalt des 2. Buches Euklids, das ja gerade die Grundlage der geometrischen Algebra bildet, und den des 5. Buches darstellt, das für die mit der Geometrie verknüpfte Proportionslehre die Grundlage abgibt. Diese Vorteile erhält er freilich leichten Kaufes, indem er die logischen

Rücksichten ganz außer acht läßt, welche die Alten veranlaßten, die allgemeinen Größen, wie im 2. Buche Euklids, geometrisch darzustellen und eine solche Proportionslehre, wie im 5. Buche Euklids, zu entwickeln. Ihm ist ein Verhältnis ganz dasselbe wie ein Quotient, der sodann nur aus gleichartigen Größen gebildet wird; er rechnet damit wie mit Brüchen.

Wenn auch Wallis in seiner großen Algebra, die 1685 englisch und 1693 lateinisch erschien, etwas genauer auf die Grundlage der Euklidischen Proportionslehre einging, so hält er doch auch hier an derselben praktisch-arithmetischen Grundlage fest, wie in der schon erwähnten Schrift. Das Buch ist übrigens überaus reichhaltig und teilt sozusagen alles mit, was bisher über die Algebra an den Tag gekommen. Nur sind seine geschichtlichen Nachrichten über die Urheber der verschiedenen Fortschritte keineswegs zuverlässig und begünstigen namentlich seine eigenen Landsleute ungebührlich.

Die praktische Arithmetik, sowie die darauf begründete Algebra, hat durch ihre Leichtigkeit ihren naturgemäßen Platz im Elementarunterricht bis auf den heutigen Tag behaupten können; daneben besteht aber die sonderbare Erscheinung, daß gleichzeitig auch die *Geometria speculativa* im Elementarunterricht fortwährend ihr von den Griechen vererbtes historisches Recht gewahrt hat. Namentlich tritt dies jedesmal zu Tage, wenn man in den Beweisen für die Proportionalität von Stücken einer geometrischen Figur meint, im besondern die Möglichkeit berücksichtigen zu müssen, daß die Stücke inkommensurabel seien, und sodann die Exhaustionsmethode anwendet, während man in der Arithmetik die Proportionslehre allein auf Rechenoperationen mit kommensurablen Zahlen aufbaut. Als ganz bedeutungslos ergibt sich erstere Vorsicht, wenn man schließlich die arithmetisch bewiesenen Sätze zu Umformungen der Verhältnisse zwischen geometrischen Größen verwenden will. Besonders stark tritt hier die Gewalt der geschichtlichen Entwickelung hervor, wenn man bedenkt, daß sich dies gegensätzliche Verhältnis zwischen arithmetischer und geometrischer Beweisführung auf dem elementaren Gebiete noch lange erhalten hat, nachdem auf dem wissenschaftlichen Gebiete die auf Arithmetik begründete reine Analyse — im Laufe des 19. Jahrhunderts — ihre Voraussetzungen bereits dermaßen entwickelt hatte, daß sie in mehreren Beziehungen mit größerer Strenge als die Geometrie arbeiten konnte. Was Verhältnisse und Proportionen betrifft, so dürfte es übrigens zweifelhaft sein, ob diese Form der Zusammenstellung von Größen nicht durchaus den algebraischen Rechnungen weichen muß, und zwar nicht nur auf dem elementaren Gebiete, wo sie nichts anderes als Erzeugnisse arithmetisch erklärter Rechnungen ausdrücken, sondern auch auf dem wissenschaftlichen, wo der moderne Zahlenbegriff alles das befaßt, was die Alten durch den Gebrauch von Proportionen erzielen wollten.

Auf einem wichtigen Gebiete vollführte schon Wallis die hier angedeutete Reform, nämlich in der Trigonometrie, in der bisher alle Formeln als Proportionen dargestellt wurden, welche nach den für diese geltenden Regeln, nicht aber durch gewöhnliches Rechnen umgestaltet werden durften. Sein Landsmann William Oughtred hatte schon in seiner Geometrie in konsequenterer Weise, als es früher der Fall gewesen war, abgekürzte Bezeichnungen für trigonometrische Größen angewendet: *s arc.* für *sin* u. s. w. und statt der früheren, umständlichen Angabe, daß die Größen dem komplementären Winkel entsprechen sollten, ähnliche kurze Bezeichnungen eingeführt: *s co arc* für *cos* u. s. w. Er hatte zugleich das lange Zeit nachher übliche Zeichen :: für die Gleichheit der zwei Verhältnisse einer Proportion aufgebracht. Da er hier nicht das gewöhnliche Gleichheitszeichen anwendete, entfernte er sich gewissermaßen von der angedeuteten Reform. Wallis dagegen wendete nicht nur noch einfachere Zeichen an, S, Σ, T, τ, s, σ für die sechs trigonometrischen Größen, sondern behandelte auch die sie enthaltenden Proportionen als Gleichungen und rechnete mit den Größen wie mit anderen in der Zeichensprache dargestellten Größen.

Obgleich sich auch Wallis augenscheinlich für die praktische Geometrie mehr interessierte als für die spekulative, so hat er doch auch zu dieser etwas beigetragen, indem er sich sogar mit den Postulaten Euklids, besonders dem 5. (oder dem sogenannten 11. Axiom) beschäftigte. Dies geschah in einigen Vorträgen, die er als Savilian Professor in Oxford über den Euklid zu lesen hatte. Über das genannte Postulat teilt er erst einige Betrachtungen Naṣîr Eddîns mit (S. 111); sodann behauptet er selbst, daß man statt dieses Postulates die Existenz ähnlicher Dreiecke postulieren könne, indem man folgende Behauptung aufstelle: zu jedem Dreieck kann nach beliebigem Maßstab ein demselben ähnliches Dreieck konstruiert werden. Diese Forderung geht jedoch in der Tat viel weiter, als notwendig ist, wie denn Saccheri in einer 1733 erschienenen Schrift zeigte, daß es genüge, die Existenz eines einzigen Paares von Dreiecken zu postulieren, die, ohne kongruent zu sein, die gleichen Winkel hätten. Wallis hebt jedoch ausdrücklich hervor, daß er die Bemühungen Euklids, die unbewiesenen Voraussetzungen auf die möglichst geringe Anzahl zurückzuführen, völlig verstehe. Ihm selbst ist es allerdings seiner ganzen praktischen Tendenz gemäß am liebsten, daß man alles dasjenige postuliert, was niemand leugnen wird, und er findet es im Grunde ungereimt, daß Euklid erst nach einer Reihe von Sätzen zu dem Beweise dafür gelangt, daß eine Seite eines Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden andern, statt es einfach zu postulieren.

Wie man in der Algebra sogleich das Hauptgewicht darauf legte, die reichen technischen und von geometrischen Betrachtungen unabhängigen Hilfsmittel zu verwerten, ohne sich darum zu bekümmern, daß ihre logische Grundlage von Descartes der geometrischen Proportionslehre entlehnt sei, und ohne diese Grundlage durch eine entsprechende arithmetische zu ersetzen, ebenso machte man es, wie wir später zu berühren haben, im 18. Jahrhundert mit der Infinitesimalrechnung. Hier wollen wir dagegen erwähnen, daß man auch, was die analytische Geometrie betrifft, mehr darauf bedacht war, sie zum Beweise und zur Auffindung einzelner Sätze, bekannter sowohl wie neuer, anzuwenden als darauf, der Methode selbst gegenüber der Geometrie eine selbständigere Stellung zu verschaffen, als sie noch in Fermats und Descartes' Erörterung von Kurven gehabt hatte, die durch eine Gleichung 2. Grades dargestellt sind. Wir werden sehen, wie nützlich die analytische Geometrie bei den allmählich wachsenden Infinitesimaluntersuchungen war. Wir denken hierbei allerdings nicht an den Gebrauch der Koordinaten, der auf diesem Gebiete, auf dem z. B. Integrale als Flächen dargestellt wurden, älter war als die eigentliche analytische Geometrie; große praktische Erleichterungen erzielte man dagegen, indem man in Verbindung mit Koordinaten die moderne Algebra statt der geometrischen anwendete. Durch diese Abänderung der Algebra geschah es auch, daß man ohne systematischere Behandlung leicht Wege zu den einzelnen geometrischen Sätzen über die Kegelschnitte entdeckte, besonders zu solchen, die in den beiden ersten Büchern des Apollonius dargestellt sind. Dies war um so leichter, als man dazu keine anderen Koordinaten nötig hatte als die schon bei Apollonius selbst vorkommenden und man also unmittelbar praktisch die großen Vorteile nutzen konnte, welche die Formen der neuen Algebra an und für sich bieten, und die nun, da man sich nicht mehr in die geometrischen Formen der alten Algebra vertiefte, noch deutlicher hervortraten.

Beispiele einer solchen Anwendung der Algebra in Verbindung mit dem Gebrauche von Koordinaten finden wir bei Wallis im *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis* (1655), in dem er namentlich die Sätze über die Kegelschnitte beweist, die ihm in seiner *Arithmetica infinitorum* vonnöten sind. In geometrischer Beziehung schließt diese Schrift sich ganz so eng an Apollonius wie an Descartes an. Die Sätze, welche bewiesen werden, besagen teils, daß ein Kegelschnitt, der ursprünglich durch Beziehung auf ein Paar konjugierter Durchmesser definiert wird, unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser besitzt, auf welche er durch dieselben Relationen bezogen werden kann — ohne daß indes zugleich bewiesen wird, daß sich unter den konjugierten Durchmessern immer auch ein Paar findet, das rechte Winkel bildet, — teils bezwecken sie eine mit dieser

Darstellung verknüpfte Tangentenbestimmung. Nicht nur finden sich diese Sätze selbst im 1. Buch des Apollonius, sondern sie werden auch von Wallis, wie schon dort, durch Betrachtung ähnlicher Dreiecke bewiesen, und die Richtigkeit der Tangentenbestimmungen wird wie bei Apollonius dadurch dargetan, daß die Ordinaten der als Tangenten bezeichneten Linien auf beiden Seiten des Berührungspunktes größer sind als die entsprechenden Ordinaten der Kurve (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 207). Der Unterschied in der Behandlung besteht darin, daß Wallis einzelne Buchstaben als Bezeichnung der verschiedenen Strecken, besonders aber der Koordinaten einführt, und daß somit die benutzten Umgestaltungen durch algebraische Rechnungen ausgedrückt werden. Die so gewonnene größere Leichtigkeit und Übersichtlichkeit in der Behandlung offenbart er dann, indem er dasselbe Verfahren auch auf eine andere Kurve, auf die kubische Parabel $a^2y = x^3$ anzuwenden vermag. Er beweist, daß diese nicht ebenso wie die Parabel 2. Grades noch andere Durchmesser habe, auf die sie durch eine Gleichung von derselben Form bezogen werden könnte; dagegen findet er die Bestimmung ihrer Tangenten. Indes tritt der damalige Mangel an Vertraulichkeit mit den Vorzeichen in seiner Figur hervor, in der die Teile der Kurve zu beiden Seiten des Scheitelpunktes wie diejenigen einer gewöhnlichen Parabel gezeichnet sind ohne Rücksicht darauf, daß y der Gleichung zufolge mit x das Vorzeichen wechseln müßte. Wir bemerken noch, daß das jetzt übliche Zeichen für unendlich ∞ zuerst in dieser Schrift angewendet wird.

Wallis' Schrift erhielt dadurch Bedeutung, daß sie zeigte, wie leicht durch die Buchstabenrechnung, mit der man jetzt immer vertrauter wurde, auch die bei dem schwer verständlichen Apollonius behandelten Fragen zugänglich gemacht werden konnten. Eine systematischere Bedeutung haben dagegen die *Elementa linearum curvarum* Jan de Witts. Unter die Anhänge zur Geometrie Descartes' in der lateinischen Ausgabe van Schootens 1659 aufgenommen, sollte diese Schrift eben die Aufgabe haben, die Untersuchung von Kurven 2. Ordnung zu vervollkommnen, die in Descartes' Geometrie enthalten ist und hier zu dem Ergebnis führt, daß diese Kurven Kegelschnitte sind. Man wird sich erinnern (S. 210), daß dies Ergebnis hier — wie bei Fermat — nur durch die Beziehung auf ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem gewonnen wurde, in welchem das Quadrat der Ordinate zu dem Rechteck der Strecken proportional ist, in die sie den als Abscissenachse gewählten Durchmesser zerlegt. Daß die Kurve dann eine Ellipse oder eine Hyperbel oder im Grenzfalle eine Parabel ist, das wußte man aus Apollonius, auf den Descartes verwies. Somit wußte man nur aus Apollonius, daß die Kurven, welche diese Eigenschaft im

Verhältnis zu einem Parallelkoordinatensystem besitzen, nicht von denjenigen verschieden sind, welche dieselbe Eigenschaft im Verhältnis zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem haben und eben dadurch definiert werden können, oder, anders ausgedrückt, daß sie stets zwei Achsen haben. Sogar bei Apollonius tritt dies Ergebnis wegen der eigentümlichen Anlage seines 1. Buches, über dessen Hauptplan Descartes nach einigen Äußerungen von ihm selbst kaum im klaren war, nur wenig deutlich hervor. Die Hauptaufgabe, die in diesem Buche durch eine Reihe von auch an und für sich sehr bedeutungsvollen Untersuchungen gelöst wird (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 200—208), ist nämlich eine noch umfassendere; sie geht darauf aus, zu beweisen, daß die vom Verfasser betrachteten beliebigen ebenen Schnitte bei irgend welchen circulären Kegeln dieselben Kurven sind wie die ebenen Schnitte bei Umdrehungskegeln. Allerdings haben wir in unserer Besprechung der projektiven Geometrie des 17. Jahrhunderts gesehen, daß diese auch die Bestimmung der Achsen eines Kegelschnittes befaßte; einerseits wurden aber die Untersuchungen Desargues' und Pascals nur wenig bekannt, während die de la Hires erst in den Schluß des Jahrhunderts fielen, andrerseits würden die Bestimmungen dieser Gelehrten einen noch weiteren Weg zu den Voraussetzungen bedeuten, die bei der analytisch-geometrischen Behandlung von Kegelschnitten vonnöten waren, als derjenige, auf den man von Apollonius hingewiesen wurde.

Unter diesen Umständen mußte es de Witt angelegen sein, die Voraussetzung, die Descartes dem Apollonius entlehnt hatte, auf eine unmittelbarere Weise klarzulegen. Die jugendliche analytische Geometrie war indes noch nicht genügend entwickelt, um selbst eine solche Änderung vornehmen zu können wie diejenige, mittelst der wir heute die Achsen einer Kurve 2. Ordnung finden und die Kurven auf diese beziehen. De Witt mußte deshalb in seinem ersten Buche die nämliche Aufgabe durchaus geometrich lösen. Er läßt ihr eine Behandlung von derselben Art und in denselben Formen angedeihen, wie ihr schon Apollonius hätte widmen können. Indem er aber die Aufgabe anders stellt als dieser, kann er nicht auf Apollonius bauen, sondern entwickelt selbständig neue geometrische Anschauungen, durch die sich seine Behandlung, trotz der rein formalen Übereinstimmung, in geometrischer Beziehung als von Apollonius weit unabhängiger gestaltet, als es die algebraischen Untersuchungen Wallis' sind.

Was die Hyperbel betrifft, bei welcher er die Asymptoten benutzen kann, deren Winkel durch die Achsen halbiert werden, so ist es nicht so schwer, diese zu bestimmen. Bei der Parabel und Ellipse geht er von neuen Bestimmungen dieser Kurven als geometrischer Örter aus. So bestimmt er die Parabel zunächst als geometrischen Ort des Durchschnittspunktes

zwischen dem einen Schenkel eines Winkels von steter Größe, der um seinen Scheitelpunkt gedreht wird, und einer Geraden von gegebener Richtung, die den anderen Schenkel auf einer festen Geraden schneidet. Hieran knüpft sich die Relation zwischen einer Reihe von parallelen Halbchorden und den Stücken, die sie auf ihrem Durchmesser abschneiden. Es wird gezeigt, daß es unendlich viele solcher gegenseitig paralleler Durchmesser gibt, die jeweilig ihr Chordensystem haben. Die Tangenten werden bestimmt und bei der Lösung der Hauptaufgabe benutzt, die darin besteht, einen Durchmesser zu finden, der mit seinem Chordensystem einen gegebenen Winkel bildet. Ist dies ein rechter Winkel, so findet man die Achse; dies wird ausdrücklich hervorgehoben, wie auch im folgenden die Bestimmung der Achsen sowohl der Hyperbel als der Ellipse deutlich als ein wichtiges Ergebnis der im 1. Buche unternommenen geometrischen Untersuchung hervortritt.

De Witt hat also in seinem 1. Buche, wenn auch auf rein geometrischem Wege, so doch selbständig dasjenige erreicht, was Descartes noch dem Apollonius entlehnte. Er kann sich dann in seinem 2. Buche damit begnügen, wie Descartes, die Gleichung einer beliebigen Kurve 2. Ordnung in diejenige umzugestalten, durch die sie auf ein Paar konjugierte Durchmesser bezogen wird. Wenn diese auch im allgemeinen keinen rechten Winkel bilden werden, so weiß er doch aus seinem ersten Buche, daß es jedenfalls ein Paar gibt, bei welchem es stattfindet, und daß die Kurve also eine durch eine Achse und den entsprechenden Parameter bestimmte Parabel, Ellipse oder Hyperbel ist. Das von ihm in diesem Buche benutzte Verfahren ist dasselbe wie bei Descartes und Fermat; es wird aber ausführlicher klargelegt, wie verschiedene vorliegende Formen der ursprünglich gegebenen Gleichung reduziert werden, und auf welche Kurven sie führen. Als Anwendung wird sodann durch analytische Geometrie bewiesen, daß eine Kurve, deren Punkte von einem festen Punkte und einer festen Geraden dieselbe Entfernung haben, eine Parabel, eine Kurve aber, deren Punkte von zwei gegebenen Punkten Entfernungen haben, die eine gegebene Summe oder Differenz ausmachen, eine Ellipse oder Hyperbel ist. An diese Ortsbestimmung, die sich übrigens schon bei Fermat findet, knüpfen sich geometrische Beweise der Sätze über die Winkel der Tangenten und Brennstrahlen.

Die rein geometrische Behandlung im 1. Buche de Witts zeigt, — was ja auch ganz natürlich ist — daß die analytische Geometrie trotz der eigentümlichen Vorzüge, die sich sofort geltend machten, noch nicht durch eigene Mittel alles das zu bewältigen vermochte, was man damals durch die alten Methoden erreichen konnte. Noch länger mußte es dauern,

bis die analytische Geometrie auf den früher behandelten Gebieten und namentlich in der Lehre von den Kegelschnitten fertige Resultate in einer solchen Fülle zu Tage fördern konnte, wie sie sich bei Apollonius finden. Es kann daher nicht wundernehmen, daß Newton trotz seiner Bewunderung Descartes', auf dessen Geometrie er die Leser seiner *Principia* in einem Briefe verweist, zu Sätzen des Apollonius seine Zuflucht nimmt, um seine mechanische Erklärung der Keplerschen Gesetze zu beweisen.

Die geometrischen Sätze, die er hierbei verwendet, sind dem bekannteren 1. Buch des Apollonius entnommen; in einem rein geometrischen Abschnitt der *Principia* aber findet er Gelegenheit, eine damals wie heute noch ziemlich seltene Vertrautheit mit den Betrachtungsweisen an den Tag zu legen, denen die sehr allgemeinen Sätze im 3. Buche des Apollonius entsprungen sind. Allerdings hatte es die projektive Geometrie, wie wir aus einem Satze bei Pascal (S. 187) ersehen können, zu noch allgemeineren Formen von Sätzen gebracht; aber dazu waren Methoden angewendet worden, die dem Apollonius fernlagen. Ferner war unter den Händen Fermats und Descartes' die analytische Geometrie ein bequemes Mittel gewesen, um Örter zu drei oder vier Geraden zu bestimmen. Newton dagegen ließ Bestimmungen dieser Örter aus den Sätzen und Betrachtungsweisen selbst hervorgehen, die sich im 3. Buch des Apollonius finden, das zufolge der eigenen Angabe des Verfassers eben zur Auffindung dieser und ähnlicher geometrischer Örter soll dienen können. Er benutzt namentlich den Satz, den wir den Potenzsatz genannt haben, und der bei Apollonius geradezu eine zentrale Stellung einnimmt (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 208). Diesen Satz hat übrigens Newton in einer später zu besprechenden geometrischen Arbeit auf Kurven 3. Ordnung ausgedehnt, und zwar auf eine Art und Weise, die ebenso gut auf Kurven höherer Ordnung angewendet werden kann. Deshalb ist der allgemeine Satz später Newtons Satz genannt worden; dieser Name wird öfters auch von seiner Anwendung auf Kegelschnitte gebraucht, die im Altertum eine so große Rolle spielte.

Auch zu der Gruppe von Sätzen im 3. Buch des Apollonius, in denen die Kegelschnitttangenten unabhängig von ihren Berührungspunkten bestimmt werden, die Kegelschnitte also tatsächlich als umhüllende Kurven (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 210) betrachtet werden, findet Newton den Anschluß. Er geht in diesem Punkte viel weiter, als es Apollonius in irgend welcher auf uns gekommenen Schrift getan, indem er unter Anwendung von dem, was sich bei Apollonius findet, einen Satz beweist, den wir, wie folgt, wiedergeben können: Ein Kegelschnitt wird ein System von Geraden umhüllen, die auf zwei beliebigen Tangenten, von zwei festen Punkten dieser Tangenten aus gerechnet, Strecken abschneiden, deren

Produkt konstant ist. Das ist der Hauptsatz über die Erzeugung eines Kegelschnittes durch Gerade, die entsprechende Punkte zweier projektivischen Punktreihen verbinden, jedoch so, daß deren Verbindung — wie bei früheren Erzeugungen der Kurven als geometrischer Örter (S. 190) — nur auf eine einzelne bestimmte Weise und ohne Einführung des allgemeinen Begriffes der Projektivität ausgedrückt wird.

Übrigens verwendet Newton seine Sätze zur Konstruktion von Kegelschnitten, die gegebenen Bedingungen unterliegen, namentlich solcher, die durch gegebene Punkte gehen und gegebene Gerade berühren sollen. Von Pascal abgesehen, dessen Werk verloren gegangen (S. 188), hat zuerst Newton alle die Aufgaben gelöst, die auf einer Kombination dieser beiden Bedingungen beruhen. Er zieht jedoch auch einzelne andere Bedingungen mit heran, wie daß der Kegelschnitt einem anderen ähnlich oder kongruent sein, oder daß ein Brennpunkt in einen gegebenen Punkt fallen soll. Eben durch die Einführung dieser letzten Bedingung werden seine Kegelschnittbestimmungen zu Bestimmungen von Planetenbahnen und erhalten somit doch einige Verbindung mit dem Hauptinhalt der *Principia*. Mit diesen Aufgaben hebt er eben deswegen an. Daß Newton aber dann in der Behandlung von Aufgaben von rein geometrischem Interesse so weit gegangen, läßt sich gewiß nur daraus erklären, daß er die Gelegenheit benutzte, Resultate mitzuteilen, die er schon früher gewonnen; denn bei der schnellen Ausarbeitung der *Principia* kann er kaum zu so umfassenden geometrischen Extrastudien die Zeit gehabt haben.

Dieser Abschnitt schließt sich, wie erwähnt, aufs engste dem 3. Buche des Apollonius an, ohne daß Newton gleichzeitig irgendwie analytische Geometrie oder Zentralprojektion zu Hilfe nimmt. Diese beiden modernen Hilfsmittel werden dagegen in seiner *Enumeratio linearum tertii ordinis* angewendet, die 1704 als Anhang zu seiner Optik veröffentlicht wurde. Hauptsächlich ist es die analytische Geometrie, die hier von ihm auf Gebiete angewendet wird, wo eben ihre Vorteile deutlich hervortreten. Auch die Sätze, die er nicht beweist, sind derart, daß sie am leichtesten durch den Gebrauch von Parallelkoordinaten und durch Anwendung von Sätzen über algebraische Gleichungen gewonnen werden. Dies gilt z. B. von dem schon erwähnten erweiterten Potenzsatze und von der Bestimmung geradliniger Durchmesser als Örter der Punkte einer Reihe paralleler Geraden, deren Entfernungen von den Durchschnittspunkten der Geraden die algebraische Summe Null haben. Was die Zentralprojektion betrifft, so werden wir sie angewendet sehen, wo es gilt, einen wichtigen Überblick zu geben.

Bei der Aufzählung von verschiedenen Gestalten der Kurven 3. Ordnung, die den Hauptinhalt der Abhandlung bildet, geht Newton von

der Betrachtung unendlicher Zweige aus. Von solchen hat jede Kurve ungerader Ordnung wenigstens zwei (zusammengehörige, die nach moderner Auffassung durch denselben unendlich fernen Punkt gehen). Sind diese hyperbolischer Natur, so kann man gewöhnlich, indem man eine Asymptote zur Ordinatenachse nimmt und die Abscissenachse in passender Weise wählt, die Gleichung auf folgende Form bringen:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ob es andere Asymptoten als die Ordinatenachse gibt, beruht auf dem Vorzeichen von a. Die der Ordinatenachse parallelen Tangenten werden durch die Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$$

bestimmt. Sodann erhält man verschiedene Formen, je nachdem diese Gleichung 0, 2 oder 4 reelle Wurzeln, und Übergangsformen, wenn sie gleiche Wurzeln hat. Auf ähnliche Weise werden die Fälle erörtert, in denen Parallelen zur Ordinatenachse nur in einem Punkte geschnitten werden, oder in denen diese Asymptote selbst sich ins Unendliche entfernt.

An einen der letzteren Fälle, an denjenigen nämlich, in welchem die Kurve eine sog. kubische Parabel ist und sich durch eine Gleichung von der Form

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

darstellen läßt, wird übrigens die beste Übersicht über alle Kurven angeknüpft. Newton bemerkt nämlich, daß jede Kurve 3. Ordnung als Zentralprojektion, als „Schatten" einer solchen kubischen Parabel dargestellt werden kann. Die 5 Gestalten, welche letztere Kurve annehmen kann, geben also alle die projektivisch verschiedenen Gestalten an, welche für eine Kurve 3. Ordnung überhaupt möglich sind. Man erhält sie je nach der Beschaffenheit der 3 Wurzeln der Gleichung $y^2 = 0$, wo y^2 den obigen kubischen Ausdruck hat. Sie kann nämlich entweder 1) 3 reelle und verschiedene Wurzeln haben, in welchem Falle die Kurve aus 2 gesonderten Zweigen besteht, oder 2) 2 imaginäre Wurzeln, in welchem Falle die Kurve nur einen Zweig hat, oder 2 einander gleiche Wurzeln, in welchem Falle die Kurve entweder 3) einen Doppelpunkt oder 4) einen isolierten Punkt hat, oder die Gleichung kann endlich 5) 3 einander gleiche Wurzeln haben, in welchem Falle die Kurve einen Rückkehrpunkt hat.

Newton fügt noch einfache, auf geometrische Örter hinauslaufende Erzeugungen teils von Kegelschnitten, teils von Kurven 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt hinzu; sie sind jedoch nicht projektivisch.

Die oben erwähnten geometrischen Abschnitte der *Principia*, in denen Kegelschnitte durch gegebene Punkte bestimmt werden, könnten mit Äußerungen im zweiten Briefe Newtons an Leibniz (S. 56) über näherungsweise Quadraturen in Verbindung zu stehen scheinen; er sagt nämlich, daß Quadraturen durch Vertauschung der Kurven mit einfachen Kurven erzielt werden können, die durch einen Teil der Punkte der ersteren hindurchgehen. Jedoch hat Newton dies Ziel in seiner allgemeinen Interpolationsformel auf andere Weise erreicht. Zwar ist sie erst in seiner 1711 erschienenen *Methodus differentialis* ausführlicher dargestellt; die Formel selbst findet sich aber schon kurz angegeben in einem Hilfssatze der *Principia* (III, Lemma 5).

Die hierbei benutzten Näherungskurven, „parabolischen" Kurven, die sich durch Gleichungen von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots$$

ausdrücken lassen, waren indes schon 1668 von James Gregory zur Herleitung der bekannten Formel angewendet worden, die man nach dem späteren Wiederauffinder die Simpsonsche nennt. Newton weicht darin von Gregory und denjenigen, die früher Interpolationsformeln aufgestellt, namentlich Briggs (S. 140), ab, daß er sich nicht darauf beschränkt, in konstanten Intervallen der Werte der unabhängigen Variabeln zu interpolieren, so daß die Ordinaten in den Punkten, durch welche die Hilfskurve bestimmt werden soll, auf der Abscissenachse gleich große Strecken abschneiden. Diesen spezielleren Fall behandelt er allerdings zuerst; dann aber legt er den Punkten, durch welche die Hilfskurve hindurchgehen soll, vollkommen beliebige Koordinaten bei. Nennen wir diese x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; $\cdots$, so bildet Newton allmählich Differenzenquotienten, die wir folgendermaßen bezeichnen können:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0, \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta y_1, \cdots$$

$$\frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \Delta^2 y_0, \quad \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 y_1, \cdots$$

— — — — — — — — —

und findet sodann

$$y = y_0 + (x - x_0)\ \Delta y_0 + (x - x_0)\ (x - x_1)\ \Delta^2 y_0 + \cdots$$

Newton selbst bezeichnet, was wir hier Δy_0, $\Delta y_1, \cdots$ genannt haben, mit entgegengesetzten Vorzeichen, durch b, $2b$, $3b, \cdots$, ebenso $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1, \cdots$ durch c, $2c$, $3c, \cdots$ u. s. w. Seine scheinbaren Koeffizienten sind in Wirklichkeit also Stellenzeiger (*Indices*).

Wir wollen uns hier nicht bei der ausführlicheren Arbeit von 1711 aufhalten, sondern nur bemerken, daß Newton in ihr aus seiner Interpolationsformel die später als die Stirlingsche benannte Formel herleitet.

Stellenzeiger waren, als die *Principia* erschienen, gleichfalls von Leibniz, jedoch in einer nicht veröffentlichten Schrift, in Anwendung gebracht worden. Hier dienen sie dazu, die verschiedenen Punkte einer Kurve zu unterscheiden, die man, wenn von verschiedenen Lagen eines beliebigen oder beweglichen Punktes die Rede war, damals gewöhnlich mit demselben Buchstaben bezeichnete (siehe Fig. 29). Von größerer Bedeutung ist die Anwendung, die Leibniz mit seinem scharfen Blick für alles, was die mathematische Operationstechnik fördern konnte, in der Behandlung eines Systems von Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten machte. Hier bezeichnet er jeden Koeffizienten durch zwei Stellenzeiger (10, 11, 12, 20, 21, $\cdots$), von denen der eine die Gleichung, der andere die Unbekannte angibt, zu welcher der Koeffizient gehört. Er kann somit in übersichtlicher Weise eine Regel für das aufstellen, was sich durch die Elimination schließlich ergibt. Diese Regel ist mit derjenigen für die Bildung der Determinante der Gleichungen identisch. Sie findet sich sowohl in einem Briefe an de l'Hospital als in seinen hinterlassenen Papieren. In letzteren zeigt er zugleich, wie man die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen höherer Grade auf eine Elimination aus mehreren Gleichungen 1. Grades, also auf die Bildung einer Determinante zurückführen kann. Seine Methode ist dieselbe wie die später von Euler gefundene und nach ihm benannte. Auch hier und, wo Leibniz sonst mit mehreren Gleichungen oder Polynomen mit einer Unbekannten zu tun hat, bezeichnet er die Koeffizienten durch zwei Stellenzeiger, welche beziehungsweise das Polynom und diejenige Potenz der Unbekannten angeben, zu der der Koeffizient gehört.

Auf eine ähnliche Übersichtlichkeit zielt Leibniz ab, wenn er in seiner *Characteristica geometrica* (S. 76) die geometrischen Operationen und Schlußfolgerungen in einer Zeichensprache darstellt. Es würde jedoch zu weitläufig sein, sich hier darauf einzulassen, da sein Vorschlag nie zu praktischer Anwendung gekommen ist.

Die allmählich verbesserte algebraische Zeichensprache und die sich allmählich weiter verbreitende Fertigkeit in ihrer Handhabung als Operationssprache kam nicht zum wenigsten dem Studium der algebraischen Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten zu gute. Die hierher gehörige Bestimmung von gleichen Wurzeln und von Grenzen, zwischen denen eine oder mehrere Wurzeln liegen, sowie die näherungsweise Berechnung der Wurzel werden wir in Verbindung mit den infinitesimalen

Untersuchungen besprechen, die oft mit ähnlichen algebraischen Hilfsmitteln ausgeführt wurden. Andere Bemühungen mußten natürlich darauf ausgehen, algebraische Auflösungen von Gleichungen höheren Grades als des vierten zu finden, eine Aufgabe, die sowohl Tschirnhaus als Leibniz während ihres Aufenthaltes zu Paris beschäftigte.

Als ein naheliegendes Mittel zur Lösung dieser Aufgabe mußten solche Umformungen erscheinen, durch die ein Glied weggeschafft wird. Gelang es alle Glieder außer dem ersten und dem letzten wegzuschaffen, so war die Gleichung auf eine Wurzelausziehung zurückgeführt. Tschirnhaus hat denn auch ein bestimmtes Verfahren zu einer solchen Wegschaffung mehrerer Glieder ersonnen und in den *Acta eruditorum* veröffentlicht.

Ist

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

die gegebene Gleichung, so wird

$$y = x^p + b_1 \; x^{p-1} + \cdots + b_{p-1} x + b_p$$

gesetzt, wo $p < n$ ist. Wenn man aus diesen Gleichungen x wegschafft, so erhält man eine Gleichung in y, die gleichfalls n^{ten} Grades sein muß, was Tschirnhaus auch hervorhebt, und was man daraus ersehen kann, daß jeder Wurzel der gegebenen Gleichung nur ein Wert von y entspricht. Indem die Koeffizienten der neuen Gleichung durch die p beliebigen Größen $b_1, b_2, \cdots, b_p$ ausgedrückt werden, müssen diese sich so bestimmen lassen, daß p von den Koeffizienten der umgeformten Gleichung 0 werden. Ist $p = n - 1$, so werden sie solche Werte erhalten können, daß die Koeffizienten der $n - 1$ mittleren Glieder 0 werden.

Daß Tschirnhaus dadurch jedoch nicht, wie er sich das Ansehen gibt, eine algebraische Auflösung der Gleichungen n^{ten} Grades gefunden hat, beruht darauf, daß die Bestimmung der Hilfsgrößen b die Auflösung von Gleichungen solcher Grade erfordert, die sich bald höher gestalten müssen als der Grad der gegebenen Gleichung selbst. Gleichungen 3. und 4. Grades lassen sich auf diese Weise lösen; was erstere betrifft, so führt Tschirnhaus selbst die Auflösung durch. Daß sie sich aber durchführen lasse, auch wenn die Gleichung 5. Grades ist, war schon vor der Veröffentlichung seines Verfahrens von Leibniz bezweifelt worden, dem die Methode früher mitgeteilt worden war, und der aus eigenen Versuchen, die Gleichung 5. Grades zu lösen, mit der Sache vertraut war. Er äußert sogar in einem Briefe an Tschirnhaus, er glaube nicht, daß dessen Methode, besondere Fälle ausgenommen, bei Gleichungen höheren Grades (als des vierten) von Nutzen sein werde. Ja, er glaubt hierfür sogar einen Beweis zu besitzen. Daß nicht nur diese Behauptung der Unmöglichkeit der Auflösung mittelst

Tschirnhaus' Methode richtig ist, sondern daß sich Gleichungen 5. und höheren Grades überhaupt nicht algebraisch lösen lassen, hat im 19. Jahrhundert Abel bewiesen.

Trotz der Warnung Leibnizens veröffentlichte Tschirnhaus seine Methode ohne jegliche Bemerkung über die Grenzen ihrer Anwendbarkeit, vielleicht in der Hoffnung, daß die allgemeine Durchführung doch dereinst gelingen werde. Was die Gleichungen 5. Grades betrifft, so ist es erst nach seiner Zeit gelungen, seine Methode zur Zurückführung auf die Form

$$x^5 + ax + b = 0$$

anzuwenden.

Zu neuen die algebraischen Gleichungen betreffenden Ergebnissen brachte es auch Newton in seiner *Arithmetica universalis*, die allerdings erst 1707 von seinem Nachfolger in der Professur in Cambridge herausgegeben wurde, aber auf Vorlesungen beruht, die Newton weit früher gehalten hat. Dies Buch geht von denselben auf die Proportionslehre begründeten allgemeinen Definitionen der Rechnungsarten aus, die Descartes benutzt. Von seinem Inhalte werden wir außer dem, was schon erwähnt (S. 214) oder erst später zu erwähnen ist, noch anführen: eine Methode, um durch Einsetzung einfacher Zahlenwerte in ein vorgelegtes Polynom mit gegebenen Zahlenkoeffizienten etwaige rationale Faktoren 1. oder 2. Grades zu finden; eine der Descartesschen Zeichenregel (S. 212) für die Bestimmung der Anzahl positiver und negativer Wurzeln einer Gleichung entsprechende Regel, die die wirkliche Anzahl imaginärer Wurzeln ergeben sollte, die aber nicht immer Stich hält und nur der erste Versuch in einer Richtung ist, in der erst Sturm das Ziel erreichen sollte; schließlich eine allgemeine Regel für die Bildung derjenigen Gleichungen, durch welche die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung allmählich mittelst der Koeffizienten dieser Gleichung ausgedrückt werden. Girard hatte schon diese Summen bis auf die Summe der vierten Potenzen bestimmt (S. 109). Beweise der hier angeführten Ergebnisse, die z. B. bei der Ausführung der zu Tschirnhausens Methode gehörigen Elimination nützlich sein könnten, teilt Newton nicht mit. Sein Buch enthält übrigens zahlreiche Anwendungen der Algebra auf die Lösung geometrischer und anderer Aufgaben.

III.

Entstehung und erste Entwickelung der Infinitesimalrechnung.

1. Die Mechanik zu Anfang der neueren Zeit.

In Betreff des genaueren, logisch bestimmten und allgemeineren Begriffes der Funktion, der sich in der neuesten Zeit gebildet, hat man darauf hingewiesen, daß sich der ältere Begriff, der in den Jahrhunderten vorbereitet wurde, mit denen wir uns in diesem Werke beschäftigen, unbewußt nach dem Muster der Funktionen gestaltet habe, mit denen man es in der Mechanik zu tun hat. Dies trifft zu. Nicht nur veranlaßten die Forderungen, welche die Anwendungen auf die Mechanik stellten, viele der wichtigsten infinitesimalen Untersuchungen — und infinitesimale Untersuchungen betrafen tatsächlich Funktionen auch schon, bevor der Funktionsbegriff ausdrücklich aufgestellt war —, sondern es wurde auch die Vorstellung von der gleichzeitigen Variation der Größen selbst, von denen die eine stets dasjenige wird, was wir jetzt als Funktion der andern bezeichnen, eng mit der Vorstellung der Bewegung verknüpft. Gab man auch dieser Bewegung eine abstraktere Bestimmung, so bestand ihr Vorbild doch in derartigen Bewegungen, die tatsächlich in der Natur stattfinden. Die Vorstellung, die man der Natur entnahm, war die von der Stetigkeit sowohl der Funktionen, als ihrer Differentialquotienten aller Ordnungen, einer Stetigkeit, die nur dann eine Unterbrechung erleiden konnte, wenn die Funktion für einzelne bestimmte Werte der unabhängigen Variablen unendlich wird. Diese Vorstellung wird unmittelbar der Vorstellung von den natürlichen Bewegungen oder Veränderungen entommen, die in der Zeit stattfinden, denn in der Natur kann keine endliche Veränderung stattfinden, ohne dazu Zeit zu gebrauchen; kein Teilchen kann seinen Platz wechseln, ohne eine Reihe von kontinuierlich aufeinanderfolgenden Zwischenstationen zu passieren. Im Anschluß hieran hat man es bis weit ins 19. Jahrhundert hinein kaum der Mühe wert gehalten, Funktionen zu untersuchen, welche die Stetigkeits-

bedingungen nicht erfüllen, auch nicht, wenn man ihnen auf analytischem Wege begegnete.

Bis zu einem gewissen Grade hingen eben diese Stetigkeitsanforderungen auch mit der aus dem Altertum übernommenen geometrischen Darstellung der Größen zusammen. Eine Strecke stellt eine Größe dar, die sich kontinuierlich variieren läßt; wenn man schon im Altertum geometrische Örter anwendete, um unvollkommen bestimmte Punkte und Linien und somit auch indirekt den Zusammenhang zwischen gegenseitig abhängigen Größen darzustellen, so setzte man tatsächlich voraus, daß die so gefundenen Kurven oder Flächen kontinuierlich seien. Wie bekannt, wurde jedoch die Stetigkeit nicht als eine solche Voraussetzung aufgefaßt, mit der man derart rechnen dürfe, daß man z. B. das von allen rationalen Größen Geltende unmittelbar auch auf die irrationalen oder das von allen Sehnenvielecken einer Kurve Geltende ohne weiteres auch auf die Kurve selbst übertragen könnte. Nein, wenn auch nicht zu bezweifeln ist, daß man sich durch solche Übertragungen auf die allgemeinen Sätze hinleiten ließ, so waren die Sätze selbst doch noch nicht bewiesen, bevor man sie durch Eudoxus' Proportionslehre oder den Exhaustionsbeweis sicher stellte, und auf solche vollständige Beweise beschränken sich eben die auf uns gekommenen Darstellungen.

Trotz der logischen Berechtigung dieser Bedenklichkeiten, die sich bis auf Zenon von Elea zurückführen lassen (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 67), und an denen die griechischen Mathematiker festhielten, obgleich Aristoteles die physikalische Berechtigung der Sophismen Zenons widerlegt hatte, ließ man sich und seinen Lesern dadurch ein kräftiges Mittel entgehen, um den Zusammenhang zwischen variablen Größen leichter zu überblicken. Viel wäre in der Tat nicht zu befürchten gewesen, wenn man in der genannten Beziehung weniger ängstlich gewesen wäre; denn teils war in den Fällen, mit denen man sich beschäftigte, die vorausgesetzte Stetigkeit tatsächlich vorhanden, so daß die Resultate schließlich doch richtig wurden, teils konnte man hinterher diese Richtigkeit stets durch die im Altertum angewendeten Beweisverfahren sicher stellen.

In der Neperschen Definition der Logarithmen (S. 134) haben wir schon ein Beispiel des Nutzens einer solchen mechanischen oder vielmehr kinematischen Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Variationen zweier Größen kennen gelernt. Derartige Darstellungen wurden um so natürlicher, als kurz darauf Galilei die Bewegung eines Punktes selbst zum Gegenstand seiner Untersuchungen machte. Diese betrafen zwar die eigentliche physikalische Bewegung und wurden durch Versuche bestätigt; sie wurden aber doch auf Grund mathematischer Betrachtungen unternommen, die sich gleich-

wohl auf Bewegungen nach einem willkürlich vorausgesetzten mathematischen Gesetz und somit auch auf Größen anwenden ließen, deren Variation man als Bewegung darstellte. Wir werden sehen, daß die Arbeiten Galileis wirklich nach dieser Richtung auf die Infinitesimalmethoden Einfluß gewannen.

In der Hauptsache hat sich gegenwärtiges Buch allerdings an die Geschichte der Mathematik im engeren Sinne zu halten; obige Bemerkungen zeigen aber, daß es für ihr rechtes Verständnis notwendig ist, auch die Nachbargebiete zu streifen, besonders aber dasjenige nicht auszuschließen, was wir heute rationelle Mechanik nennen. Wie im Altertum wurde diese auch in den Jahrhunderten, die uns hier beschäftigen, von Mathematikern und im Bunde mit der Mathematik betrieben. Das Gesagte läßt es demnach als zweckmäßig erscheinen, die Untersuchungen Galileis über die Bewegung eines Punktes dem Abschnitt über die Infinitesimalrechnung voranzustellen, und ebenso können andere mechanische Untersuchungen, namentlich statische, gleich hier ihren passenden Platz finden, da besonders neue Bestimmungen des Schwerpunktes verschiedener Körper zu den Bestimmungen infinitesimaler Natur gehörten, die man zuerst unternahm. Während aber die neue Lehre von der Bewegung den Infinitesimaluntersuchungen sowohl neue Gesichtspunkte als neue Gebiete eröffnete, stehen die statischen Untersuchungen in stärkerem Maße mit dem Altertum in Verbindung. Mit ihnen wollen wir daher beginnen.

Die hoch entwickelte Baukunst der Renaissance setzt eine Bekanntschaft wenigstens mit den praktischen Anwendungen der Mechanik und ein besonderes Interesse für sie voraus. Das in dieser Beziehung bei Heron und Pappus Überlieferte wurde mit vielem Eifer studiert und veranlaßte u. a. die Wiederaufnahme verschiedener mechanischer Kunststücke. So ist z. B. die berühmte Uhr im Straßburger Münster nach Anweisungen und Beschreibungen bei den Alten konstruiert; namentlich ist die Idee zu dem großen unten angebrachten Himmelsglobus, der im Laufe von 24 Stunden eine Umdrehung macht, aus einer Beschreibung des Archimedesschen Planetariums geschöpft. Man beschäftigte sich auch mit den mehr rationellen Fragen, besonders mit den zu der schon im Altertum entwickelten Statik gehörigen, die ja auch gerade den Teil der Mechanik ausmacht, der bebonders für Baumeister von Nutzen ist. So fand der auch als praktischer Architekt und Mathematiker hervorragende große Künstler Lionardo da Vinci aufs neue die richtige Bestimmung des Schwerpunktes der Pyramide. Die eingehendere Bekanntschaft mit Archimedes führte dann weiter und regte u. a. Commandino, den Übersetzer des Pappus, und Maurolico, den Übersetzer des Archimedes selbst, zur selbständigen Behandlung hier-

her gehöriger Fragen, besonders solcher an, die das von Archimedes Hinterlassene ergänzen konnten. Namentlich hat man ihnen Beweise für die Richtigkeit des von Archimedes angewendeten Satzes zu verdanken, daß der Schwerpunkt eines Abschnitts von einem Umdrehungsparaboloid auf der Achse des Abschnittes in demjenigen Punkte liege, dessen Entfernungen von den Schnittpunkten dieser Geraden mit dem Paraboloid und mit der Grundfläche sich wie 2 zu 1 verhalten.

Der Beweis hat die eleganteste Form bei Maurolico, der in einem Anhang zu seiner Ausgabe der Archimedesschen Schrift über das Gleichgewicht ebener Figuren dessen Untersuchungen über diesen Gegenstand fortsetzt und besonders den Schwerpunkt gewisser Körper bestimmt. Der Grundgedanke seines Beweises ist, daß im Abschnitt eines Paraboloids die Flächen der der Grundfläche des Abschnittes parallelen Schnitte sich wie die Quadrate der Ordinaten eines durch die Achse des Segmentes gehenden Schnittes, also wie die Abscissen verhalten, die sie auf dieser Achse abschneiden. Die Bestimmung des Schwerpunktes wird dadurch dieselbe wie in einem Dreieck, in welchem die Achse des Paraboloids Mittellinie ist. Der Beweis für diese Übereinstimmung wird exakt durchgeführt, indem teils cylindrische Scheiben in und um die durch die Schnitte abgetrennten Scheiben der Körper, teils ebenso Parallelogramme in und um die Trapeze, in die das Dreieck auf entsprechende Weise geteilt wird, ein- und umbeschrieben werden.

Später hat Luca Valerio (1552—1618) in einer 1604 erschienenen Schrift *De centro gravitatis solidorum* auf ähnliche Weise die Schwerpunkte derjenigen Abschnitte und Scheiben von Umdrehungsellipsoiden und Umdrehungshyperboloiden (um die Hauptachse) gefunden, die durch Ebenen abgeschnitten werden, welche auf der Umdrehungsachse senkrecht sind. Schon Archimedes hatte den Rauminhalt der nämlichen Körper gefunden (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 183). Beispielsweise wollen wir hier die Fläche betrachten, die durch Drehung der Hyperbel $y^2 = 2px + \alpha^2 x^2$ um die x-Achse erzeugt wird. Valerio, dem von den Alten her die Eigenschaft bekannt war, die wir durch diese Gleichung ausdrücken, bemerkt, daß eine auf der Achse senkrechte Ebene die Fläche in einem Kreise schneiden wird, der die Summe der Kreise ausmacht, in denen sie das Paraboloid und den Kegel schneidet, die bezw. durch die Umdrehung der Parabel $y^2 = 2px$ und durch die Umdrehung der Geraden $y = \alpha x$ erzeugt werden. Daraus folgert er, daß der Hyperboloidabschnitt die Summe eines Paraboloidabschnittes und eines Kegels wird. So läßt sich nicht nur, wie bei Archimedes, der Rauminhalt, sondern auch der Schwerpunkt bestimmen.

Während der Schwerpunkt des Paraboloidabschnittes durch Über-

tragung der bekannten Schwerpunktsbestimmung eines Dreiecks gefunden wurde, übertrug Valerio in einer späteren Schrift die bekannte Schwerpunktsbestimmung einer Halbkugel auf die einer ebenen Fläche, welche aus zwei kongruenten halben Parabelabschnitten besteht, deren jeder von der Achse, einer zugehörigen Ordinate und dem dazwischenliegenden Parabelbogen begrenzt wird, und die in der Weise symmetrisch nebeneinander gelegt sind, daß sie eine gemeinschaftliche Ordinate besitzen. Wählt man diese zur Ordinatenachse, so läßt sich die Gleichung für eine der Parabeln als $x = \frac{b^2 - y^2}{2p}$ schreiben, woraus folgt, daß die Strecken, die innerhalb der ebenen Fläche auf den Parallelen zu der Parabelachse abgeschnitten werden, den Kreisen proportional sind, in welchen die Ebenen, welche man durch diese Parallelen senkrecht zur Ordinatenachse zieht, die Kugel schneiden, welche durch Drehung des Kreises $x^2 = b^2 - y^2$ um die Ordinatenachse erzeugt wird. Die ebene Fläche erhält daher den nämlichen Schwerpunkt wie die Halbkugel. Den so gefundenen Schwerpunkt benutzt Valerio für eine eigentümliche Quadratur der Parabel.

Die Untersuchungen Valerios zeugen sowohl von einem klaren Studium der infinitesimalen Untersuchungen aus dem Altertum als von großer persönlicher Erfindsamkeit. Sie fanden auch lebhafte Anerkennung bei Galilei und haben vermutlich auf Cavalieri einigen Einfluß ausgeübt; dieser hat nämlich, wie wir sehen werden, das Prinzip, das tatsächlich für Valerio maßgebend war, ausdrücklich ausgesprochen und in reichem Maße angewendet.

Auch eine etwas spätere Schwerpunktsbestimmung verdient hier wegen der in ihr enthaltenen eigentümlichen infinitesimalen Behandlung und wegen der Form hervorgehoben zu werden, unter der sie auftritt; wir meinen de la Failles Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisausschnittes; sie sowie die mit ihr verknüpfte Bestimmung des Schwerpunktes eines elliptischen Ausschnittes bildet das Thema einer 1632 von ihm herausgegebenen Schrift. Der Gedankengang, auf dem sie beruht, läßt sich ungefähr folgendermaßen wiedergeben.

Kennt man (Fig. 11) den Schwerpunkt T eines Kreisausschnittes AOB, auf dessen Mittellinie OD er liegen muß, so kann man den Schwerpunkt P eines anderen Ausschnitts AOC mit demselben Radius, aber beliebigem Zentriwinkel bestimmen. Man legt die beiden Ausschnitte an dieselbe Seite eines gemeinschaftlichen begrenzenden Radius AO an. Der Schwerpunkt P des Ausschnittes AOC muß

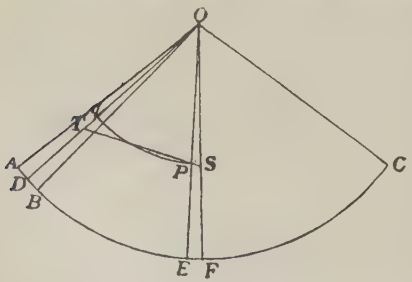

Fig. 11.

auf der Halbierungslinie OE des Winkels AOC, der Schwerpunkt S des Ausschnittes BOC auf der Halbierungslinie OF des Winkels BOC liegen. Ferner müssen die Schwerpunkte T, P, S so auf einer Geraden gelegen sein, daß

$$\frac{TP}{PS} = \frac{BOC}{AOB} = \frac{arc\,BF}{arc\,DB} = \frac{arc\,DE}{arc\,EF},$$

da $\sphericalangle EOF = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOB$. Wenn also die Bogenlängen bekanntsind, besteht die Aufgabe darin, die Gerade TPS derart durch T zu ziehen, daß die Strecken TP und PS, die durch die gegebenen Geraden OE und OF abgeschnitten werden, ein gegebenes Verhältnis bilden.

Die Konstruktion wird, wie leicht zu ersehen ist, und wie Guldin später in einer Besprechung derselben bemerkt, illusorisch, wenn der Ausschnitt AOB den ganzen Kreis ausmacht; man kann also den Umstand, daß der Schwerpunkt des Kreises in den Mittelpunkt fällt, nicht benutzen. Um einen Ausschnitt zu erhalten, der einen bekannten Schwerpunkt hat, nimmt de la Faille daher, wir wir heute sagen würden, zu einem solchen seine Zuflucht, dessen Zentriwinkel AOB unendlich klein ist, und dessen Schwerpunkt T somit den Radius OD teilt, der jetzt mit OA zusammenfällt, so daß $OT = \frac{2}{3}OA$. In diesem Falle wird die Gerade TP so zu legen sein, daß $\triangle OPT$ dem von OP und OT begrenzten Kreisausschnitt OPQ um O mit dem Radius OP gleich wird. Daß dies richtig ist, sieht man leicht; denn das Verhältnis $\frac{TP}{PS}$ ist dasselbe wie das Verhältnis zwischen den Höhen auf PO in den Dreiecken OPT und SOP. Die erstere dieser Höhen ist der angenommenen Konstruktion zufolge gleich dem Bogen PQ. Die letztere wird im Grenzfalle die Strecke sein, die der Winkel EOF auf demselben Bogen abschneidet. Also wird dieser Konstruktion gemäß im Grenzfalle

$$\frac{TP}{PS} = \frac{arc\,QP}{arc\,PS} = \frac{arc\,DE}{arc\,EF}.$$

Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, wie die hier angegebene Konstruktion ausgeführt und benutzt wird, und nur betonen, daß der Verfasser hier selbständig eine neue und korrekte Grenzbestimmung vollführt und ihr in völliger Übereinstimmung mit den Forderungen der antiken Geometrie eine exakte Darstellung gibt. Wie weit er in dieser Beziehung geht, zeigt sich darin, daß er es für notwendig findet, seine Bestimmungen mit Beweisen für die Existenz der von ihm benutzten Figuren einzuleiten. So besagt sein erster Satz, daß man, wenn ein Kreisausschnitt gegeben ist, durch den einen Endpunkt des Bogens eine Gerade ziehen kann, die nebst den beiden Radien (von denen der eine verlängert ist) ein Dreieck von demselben

Inhalt wie dem des Ausschnittes begrenzt. Der 8. Satz verlangt in einem gegebenen Kreis die Bestimmung eines solchen Ausschnittes, daß, wenn auf die im ersten Satze gewünschte Weise ein Dreieck hergestellt wird, der verlängerte Radius, der eine Seite des Dreiecks bildet, den Radius um eine Strecke übertrifft, die kleiner als eine beliebig gegebene ist. Gerade eine Forderung dieser Art bietet das Material für einen exakten Exhaustionsbeweis dar.

So durchgeführt, kann sich die Lösung einer einzelnen Aufgabe durch einen eleganten Kunstgriff, der eben nur auf sie angewendet wird, zum Inhalte einer ganzen Schrift gestalten. So wird es verständlich, daß in einer Zeit, in der von verschiedenen Seiten neue Ideen wie die hier angewendete in reichem Maße aufkamen, die Ausarbeitung jeder einzelnen für sich in den überlieferten sicheren, aber weitläufigen Formen nicht zu bewältigen war. Kepler hatte sich damals ihrer schon entledigt, und dasselbe war wenig später bei Cavalieri der Fall. Derjenige, der de la Failles Schwerpunktsbestimmungen fortsetzte, sein Ordensbruder Paul Guldin, hielt allerdings in seinem großen Werke *Centrobaryca* im Gegensatz zu den genannten großen Fortschrittsmännern an den alten Formen fest, die ihn jedoch, wie wir sehen werden, nicht immer gegen Irrtümer sicherten; um aber denselben Schwerpunkt wie de la Faille zu finden, wendete er Methoden an, die zugleich weitergehende Anwendungen gestatteten.

Die Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisausschnittes hängt bei Guldin von der Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens ab. Um diesen zu finden, benutzt er, wenigstens in dem vollständigeren Beweis in seinem 3. Buche, den Momentensatz betreffs ebener Figuren: das Produkt der Größe der ganzen ebenen Figur in den Abstand des Schwerpunktes von einer festen Linie in der Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Teile in Bezug auf die Linie.

Diesen Satz wendet er (Fig. 12) auf die Momente einer geraden Anzahl aufeinander folgender Seiten eines regelmäßigen Polygons $ABCDE$ in Bezug auf den mit AE parallelen Durchmesser MN an. Wenn F der Mittelpunkt der Sehne AB ist und wir durch die kleinen Buchstaben die Projektionen auf MN bezeichnen, so ist das Moment $AB \cdot Ff = ab \cdot cF$. Durch die nämliche Umformung der Momente der übrigen Seiten und durch Vermehrung der Seitenanzahl ins Unendliche findet Guldin leicht, daß sich ein Kreisbogen zu seiner Sehne

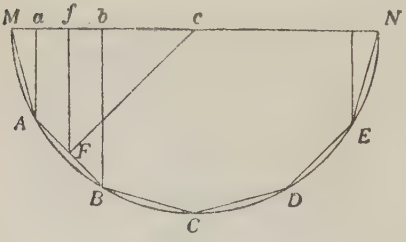

Fig. 12.

verhält, wie sich der Radius zum Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Bogens und dem Mittelpunkt des Kreises verhält.

Die angewendete Umformung der Momente ist ganz dieselbe, wie sie Archimedes in seiner Berechnung der Kugeloberfläche zur Umformung der krummen Oberflächen anwendet, die durch Drehung der Polygonseiten um MN erzeugt werden. Guldin, der gerade diese Umformung gewiß von Archimedes erlernt hat, mußte durch eine Verallgemeinerung bei einem Vergleiche seiner eigenen Anwendung mit der Archimedesschen finden, daß ein ebener Bogen durch Drehung um eine Achse in seiner Ebene eine Oberfläche erzeugt, deren Flächeninhalt durch das Produkt der Länge des erzeugenden Bogens in den Weg ihres Schwerpunktes gemessen wird. Außer diesem Satze fand Guldin auch den Satz, den man erhält, wenn der Bogen mit einer ebenen Fläche und die erzeugte Umdrehungsfläche mit dem durch die Drehung der Fläche erzeugten Umdrehungskörper vertauscht werden. Daß sich diese Sätze, wenn auch in aller Kürze und ohne Beweis, bei Pappus ausgesprochen finden, scheint weder Guldin noch seine Zeitgenossen bemerkt zu haben. Er benutzte sie vielfach, um den Inhalt von Umdrehungsflächen und -körpern zu messen. Namentlich, was letztere betrifft, waren freilich die Resultate in den meisten Fällen schon vorher von Kepler und Cavalieri gefunden. Wir werden später ihre Werke zu besprechen haben, die von Guldin, auf dessen eigene Untersuchungen sie indes sicher befruchtend eingewirkt haben, scharf kritisiert wurden.

Weniger Glück hatte Guldin bei der Aufstellung eines anderen allgemeinen Satzes, den er kurz berührt, nämlich, daß der Schwerpunkt einer Umdrehungsfläche mit dem Schwerpunkte der Figur zusammenfallen müsse, welche auf einer Meridianebene durch die Umdrehungsfläche ausgeschnitten wird. Dieser Satz ist richtig, wenn die Umdrehungsfläche eine ganze oder abgestumpfte Kegelfläche ist; wenn Guldin ihn aber auf eine beliebige Umdrehungsfläche übertragen will, so übersieht er, daß der jeweilige Inhalt der unendlich kleinen Kegelstumpfflächen, aus denen sich eine beliebige Umdrehungsfläche zusammensetzen läßt, nicht den entsprechenden Trapezen der Meridianebene proportional ist.

Wir greifen zeitlich etwas zurück, wenn wir nun erst Simon Stevins statische Arbeiten besprechen. Aus seinen Schwerpunktsbestimmungen haben wir keine anderen Gesichtspunkte hervorzuheben als diejenigen, die sich schon bei Commandino und Maurolico finden; dagegen findet sich in seiner Hydrostatik, die sich übrigens der Archimedesschen Behandlung desselben Gegenstandes anschließt, eine neue Anwendung des Schwerpunktes. Der Druck einer schweren Flüssigkeit auf eine ebene Fläche, die der freien Oberfläche nicht parallel ist, wird nämlich durch einen auf jener Fläche

stehenden, schief abgeschnittenen Cylinder ausgedrückt, dessen Höhe überall dem Abstand von der freien Oberfläche gleich ist; das Druckzentrum wird die Projektion des Schwerpunktes des Cylinders auf die gedrückte Fläche sein.

Aus Stevins eingehender und zusammenhängender Behandlung der Statik haben wir ferner seine Bestimmmung der Bedingung für das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene zu erwähnen. Er betrachtet ein dreiseitiges Prisma mit einer unteren wagerechten und zwei schiefen Seitenflächen. Um dies Prisma denkt er sich eine geschlossene homogene Kette gelegt. Es wird als selbstredend betrachtet, daß diese Kette im Gleichgewicht sein wird. Würde sie die eine schiefe Ebene hinab- und somit die andere hinaufgleiten, so würde nämlich der Homogeneität wegen dadurch doch keine Veränderung geschehen, und die Bewegung müßte sich fortsetzen, so daß man hier ein *perpetuum mobile* haben würde. Da nun der unter der wagerechten Seitenfläche liegende Teil sich selbst im Gleichgewicht hält, muß also auch zwischen den auf den beiden Seitenflächen liegenden Teilen Gleichgewicht bestehen.

Von hier aus geht Stevin weiter auf die Lehre von der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte über. Es zeigt sich nämlich bei der angeführten Betrachtung, daß das Gewicht P des auf einer Seitenfläche ruhenden Kettenstückes, das der Länge dieser schiefen Ebene proportional ist, in der Richtung der Kette selbst nur als eine der Höhe der schiefen Ebene proportionale Kraft oder als $P \cos v$ wirkt, wo v der durch die Kette und das Lot gebildete Winkel ist. Stevin benutzt also den entgegengesetzten Weg von dem, den wir einschlagen, wenn wir die Bedingung des Gleichgewichts auf der schiefen Ebene durch die Auflösung der Kräfte zu ermitteln suchen.

Den Beweis für den Satz vom Gleichgewichte auf der schiefen Ebene liefert Galilei durch das Hebelprinzip. Es ist nämlich für das Gleichgewicht gleichgültig, ob man annimmt, daß ein Körper eine schiefe Ebene ungehindert hinabgleiten oder sich in einer zur Länge der schiefen Ebene senkrechten Ebene um einen festen Punkt der Normale der schiefen Ebene drehen kann. Das Moment des Gewichts des Körpers mit Bezug auf den Punkt wird sodann dem Moment des Strebens, die schiefe Ebene hinabzugleiten, gleich sein. Diese und das Gewicht müssen sich also umgekehrt wie die Entfernungen ihrer Kraftlinien von dem festen Punkt verhalten; diese Entfernungen verhalten sich hinwiederum wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe. Galilei bemerkt ferner, daß zwischen Körpern auf zwei schiefen Ebenen das Gleichgewicht besteht, wenn sie so miteinander verbunden sind, daß die Höhen, um welche die eine sinkt und die andere gleichzeitig steigt, sich umgekehrt wie die Gewichte verhalten. Diesem Prinzip gab sein Schüler Torricelli eine allgemeinere Form, indem er sagte,

daß Gleichgewicht vorliege, wenn bei einer Verschiebung der gemeinschaftliche Schwerpunkt weder falle noch steige. In Verbindung mit ähnlichen Betrachtungen, wie sie Stevin in seinen Untersuchungen über zusammengesetzte Flaschenzüge anstellt, geben die hier genannten Bedingungen für das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene die ersten Andeutungen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten ab.

Noch größere Bedeutung, auch für die Entwickelung der Mathematik, als derartige Erweiterungen der schon seit dem Altertum existierenden Lehre vom Gleichgewicht bekam indes die Grundlegung einer wissenschaftlichen Lehre von der Bewegung durch Galilei. Einen vereinzelten Vorgänger auf diesem Gebiete hatte er allerdings im 16. Jahrhundert an Benedetti, der das Trägheitsgesetz erkannt oder doch eingesehen hatte, daß die Ursachen und Kräfte, auf deren Erkenntnis es ankommt, solche sind, welche die gleichförmige, geradlinige Bewegung verändern, nicht aber, wie man bisher angenommen, solche, die an und für sich den Körpern ihre jeweilige Bewegung verschaffen. Diese Entdeckung verdient um so mehr hervorgehoben zu werden, da man der älteren Betrachtungsweise noch in den Versuchen Keplers begegnet, die Bewegungen der Himmelskörper zu erklären, die er in seinen Gesetzen so genau beschrieben hat. Benedetti erklärt, mit dem Trägheitsgesetze übereinstimmend, die Zentrifugalkraft durch das Streben der Körper nach geradliniger Bewegung; die wachsende Geschwindigkeit des Falles erklärt er wie Galilei, ohne daß er jedoch diese Erklärungen zu genaueren Bestimmungen benutzt. Auch in einem anderen Punkte nähert er sich Newtons Begriff von der Kraft, indem er sagt, daß die Beschleunigung eines und desselben schweren Körpers in verschiedenen Medien seinem verschiedenen Gewichte in ihnen, das sich nach dem Archimedesschen Prinzip berechnen läßt, proportional ist. Hierbei übersieht er jedoch den Widerstand, den das Medium neben seiner Tragkraft ausübt.

Galileis Lehre von der Bewegung findet sich in seinen berühmten *Discorsi* (1638). In dem dritten Gespräch untersucht er die geradlinige Bewegung mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit. Sie wird dadurch charakterisiert, daß die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes in jedem Augenblick der Zeit proportional ist, welche die Bewegung bereits gedauert hat. Wir können dies durch die Gleichung

$$v = gt$$

ausdrücken, in der t die Zeit, v die Geschwindigkeit und g einen konstanten Faktor bezeichnen. Galilei beweist sodann, daß die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

ist oder, nach seiner Ausdrucksweise, die nämliche ist wie diejenige, welche in derselben Zeit bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit von $\frac{1}{2} v$ zurückgelegt werden würde. In seinem geometrischen Beweis hierfür benutzt er eine Darstellung durch Koordinaten, deren Gebrauch, wie schon hervorgehoben, keineswegs vor Fermat und Descartes unbekannt war. Die Zeit t dient als Abscisse, die Geschwindigkeit v als Ordinate. Wenn v konstant wäre, so würde der Endpunkt der Ordinate eine Parallele zur Abscissenachse durchlaufen und sich der durch die Bewegung zurückgelegte Weg als das Rechteck darstellen, das zwischen dieser Parallelen und der Abscissenachse liegt. Diese Bestimmung des zurückgelegten Weges durch eine Fläche läßt sich auch auf andere Bewegungen übertragen. In dem von Galilei besonders betrachteten Falle, in welchem $v = gt$ ist, wird der Endpunkt der Ordinate eine Gerade durchlaufen, und in dem Beweise Galileis wird der zurückgelegte Weg x durch den Inhalt des Dreiecks dargestellt, das durch die Gerade, die Abscisse t und die Ordinate $v = gt$ begrenzt wird. Dies Dreieck ist, wie behauptet, gleich dem Rechteck aus der Zeit t als Grundlinie und $\frac{1}{2} v$ als Höhe. Daß nun diese mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit ausgeführte Bewegung tatsächlich die nämliche ist, wie sie (vom Widerstand der Luft abgesehen) von einem fallenden schweren Körper ausgeführt wird, wird durch Versuche dargetan, auf die wir bald zurückkommen werden.

Im 4. Gespräch untersucht Galilei die Bewegung, die von einem Punkte ausgeführt wird, der mit einer gewissen horizontalen Geschwindigkeit (wir nennen sie u) fortgeschleudert wird und gleichzeitig der Schwere unterworfen ist, d. h. die Wurfbewegung. Da sich die horizontalen Wege, die von der beweglichen Falllinie zurückgelegt werden (und die wir hier als Abscissen x betrachten werden) wie die entsprechenden Zeiten, gleichzeitig aber die durch den Fall zurückgelegten Wege (y) sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, wird die Bahn des Punktes eine Parabel sein. Ihren Parameter bestimmt Galilei als das Vierfache derjenigen Fallhöhe, die vonnöten wäre, um eine der horizontalen Geschwindigkeit beim Anfang des Falles gleiche Geschwindigkeit zu erzeugen. Die Gleichungen

$$x = ut, \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

für die horizontale und die vertikale Bewegung ergeben nämlich

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{u^2} x^2,$$

wo der Parameter $\frac{2u^2}{g}$ gerade das Vierfache von dem Wege $\frac{u^2}{2g}$ ist, auf welchem die Fallgeschwindigkeit u erzielt werden würde. Nennen wir den Parameter $2p$, so ist ersichtlich, daß sich die vertikale Geschwindigkeit gt zu der horizontalen u verhält wie $\frac{2y}{x}$ oder wie $\frac{x}{p}$. Auch dies Resultat, das wir später Torricelli bei seiner Tangentenbestimmung werden anwenden sehen, führt Galilei an. Übrigens stellt er verschiedene Sätze über die Wurfbewegung auf, wie daß die größte horizontale Wurfweite erzielt wird, wenn die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, deren Größe als gegeben betrachtet wird, mit ihrer horizontalen Projektion einen Winkel von 45^0 bildet — was schon Tartaglia behauptet hatte, ohne jedoch die Wurfbewegung erklären zu können — und daß zwei Würfe dieselbe Weite erhalten, wenn die Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten mit ihren horizontalen Projektionen Winkel bilden, die gleich viel über und unter 45^0 sind.

Um das aufgestellte Fallgesetz durch Versuche zu prüfen, vertauschte Galilei den freien Fall mit dem Fall auf einer schiefen Ebene. Er wäre nicht berechtigt gewesen, lediglich aus dem, was er über das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene (S. 242) ermittelt hatte, auf die Reduktion der Fallgeschwindigkeit zu schließen, die bei seinem Verfahren entsteht; er baute aber auf folgendes Prinzip: Ein fallender Körper, der auf verschiedenen Wegen zu der nämlichen Falltiefe gelangt, erhält dieselbe Endgeschwindigkeit, mittelst welcher er wiederum auf anderen Wegen zu derselben Höhe hinaufsteigen kann. Um die Richtigkeit dieses Gesetzes zu erproben, benutzte er ein einfaches Fadenpendel mit einer schweren Kugel. Der Faden schlug, wenn das Pendel in seine Gleichgewichtslage gelangte, gegen einen Nagel, was die Kugel nötigte, sich auf einem Kreis mit kleinerem Halbmesser hinaufzubewegen; auch auf diesem Kreise aber erreichte sie dieselbe Höhe, aus der sie auf dem ersten Kreise herabgefallen war, und dies Ergebnis fand sich immer bestätigt, welcher Punkt des Fadens auch gegen den Nagel anschlug.

Galilei leitete aus seinem Prinzip und aus der Lehre von der Bewegung mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit den Satz her, daß verschiedene Sehnen durch den obersten oder den untersten Punkt eines senkrechten Kreises von fallenden Punkten in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Dadurch gewann er geometrische Lösungen von Aufgaben, wie derjenigen, die schräge Gerade zu finden, durch welche ein schwerer Punkt am schnellsten von einem gegebenen Punkt bis auf eine gegebene Linie hinabfallen wird. Ebenso fand er, daß ein Kreisbogen $\leqq 90^0$ in einer senkrechten Ebene, dessen tiefster Punkt zugleich der tiefste Punkt des Kreises ist, in kürzerer Zeit als eine Reihe aufeinander folgender Sehnen durchlaufen wird, wenn

die Endgeschwindigkeit von der einen als Anfangsgeschwindigkeit auf die nächste übertragen wird; er irrte aber in der damit verknüpften Annahme, der Kreisbogen sei überhaupt die Kurve, auf der ein schwerer Punkt am schnellsten von einem Punkt auf einen anderen fallen werde.

Galilei versuchte auch, sein Prinzip zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels von gegebener Länge zu verwerten Daß diese Dauer (für kleine Ausschläge) von der Größe des Ausschlages unabhängig ist, hatte er schon früher bemerkt (S. 8); mit der theoretischen Untersuchung war er indes nicht durchaus glücklich. Eine solche durchzuführen gelang erst Huygens, indem er namentlich entdeckte, daß die Cykloide die Kurve ist, bei welcher die Gleichzeitigkeit für Ausschläge von beliebiger Größe gilt, und für sie die genaue Schwingungsdauer bestimmte (die sich von hier aus auf den oskulierenden Kreis übertragen läßt). Seine Begründung dieser Bestimmung wollen wir jedoch lieber erst in unserer Zusammenstellung anderer Untersuchungen über diese Kurve besprechen, die in der geschichtlichen Entwickelung der Mathematik eine große Rolle gespielt hat.

Hier werden wir dagegen eine andere Untersuchung besprechen, deren vollständige und genaue Durchführung von Huygens herrührt und sich ebenfalls in seiner Schrift *Horologium oscillatorium* findet, nämlich die Bestimmung der reduzierten Länge eines physischen Pendels, das, der Schwere unterworfen, um eine horizontale Achse schwingt, d. h. die Bestimmung der Länge eines mathematischen Pendels, das dieselbe Schwingungsdauer hat wie das gegebene physische. Bei dieser Berechnung geht Huygens von dem Prinzip aus, daß, wenn in dem Augenblick, in dem der Schwerpunkt des Pendels seine tiefste Stellung erreicht, die einzelnen Teilchen des physischen Pendels von ihren Verbindungen plötzlich befreit würden und jedes mit der Geschwindigkeit, die es in diesem Augenblick hätte, um dieselbe Achse weiter schwingen würde, der gemeinsame Schwerpunkt doch dieselbe Höhe erreichen würde, aus der er während der Gesamtbewegung herabgefallen ist. Nennen wir die Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblicke, da das Pendel seine Gleichgewichtsstellung durchläuft, ω, so hat in diesem Augenblick das Teilchen m mit dem Abstand r von der Achse die Geschwindigkeit ωr und kann somit, wenn es mit dieser Geschwindigkeit weiter schwingt, die Höhe $\frac{\omega^2 r^2}{2g}$ über die Stellung hinaus erreichen, die es in diesem Augenblicke einnimmt. Der Schwerpunkt würde dann, wenn sich alle Teilchen voneinander unabhängig um die Achse bewegten, um

$$\frac{\sum \frac{\omega^2 m r^2}{2g}}{\Sigma m}$$

steigen, wenn wir durch m die Masse oder, wie Huygens sagt, das Gewicht der einzelnen Teilchen bezeichnen. Diese Höhe soll dieselbe sein, aus welcher der Schwerpunkt während der Gesamtbewegung des Pendels gefallen ist, also

$$= (1 - \cos \alpha)\, a,$$

wo α der Winkel ist, den die Ebene durch die Umdrehungsachse und den Schwerpunkt zu Anfang der Bewegung mit der senkrechten Ebene durch die Achse bildete, und a den Abstand des Schwerpunktes von der Achse bezeichnet. Man erhält also

$$(1 - \cos \alpha)\, a \Sigma m = \frac{\omega^2}{2g} \Sigma m r^2.$$

Für das entsprechende mathematische Pendel von der Länge l müßte man

$$1 - \cos \alpha = \frac{\omega^2}{2g}\, l$$

haben. Also wird

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{a \Sigma m}.$$

Wenn alle Teilchen in derselben durch die Achse gehenden Ebene liegen, kann dieser Ausdruck als $l = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r}$ geschrieben werden. Diese für einen besonderen Fall geltende Bestimmung hatte schon früher Descartes aufgestellt, jedoch irrtümlich als allgemeingültig betrachtet, was von Roberval gerügt wurde. Daß Roberval mit der richtigen Bestimmung bekannt war, zeigt sich darin, daß er in der hierüber entstehenden Polemik richtig angibt, die reduzierte Pendellänge eines Kreisausschnittes (mit dem Halbmesser a, dem Bogen b und der Sehne c), der in seiner Ebene um den Mittelpunkt schwingt, sei $\frac{3ab}{4k}$.

Die Untersuchung Huygens', die wir, um uns kurz zu fassen, sehr frei und in moderner Form wiedergegeben haben, erfordert eine neue Infinitesimalberechnung, nämlich die von $\Sigma m r^2$, welcher Ausdruck später den Namen des Trägheitsmoments erhielt. Wie man übrigens sieht, ist sowohl das von ihm angewendete Prinzip als das etwas beschränktere, das Galilei anwendete, in demjenigen einbegriffen, das Leibniz später das Prinzip der lebendigen Kraft genannt hat.

Ähnliche Betrachtungen werden in Huygens' Lehre von dem Zusammenstoße vollständig elastischer Körper geltend gemacht. Die Geschwindigkeiten, teils die vor, teils die nach dem Stoße werden mittelst der Fallhöhen charakterisiert, die zu ihrer Erzeugung notwendig sein würden. Die zwei Höhen, welche der Schwerpunkt der Körper erreichen würde, wenn die Körper vor wie nach dem Stoße bis in die ihren Geschwindigkeiten entsprechenden Höhen gehoben würden, müssen einander gleich sein. Daraus wird sodann ausdrücklich hergeleitet, daß die Summe der Produkte

der Massen (der Gewichte) in die Quadrate der Geschwindigkeiten vor wie nach dem Stoße die gleiche sein solle. In seinen Beweisen verwendet Huygens übrigens auch relative Bewegungen, indem er u. a. die Voraussetzung aufstellt, daß der Stoß auf dieselbe Weise statthabe, möge sich der Raum, auf den sich die Bewegung bezieht, im Ruhestande befinden oder nicht.

Auch in seiner Untersuchung über die Zentrifugalkraft benutzt Huygens einen Vergleich mit der dynamischen Wirkung der Schwere. Wenn sich ein Teilchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Kreise bewegt, so werden die (unendlich kleinen) Strecken *CE, DF* (Fig. 13), um die sich das bewegte Teilchen von der Tangente entfernt, auf der sie sich dem Trägheitsgesetze gemäß weiter bewegen sollte, ganz wie beim Fall dem Quadrat der Zeit proportional. Somit läßt sich die zur Erzeugung dieser Abweichungen nötige beschleunigende Kraft (also auch die entgegengesetzte Zentrifugalkraft) wie die Schwere an der Geschwindigkeit messen, die in einer Zeiteinheit erzeugt würde.

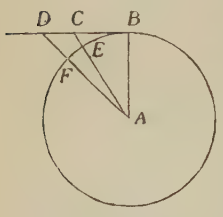

Fig. 13.

2. Integrationen vor der Integralrechnung.

a. Kepler.

Schon die im vorhergehenden besprochenen Schwerpunktsbestimmungen bezeugen, daß man sich nicht nur in die integrationsartigen Bestimmungen bei Archimedes vertieft, sondern sich auch die dabei angewendeten Prinzipien derart zu eigen gemacht hatte, daß man selbst Ähnliches auszuführen vermochte. Eine solche Erweiterungsarbeit mußte jedoch in hohem Grade durch die Ehrfurcht aufgehalten werden, die man mit Recht für die Alten und ihre exakt durchgeführten Beweise hegte. Zu dieser Genauigkeit konnte man es selbst nicht sofort bringen, wenn man die von den Alten behandelten Gebiete überschritt, und zwar schon deshalb nicht, weil die exakte Beweisführung fordert, daß man den betreffenden Satz bereits gefunden hat und mit dem betreffenden Gebiete so vertraut ist, daß man daraus das zu einem vollständigen Exhaustionsbeweise notwendige Material entnehmen kann. Zu wirklich bedeutenden Fortschritten brachte man es erst, als man sich getraute, die neuen Gebiete mit einer leichteren und weniger gut gearbeiteten Ausrüstung als dem Exhaustionsbeweise zu betreten, und Tüchtigkeit genug besaß, um mit diesen leichteren Waffen den Sieg zu erkämpfen.

Eine solche Tüchtigkeit gewann Kepler durch seine tiefgehenden numerischen Untersuchungen. Wie er diese anwendete, um durch Induktion richtige Gesetze für die Bewegungen der Planeten ausfindig zu machen,

so liegen uns auch, wie wir sehen werden, Beispiele von ähnlichen induktiven Integralbestimmungen vor, mit denen er freilich nicht immer das gleiche Glück hatte; man darf auch annehmen, daß er es, eben durch numerische Rechnungen geschult, lernte, mit entschiedenem Glück den Begriff der unendlich kleinen Größen zu gebrauchen, ohne daß er jedoch von diesem in logischer Beziehung so schwierigen Bergriffe irgend welche andere Bestimmung gegeben hat als die in der Benennung selbst enthaltene. Die Weglassung höherer Potenzen von kleinen Größen in den immerhin nur näherungsweisen numerischen Berechnungen hat ihn dann praktisch gelehrt, welche Größen man auch in einer exakten infinitesimalen Bestimmung weglassen darf. Jedenfalls kommen besonders in seinen astronomischen Arbeiten numerische und infinitesimale Bestimmungen öfters in enger Verbindung vor.

Wir wollen zuerst Keplers *Stereometria doliorum* (gedruckt 1615) besprechen, in der er hauptsächlich auf die Bestimmung der zweckmäßigsten Form von Weinfässern (*dolia*) abzielt. Die einleitende theoretische Untersuchung geht jedoch über dasjenige hinaus, was für diese spezielle Frage von Bedeutung sein kann. Er beginnt im ersten Abschnitt seiner Arbeit, in der *Stereometria Archimedea*, mit einer Wiedergabe der Archimedesschen Schrift über die Kugel und den Cylinder. Schon hier ist es auffällig, daß er Archimedes' Beweisführung ganz unberücksichtigt läßt und, statt Exhaustionsbeweise zu führen, unmittelbar die unendlich kleinen Größen einführt. So sagt er, daß die Kugel „gleichsam" (*veluti*) unendlich viele Kegel enthalte, deren Spitzen im Mittelpunkt und deren Grundflächen auf der Oberfläche liegen, und findet so ihren Rauminhalt. Auf dieselbe Weise hatte er schon früher den Inhalt des Kreises gefunden, indem er ihn als aus unendlich vielen unendlich kleinen Dreiecken bestehend betrachtete. Überhaupt ergibt es sich öfters aus seinem „*veluti*", daß er keinen exakten Beweis zu führen bestrebt ist, vielmehr nur auf die Anschauung verweist. An anderen Stellen, wo er Archimedes' und Pappus' Beweise als äußerst sinnreich, aber schwer verständlich betrachtet, macht er die Sache „wahrscheinlich", indem er gewisse induktive und interpolatorische Betrachtungen hinzuzieht. Daß die Oberfläche der Halbkugel der Fläche zweier größter Kreise gleich ist, wird dadurch wahrscheinlich, daß die krumme Oberfläche des eingeschriebenen Umdrehungskegels dem Produkte aus $\sqrt{2}$ und dem größten Kreise, die des umschriebenen Umdrehungskegels aber dem Produkte aus $2\sqrt{2}$ und dem größten Kreise gleich ist; die dazwischen liegende Halbkugel kann sodann passend die mittlere Proportionale zu diesen beiden Größen sein.

Wie weit in dieser Wiedergabe auch die infinitesimalen Bestimmungen von der Archimedesschen Strenge entfernt sind, so zeigt Kepler doch

in dem sich daran anschließenden *Supplementum ad Archimedem*, daß er es verstand, den mit der kürzeren Ausdrucksweise verbundenen leichten Überblick auf eigene Faust anzuwenden, um neue und richtige Resultate zu ermitteln. In diesem Anhang bestimmt er den Rauminhalt der verschiedenen Formen des Wulstes, d. h. des durch die Umdrehung eines Kreises um eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Achse erzeugten Körpers. Zuvor hat er gezeigt, daß der Inhalt eines schief abgeschnittenen Umdrehungscylinders nur von dem Abstand zwischen den Zentren der Grundflächen und von dem kreisförmigen Querschnitt abhänge. Den eigentlichen Kreisring teilt er dann durch Meridianebenen in unendlich viele schief abgeschnittene Cylinder und erkennt dadurch, daß er einem Cylinder mit dem rotierenden Kreise als Grundfläche und mit der Länge der vom Mittelpunkt durchlaufenen Peripherie als Höhe gleich ist.

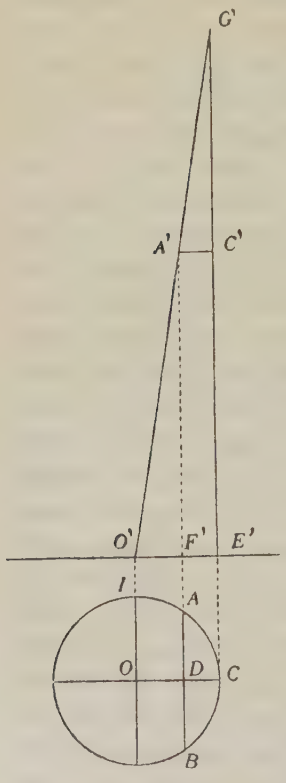

Fig. 14.

Noch dreister wendet Kepler die Infinitesimalmethode bei der Untersuchung des Rauminhaltes des Gebildes an, das durch die Umdrehung eines Kreisabschnittes um seine Sehne erzeugt wird. Er nennt dies Gebilde Apfel oder Zitrone, je nachdem der Abschnitt größer oder kleiner als der Halbkreis ist. Dabei benutzt er einen Satz, den er jedoch weder in voller Allgemeinheit aufstellt noch beweist, der aber aus solchen Infinitesimalbetrachtungen hervorgeht, mit denen er schon vertraut war. Dieser Satz besagt, daß ein Körper, der durch die Umdrehung einer geschlossenen ebenen Figur (F) um eine Achse in derselben Ebene (die jedoch die Figur nicht durchschneidet) erzeugt wird, dem Stück eines geraden Cylinders mit F als Grundfläche gleich ist, das eine folgendermaßen durch die Umdrehungsachse gelegte Ebene abschneidet: von den Loten auf der Grundfläche schneidet sie Strecken ab, die den Peripherien der Kreise gleich sind, deren Halbmesser die Entfernungen der Lote von der Achse sind (d. h. die Tangente ihres Winkels mit der Grundfläche ist $= 2\pi$). Mittelst dieses Satzes beweist er, daß die durch die Umdrehung des Kreisabschnittes ABC (Fig. 14) um die Sehne AB hervorgebrachte Zitrone die Differenz zwischen dem durch Umdrehung des Abschnittes ABC um den der Sehne AB parallelen Durchmesser HI er-

zeugten Ringe und einem Cylinder mit dem Abschnitt ABC als Grundfläche ist, dessen Höhe der Peripherie eines Kreises mit der Zentraldistanz OD der Sehne als Halbmesser gleich ist. Daß dies tatsächlich aus dem aufgestellten Hilfssatze hervorgeht, können wir am besten veranschaulichen, wenn wir sowohl letzteren Körper, als die den Umdrehungskörpern entsprechenden schief abgeschnittenen Cylinder auf eine zur Umdrehungsachse HI senkrechte Ebene projizieren. $O'G'$ ist die Projektion einer Ebene durch den Durchmesser HI, die mit der Grundfläche einen Winkel bildet, dessen Tangente 2π ist. Der erwähnte durch Umdrehung des Abschnittes ABC um den Durchmesser HI erzeugte Ring ist sodann dem in $F'E'G'A'$ projizierten schief abgeschnittenen Cylinder mit der Grundfläche ABC, die gesuchte Zitrone dagegen dem in $A'C'G'$ projizierten Cylinder gleich. Ihre Differenz beträgt den in $F'E'C'A'$ projizierten geraden Cylinder.

Da der erwähnte Ring sich als die Differenz zwischen einer Kugel und einem aus einem Umdrehungscylinder und zwei Kugelabschnitten zusammengesetzten Körper berechnen läßt, ist die Aufgabe somit gelöst. Auf ähnliche Weise wird der Rauminhalt von Äpfeln ausfindig gemacht.

Kepler verwertet dasselbe Verfahren auch in umgekehrter Weise. Da der Rauminhalt der Kugel bekannt ist, wird es der eines schief abgeschnittenen, auf einem Halbkreis senkrecht stehenden Cylinders auch, und zwar vorläufig zunächst in dem im Hilfssatze vorausgesetzten Falle, daß die Schnittebene einen Winkel bildet, dessen Tangente 2π ist, dann aber auch im allgemeinen; denn die von verschiedenen durch den Durchmesser gelegten Ebenen abgeschnittenen Cylinder werden, wie Kepler bemerkt, den Stücken proportional, welche die Ebenen auf einer Erzeugenden des Cylinders abschneiden.

Während Keplers auf infinitesimalem Wege gewonnene Schlußfolgerungen richtig sind, gilt dies nicht immer von seinen Wahrscheinlichkeitsschlüssen. So glaubt er, daß die durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes ADC (Fig. 14) um die halbe Sehne AD hervorgebrachte halbe Zitrone sich zu dem durch die Umdrehung um den Pfeil CD erzeugten Kugelsegment verhalte wie $CD : AD$. Dies schließt er daraus, daß der Satz gilt sowohl, wenn das Segment mit einem Halbkreis, als auch, wenn der Bogen mit der Sehne AC vertauscht wird, was eine Verkleinerung der beiden Körper ergibt. Er bemerkt richtig, daß letztere Vertauschung unmittelbar die Gültigkeit des Satzes in dem Grenzfalle zeigt, in welchem der Bogen zu Null wird, woraus erhellt, daß seine Schlußfolgerungen auf dem infinitesimalen Gebiete richtig sind. Er prüft endlich das Resultat durch eine wirkliche numerische Berechnung einer Zitrone, die er in der bereits gezeigten Weise ausführt; in dem behandelten Falle wird aber die Abweichung von

dem aufgestellten Satz zu klein, um sich innerhalb der Ziffern, welche in seine Rechnung eingehen, geltend zu machen. Allein der Satz selbst ist nicht richtig. Dies mußte auch in dem von Kepler berechneten Beispiel eine feinere numerische Berechnung dartun, was Guldin bald darauf zeigte.

Der Zweck seiner Arbeit mußte Kepler auch auf Maximal- und Minimalbestimmungen hinleiten, da es sich darum handelte, den Weinfässern eine solche Form zu geben, daß sie bei dem möglichst geringen Verbrauch von Material so viel wie möglich fassen könnten. Diese Bestimmungen werden wir jedoch erst bei den Untersuchungen besprechen, durch die man damals dasselbe erreichte wie heute durch die Differentiation.

Es kann nicht wundernehmen, daß Keplers infinitesimale Beweisführungen, selbst von seinen Wahrscheinlichkeitsschlüssen abgesehen, bei mehreren der Gelehrten Bedenken erregen mußten, die sich derart in die Prinzipien der Archimedesschen Beweisführung vertieft hatten, daß ihnen die logischen Gründe für ihre größere Ausführlichkeit klar waren. So trat Vietas Schüler Anderson in der Schrift *Vindiciae Archimedis* gegen Kepler auf. Es fanden sich jedoch auch einige, die einen offenen Blick für das hatten, was Kepler durch seine freiere Behandlung der infinitesimalen Fragen wirklich erreicht hatte. Zu ihnen gehörte Briggs, der für dergleichen Untersuchungen die entsprechende Vorbildung besaß und einzelne der Resultate durch numerische Berechnung nachprüfte.

Keplers infinitesimale Untersuchungen hat man übrigens ebensosehr in seinen astronomischen Arbeiten, wie in der hier erwähnten Schrift zu suchen. Er bedurfte ihrer bei den verschiedenartigen Hypothesen, die er nach und nach über die Bewegung der Planeten aufzustellen versuchte, öfters aber, als mit den vorliegenden Beobachtungen nicht übereinstimmend, verwerfen mußte, und bei der Klarlegung der Gesetze, bei denen er schließlich stehen blieb.

Seine Darstellung und seinen Gebrauch der Größen, die wir heute durch bestimmte Integrale darstellen, können wir u. a. aus der Art und Weise kennen lernen, in der er das Gesetz von der Proportionalität der von den *radii vectores* ($FM = r$, Fig. 5) beschriebenen Flächen und der dazu verbrauchten Zeiten ausdrückte. Er sagt, die Zeit, die von einem Planeten auf einer elliptischen Bahn mit der Sonne im Brennpunkt F zu der Bewegung von dem Endpunkt C der großen Achse bis in eine beliebige Stellung M gebraucht werde, verhalte sich zu der ganzen Umlaufszeit wie die „Summe der *radii vectores*“ vom Brennpunkt F bis zu den Punkten des Bogens CM zu der „Summe der *radii vectores*“ der ganzen Ellipse.

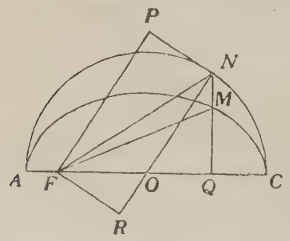

Fig. 5.

Der Sinn dieser Behauptung ist, wie aus dem Zusammenhange an dieser und anderen Stellen hervorgeht, daß das zuletzt genannte Verhältnis der Grenzwert sein soll, dem sich das Verhältnis der beiden angeführten Summen nähert, wenn sich die Anzahl der Punkte auf dem Bogen CM und auf der ganzen Ellipse ins Unendliche vermehrt. Aber auch dieser Grenzwert ist unbestimmt, solange das Gesetz von der Verteilung der Punkte nicht bekannt ist. So würde der Grenzwert, wenn zwischen den Punkten gleich große Bogen (Δs) der Ellipse liegen sollten, das Verhältnis zwischen dem einerseits auf den Bogen CM, andrerseits auf die ganze Ellipse ausgedehnten Integral $\int r ds$ sein. Hier soll indes weder der Bogen CM noch die entsprechende wahre Anomalie CFM, sondern vielmehr die exzentrische Anomalie CON oder der Zentriwinkel des Bogens CN des Kreises über der großen Achse der Ellipse als Durchmeser, welcher die nämliche Projektion auf die Achse hat wie CM, in gleiche Teile zerlegt werden. Nennen wir diese exzentrische Anomalie ψ, so sollen sich die Zeitabschnitte wie die Integrale $\int r d\psi$ verhalten.

Nun haben wir schon früher (S. 177) gesehen, daß Kepler in seiner Bestimmung der Bahn als einer Ellipse den Umstand benutzt, daß der Brennstrahl FM dem Abstand FP des Brennpunktes von der Tangente des Kreises in dem Punkte N gleich ist. FP, mit einem Kreisbogenelement ($a d\psi$, wenn wir mit a die Hälfte der großen Achse bezeichnen) multipliziert, ist das Doppelte eines Elementes eines schiefen Ausschnittes CFN des Kreises, der von einem Bogen CN und den Verbindungsgeraden zwischen seinen Endpunkten und dem Brennpunkt F begrenzt wird. Dies hatte Kepler schon früher benutzt, als er den Versuch machte, die Bewegung als eine exzentrisch circulare zu erklären. Er wußte also, daß seine Behauptung über das Verhältnis zwischen den Zeiten darauf ausgehe, daß dies Verhältnis demjenigen zwischen dem Inhalt des Ausschnittes CFN und dem des ganzen Kreises gleich sei; aus Archimedes aber wußte er, daß dies wiederum dem Verhältnis zwischen dem Ellipsenausschnitt CFM und der ganzen Ellipse gleich sei.

Man sieht, daß Keplers eigene Darstellung vorzüglich geeignet ist, um die Richtigkeit des Gesetzes aus den vorliegenden Beobachtungen durch Berechnungen herzuleiten. Allerdings kann er nicht unendlich viele Brennstrahlen summieren, dagegen wohl alle diejenigen, die Werten von ψ entsprechen, welche eine gewisse kleine Differenz haben, z. B. alle diejenigen, die den Winkeln ψ mit einer ganzen Anzahl von Graden bis zu einem beliebigen Winkel ψ oder bis 360^0 entsprechen, und die Verhältnisse dieser Summen bestimmen. Versuche ergaben sodann, daß dies Verhältnis sich tets dem zwischen den entsprec henden Zeitabschnitten nähert.

Dem hier besprochenen Gesetze zufolge wird die Bestimmung der Stellung eines Planeten in seiner Bahn zu einer gegebenen Zeit von folgender Aufgabe, dem sogenannten Keplerschen Problem, abhängig: von einem Punkte eines Kreisdurchmessers soll eine Gerade gezogen werden, die zugleich mit dem Durchmesser einen Kreisausschnitt von gegebener Fläche begrenzt. In analytischer Form wird das Problem durch eine gemischte transcendente Gleichung

$$\psi + e \sin \psi = kt$$

ausgedrückt, in der e die Exzentrizität der Ellipse bezeichnet und die rechte Seite der Zeit t proportional ist. Kepler sah ein, daß dieser gemischte Charakter der Gleichung ihrer direkten Auflösung hinderlich war.

Bei der näheren Untersuchung der Größen, die wir hier durch Integrale ausgedrückt und deren wörtliche Darstellung bei Kepler wir hier besprochen haben, gebraucht er auch eine graphische Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, indem er die unabhängige Variable zur Abscisse und die abhängige zur Ordinate wählt. Die Integrale werden sodann als die Flächen bestimmt, die durch die Abscissenachse, die Kurve und zwei Ordinaten begrenzt werden. So wird in dem hier angeführten Falle, in welchem das betreffende Integral dasjenige ist, das wir (wenn $FO = c$) heute als $\int_0^{\psi} a\,(a + c \cos \psi)\, d\psi$ schreiben würden, ψ oder die Länge $CN = a\psi$ des Kreisbogens zur Abscisse und $r = a + c \cos \psi$ zur Ordinate gewählt.

Die Verhältnisse zwischen den Integralen berechnet Kepler also annäherungsweise als Verhältnisse zwischen den Summen einer großen, aber doch endlichen Anzahl von Werten der abhängigen Variablen, die äquidistanten Werten der unabhängigen Variablen entsprechen. Aus den so gefundenen Resultaten hat er aber nicht nur Gesetze hergeleitet, die in der Natur Geltung haben, sondern es liegt sogar ein Beispiel dafür vor, daß er auf diesem empirischen Wege ein rein mathematisches Resultat gefunden hat. Er hat an einer Stelle $\int_0^{\vartheta} \sin \vartheta\, d\vartheta$ durch Summierung der Werte von $\sin \vartheta$ berechnet, welche bis ϑ ganzen Gradanzahlen entsprechen. Diese Summe wird, mit einer konstanten Größe (der Bogenlänge von 1^0 oder $\frac{\pi}{180}$) multipliziert, das Integral darstellen; das Verhältnis zwischen solchen Summen stellt also das Verhältnis zwischen den entsprechenden Integralen dar. In dieser Weise findet er, daß das Integral für den Grenzwert $\vartheta = 90^0$ gleich 1 ist; für einen oder mehrere andere Grenzwerte fand er, daß es $= 1 - \cos \vartheta$ wird. Hieraus schloß er, daß im allgemeinen, wie wir jetzt schreiben würden,

$$\int_0^{\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta = 1 - \cos\vartheta.$$

Kepler sah später, daß man den empirischen Beweis durch eine geometrische und exakte Begründung ersetzen kann; eine solche findet sich schon bei Archimedes in der Inhaltsbestimmung einer Kugelkappe ungefähr in derselben Gestalt, wie Kepler sie bei Pappus kennen lernte. Sie drückt, von der dem Exhaustionsbeweise eigentümlichen Form abgesehen, dasselbe aus, als würde die Kappe in Oberflächen von Kegelstumpfen geteilt, von denen jede in moderner Sprache $2\pi r \sin\vartheta ds$ ist, wo r den Halbmesser, ϑ den Winkel zwischen den Halbmessern nach dem angeführten Flächenelement und dem Pol der Kappe und $s = r\vartheta$ schließlich die Bogenlänge von dem Kappenpol bis zu diesem Element bezeichnen. Das Element wird also

$$2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Dies ist der Ausdruck, den Archimedes tatsächlich in den Ausdruck für das entsprechende Stück des umschriebenen Cylindermantels oder in

$$2\pi r dh$$

transformiert, wo dh die Höhe des Kegelstumpfes ist. So wird die ganze Kappe

$$2\pi rh \text{ oder } 2\pi r^2 (1 - \cos\vartheta),$$

also

$$\int_0^{\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta = 1 - \cos\vartheta.$$

Es gereicht Kepler zur Ehre, daß er in den ganz verschiedenen Anwendungen und Formen die Einheit der infinitesimalen Bestimmungen erkannte, die wir hier der Kürze wegen in einer Sprache ausgedrückt haben, über die er nicht verfügte.

Wir haben noch zu erwähnen, daß Kepler als Näherungswert des Ellipsenumfangs $\pi(a + b)$ angibt, wo a und b die Halbachsen sind. Die Herleitung dieses Ausdruckes aus dem bekannten Ausdrucke $2\pi a$ für die Kreisperipherie bietet eine gewisse Analogie zu der Weise dar, in welcher der richtige Inhaltsausdruck πab aus πa^2 gebildet werden kann. Kepler, der ihn ausdrücklich als eine Annäherung bezeichnet, hat sicherlich gewußt, daß er nur gebraucht werden dürfe, wenn a und b nicht sehr verschieden sind; denn, mit seinem sonstigen Verfahren, wenn er den wahrscheinlichen Wert eines gewissen Ausdruckes zu erraten suchte, übereinstimmend, kann er nicht verabsäumt haben, außer $b = a$ den zweiten Grenzfall $b = 0$ zu betrachten, wo der Ausdruck $\pi(a + b)$ durchaus nicht zutrifft.

b. Cavalieri, Torricelli und Gregorius von St. Vincentius.

Keplers integrationsartige Bestimmungen liegen fast nur in ihren Anwendungen auf die Untersuchungen vor, bei denen er ihrer bedurfte, oder, wie in der Doliometrie, bei der Lösung einer ganz bestimmten Aufgabe, die er sich stellte. Dies hindert ihn freilich nicht zu sehen, wie dieselbe Integration — eine spätere Benennung, die wir der Kürze wegen schon hier einführen — auf sehr verschiedenen Gebieten angewendet werden kann. Ein ausdrückliches Beispiel dafür haben wir soeben angeführt; es zeigt sich übrigens auch, wenn er, um einen Umdrehungskörper zu berechnen, statt dessen einen schief abgeschnittenen Cylinder benutzt. Jedoch bezeichnet es einen wesentlichen Fortschritt, daß Cavalieri die Sache abstrakter angreift und diese Integrationen ausdrücklich besonderen Untersuchungen unterwirft, deren Ergebnisse sich sodann auf den verschiedensten Gebieten in Anwendung bringen lassen. Aus einer Korrespondenz mit Galilei scheint indes hervorzugehen, daß sich nicht allein Cavalieri mit diesem Gedanken trug, sondern daß auch Galilei eine Arbeit über die indivisiblen oder unteilbaren Größen herauszugeben beabsichtigte. Sie ist freilich nie erschienen; wir haben uns deshalb nur an die Arbeiten Cavalieris zu halten, die noch dadurch besondere Bedeutung erlangten, daß sie weit verbreitet und lange als Hauptquelle für die ganze Lehre betrachtet wurden. Indem wir das Wichtigste ihres Inhaltes besprechen, werden wir uns bald an die zuerst 1635 erschienene, 1653 neu herausgegebene *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, bald an die 1647 erschienenen *Exercitationes geometricae sex* halten. Letztere dienten teilweise als Antwort auf eine sehr scharfe Kritik Guldins über die von Cavalieri aufgestellten Begriffe und lassen diese deshalb deutlicher hervortreten, als es in ersterem Werke der Fall gewesen war.

Der große Fortschritt bei Cavalieri besteht darin, daß er, allerdings in durchaus geometrischer Form — und übrigens in engem Anschluß an Keplers Darstellung der von ihm gebrauchten Integrale —, einen abstrakten und allgemeinen Begriff aufstellt, der mit dem späteren analytischen Begriff des bestimmten Integrals genau zusammenfällt, und daß er sodann diesen Begriff einer allgemeinen Behandlung unterzieht. Sein Fundamentalbegriff ist „die Summe aller parallelen Sehnen in einer geschlossenen Fläche“ oder kürzer „*alle*“ diese Sehnen. Er weiß zwar, daß diese Summe unendlich, und daß das Verhältnis zwischen zwei solchen Summen im allgemeinen unbestimmt ist; allein dies Verhältnis erlangt einen bestimmten Grenzwert, wenn die beiden Flächen zwischen denselben beiden Parallelen eingeschlossen sind, und wenn die parallelen Sehnen, deren Summe in Betracht kommt, auf denselben zu diesen Grenzstellungen parallelen und gegenseitig äqui-

distanten Geraden abgeschnitten werden. Das Verhältnis wird dann das nämliche wie das zwischen den beiden Flächen, innerhalb deren die Sehnen abgeschnitten werden. Auf diese Weise ergibt sich z. B., daß sich die Flächeninhalte einer Ellipse und eines Kreises mit gemeinsamer Achse wie die andere Achse der Ellipse zu ihrer gemeinsamen verhalten. Cavalieri läßt übrigens öfters die eine der beiden Figuren ein Parallelogramm und die Sehnen mit dessen einem Seitenpaar parallel sein. Das Verhältnis der Summen ist dann gleich dem Verhältnis zwischen der anderen Fläche und dem Parallelogramm und wird, von diesem bekannten Faktor abgesehen, den Flächeninhalt der anderen Figur darstellen. Es leistet ihm also dasselbe wie das bestimmte Integral, das in der heutigen Mathematik mit Bezug auf dieselbe Teilung durch ein System von Parallelen dieselbe Fläche darstellt.

Sogar nach der genaueren Erklärung in den *Exercitationes* erregten Cavalieris Begriffsbestimmungen Widerspruch. So verstanden ihn Roberval und andere dahin, als ob die Flächenräume selbst die Summen der unendlich vielen Parallelen darstellen sollten, als ob demnach eine Größe von 2 Dimensionen aus unendlich vielen von einer Dimension bestehe. Dies sagt Cavalieri allerdings nicht, er verursacht aber insofern selbst das Mißverständnis, weil seine Bezeichnung der parallelen Sehnen als „unteilbar" anzudeuten scheint, daß sie selbst unendlich kleine Teile der Flächen sein sollen. Die *Exercitationes* enthalten freilich einen Beweis dafür, daß sich die Summen der unendlich vielen Sehnen wie die Flächen verhalten; dies ist aber ziemlich allgemein gehalten. So tritt die wichtige Voraussetzung, daß die Sehnen, deren Anzahl ins Unendliche wächst, überall die gleichen Entfernungen haben sollen, nur indirekt hervor.

Vorläufig vermochte man jedoch nur mittelst solcher Ausdrücke so allgemeine Betrachtungsweisen durchzuführen; denn die Formen der aus dem Altertum vererbten Beweisführung waren nur geeignet, einzelne bestimmte Sätze zu beweisen.

Die Übereinstimmung mit einem bestimmten Integral findet indessen nur dann unmittelbar statt, wenn die Fläche auf eine so einfache Weise begrenzt ist, daß sie selbst durch ein solches Integral dargestellt werden kann und nicht erst aus mehreren zusammengesetzt werden muß. In dem Falle, in welchem eine solche Zusammensetzung notwendig ist, namentlich wenn einige der Parallelen den Umriß in mehr als 2 Punkten schneiden, vermag jedoch Cavalieri selbst eine Umformung in einfachere Figuren zu bewerkstelligen. Wenn z. B. die Fläche auf einer der Parallelen mehrere Sehnen $k_1, k_2 \cdots$ abschneidet, so mißt er auf ihr von einer festen Geraden aus die Strecke $y = k_1 + k_2 + \cdots$ ab. Die Fläche wird dadurch in eine solche umgestaltet, die

durch eine gerade und eine krumme Linie begrenzt wird, von denen letztere jede der Parallelen nur in einem Punkte schneidet. Dasselbe kann mit den

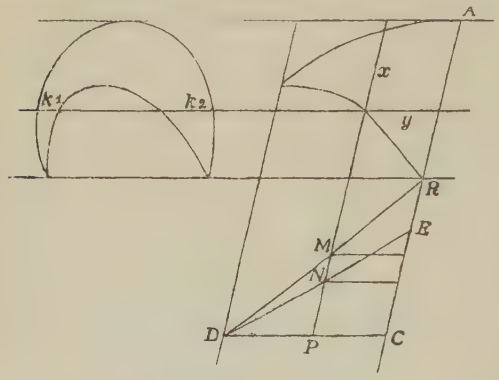

Fig. 15.

Parallelen zu der festen Geraden AR (die in Fig. 15 gleichzeitig nach RC verschoben ist) der Fall werden und zwar durch eine ähnliche Verschiebung der zu ihr parallelen Sehnen in die Stellung PM, die wir x nennen, um zu bezeichnen, das x und y in der Tat die Koordinaten der Kurve RD sind, die in Verbindung mit den Achsen CR und CD die umgestaltete Fläche begrenzt. Diese ist also, wenn wir $CR = a$ und $CD = b$ setzen, das, was wir heute durch $s\int_0^a y\,dx$ oder $s\int_0^b x\,dy$ darstellen, wobei der Faktor s, der den Sinus des Winkels zwischen den Achsen bezeichnet, in der Darstellung Cavalieris durchaus gleichgültig ist, da er stets nur das Verhältnis zwischen den Flächen (den Sehnensummen) sucht.

Die hier beschriebene Umformung verwendet Cavalieri in seinem durchaus allgemeinen Beweis, daß zwei ähnliche ebene Figuren sich wie die Quadrate zweier entsprechenden Linien verhalten. In diesem Beweise wendet er auf die beiden ähnlichen Figuren gleichmäßige Umformungen an, so daß es nur auf den Beweis des Satzes betreffs der Figur CRD und einer ähnlichen Figur ankommt, die wir mit $C_1R_1D_1$ bezeichnen, während wir die einem gewissen Paar zusammengehöriger Werte der Koordinaten x und y entsprechenden Werte x_1 und y_1 nennen. Dann wird

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{RC}{R_1C_1}.$$

Um den Satz zu beweisen, konstruiert Cavalieri eine Hilfsfigur, in der dem Punkte (x, y) der Punkt (x_1, y) entspricht. Solche entsprechende Punkte sind in der Fig. 15 mit M und N bezeichnet. Dann wird offenbar

$$\frac{CRD}{CED} = \frac{x}{x_1},$$

und da der Punkt (x_1, y) in CDE dem Punkt (x_1, y_1) in $C_1R_1D_1$ entspricht, ist

$$\frac{CED}{C_1R_1D_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1};$$

also wird

$$\frac{C\,R\,D}{C_1 R_1 D_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^2.$$

Selbstredend ist der Beweis in unserer Darstellung durch den jetzt üblichen Gebrauch der Koordinatenbezeichnungen x und y übersichtlicher geworden als bei Cavalieri selbst; er bezeichnet noch alle Strecken durch die ihre Endpunkte angebenden Buchstaben und führt überhaupt alle Operationen geometrisch aus. An dem Gedankengang selbst ist aber nichts geändert.

Außer der hier beschriebenen Bestimmung von Flächeninhalten bedient sich Cavalieri einer ähnlichen Bestimmung von Rauminhalten. Das Verhältnis zwischen dem Inhalt zweier Körper wird als das Verhältnis zwischen den Summen „aller" ebenen Schnitte dargestellt, die beide auf einer Reihe von parallelen Ebenen bilden. Während deren Anzahl ins Unendliche wächst, müssen ihre gleichzeitig bis ins Unendliche abnehmenden Entfernungen stets einander gleich bleiben. Schneiden alle diese Ebenen die beiden Körper in Schnitten von gleichem Flächeninhalt oder in solchen, die in einem gegebenen Verhältnis stehen, so werden auch ihre Rauminhalte einander gleich sein, bezw. in demselben gegebenen Verhältnis stehen, ein Satz, der noch heute seinen Namen nach Cavalieri trägt, der ihn zum ersten Male in voller Allgemeinheit ausgesprochen hat (s. S. 238). Mit ihm kann Cavalieri durch einen Beweis, der dem soeben geführten ähnlich ist, dartun, daß sich zwei ähnliche Körper wie die Kuben entsprechender Linien verhalten.

Auch die übrigen Anwendungen auf Rauminhalte beschränken sich meistens auf solche Fälle, in denen die parallelen Schnitte der Körper einander ähnlich sind und sich also wie die Quadrate der Sehnen verhalten, welche die parallelen Ebenen auf einer ebenen Figur abschneiden (Parallelkreise, wenn die Fläche eine Umdrehungsfläche ist). Die Berechnung wird also auf die Berechnung von Verhältnissen zwischen den Summen der Quadrate der Sehnen zurückgeführt, welche zwei Figuren in derselben Ebene auf einem System von Parallelen abschneiden. Diese abstraktere Berechnung, die der Berechnung des Verhältnisses zwischen zwei Integralen von der Form $\int_a^b y^2 dx$ mit denselben Grenzen, wo y eine als Ordinate dargestellte Funktion von x ist, entsprechen würde, geht den einzelnen stereometrischen Anwendungen voraus. Zu diesen gehören die Rauminhaltsbestimmungen, die schon Archimedes auszuführen vermochte, und neben ihnen besonders die Berechnung vieler Umdrehungskörper. Darunter finden sich diejenigen, die Kepler durch Teilung mittelst Ebenen durch die Umdrehungsachse berechnete, während Cavalieri auf der Achse senkrechte Schnitte

benutzt; außerdem viele andere, deren Meridiankurven verschiedentlich aus Kegelschnitten zusammengesetzt sind. Es ist namentlich anzuführen, daß Cavalieri auch diejenige Umdrehungsfläche 2. Ordnung berücksichtigt, die Archimedes, ja sogar noch Fermat (S. 200) übersieht, das elliptische Hyperboloid, das er *Tympanum hyperbolicum* nennt. Er berechnet den Raum, der von einem solchen und zwei auf der Achse senkrechten Ebenen umschlossen wird.

Diese Berechnungen führt Cavalieri in dem ersteren der beiden genannten Werke auf die Integrationen zurück, die tatsächlich Archimedes schon kannte und in seiner Weise ausdrückte, nämlich $\int_0^a x\,dx$ und $\int_0^a x^2\,dx$ (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 181), sowie in solchen Fällen, in denen man in der modernen mathematischen Sprache auf $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ stoßen würde, auf die Quadratur des Kreises. Das erste dieser drei Integrale, das als der Inhalt eines Dreiecks dargestellt wird, haben wir auch Galilei bei der Berechnung einer Fallstrecke (S. 243) anwenden sehen. Die Form, in der Cavalieri $\int_0^a x^2\,dx$ oder vielmehr das Verhältnis dieses Integrals zu a^3 bestimmt, ist folgende:

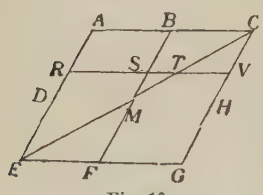

Fig. 16.

er sucht (Fig. 16) das Verhältnis zwischen der Summe der Quadrate *aller* (S. 256) mit der Seite AC parallelen Sehnen (oder Transversalen) RT im Dreieck AEC und der Summe der Quadrate *aller* Sehnen RV, die auf denselben Geraden durch das Parallelogramm AG abgeschnitten werden. Es sei FB die Gerade, die alle Sehnen RV des Parallelogramms halbiert; wenn wir der Übersichtlichkeit wegen $RT = x$, $TV = y$, $RS = b$ $\left(= \frac{1}{2}a\right)$ und $ST = z$ setzen, so hat man

$$x = b + z, \quad y = b - z$$
$$x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2.$$

Da nun die Sehnen x in das Dreieck ACE, y in CEG, z in die beiden Dreiecke BCM und EFM und b in das Parallelogramm $ABFE$ fallen, wird, wenn wir durch $[ACE]$ u. s. w. die Summe der Quadrate der Sehnen in der betreffenden Figur bezeichnen,

$$[ACE] + [GEC] = 2\,[ABFE] + 2\,[BCM] + 2\,[FEM].$$

Hier ist offenbar

$$[ACE] = [GEC],$$

und da sich die Quadratsummen in ähnlichen Dreiecken wie die Kubikzahlen entsprechender Seiten verhalten, muß

$$[BCM] = [FEM] = \tfrac{1}{8}\,[ACE]$$

sein. Ferner ist

$$[ABFE] = \tfrac{1}{4}\,[ACGE].$$

Durch Einsetzung erhält man

$$[ACE] = \tfrac{1}{3}\,[ACGE]$$

oder

$$\int_0^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,a^3.$$

Später fand Cavalieri, um den Inhalt eines Körpers zu berechnen, der durch Drehung eines parabolischen, durch eine auf der Achse senkrechte Sehne erhaltenen Abschnittes um diese Sehne erzeugt wird, Veranlassung, $\int_0^a x^4\,dx$ zu bestimmen, und sah nun, daß dieses Integral auf dieselbe Weise berechnet werden kann, ja, daß diese Methode sich überhaupt zur Berechnung von $\int_0^a x^n\,dx$ anwenden läßt. Diese Berechnung und ihr Resultat $\frac{1}{n+1}\,a^{n+1}$ teilt er in den *Exercitationes* mit, jedoch erst, nachdem er einiger Aufgaben wegen, die er über dies Thema gestellt hatte, von noch weitergehenden Resultaten Nachricht erhalten hatte, zu denen es Fermat schon damals gebracht hatte, und die dasjenige betreffen, was wir heute unter der Bestimmung von $\int_0^a x^{\frac{p}{q}}\,dx$ verstehen.

Wir wollen kurz zeigen, daß Cavalieris Methode sich tatsächlich anwenden läßt, um $\int_0^a x^n\,dx$ zu finden; er selbst führt die Bestimmung allmählich bis auf $n = 9$ durch. Unter Benutzung der obigen Bezeichnungen ist

$$x^n + y^n = 2\,b^n + 2\,\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,b^{n-2}\,z^2 + \cdots + \begin{cases} 2\,z^n \\ 2n\cdot b\,z^{n-1}, \end{cases}$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Legt man nun alle Werte von x^n im Dreieck ACE und die von y^n im Dreieck GEC zusammen, so erhält man einen Ausdruck, dessen Glieder von Summen solcher Größen z^r abhängen, in denen die z in den Dreiecken BCM und FEM enthalten sind und r höchstens $= n$ wird. Für $r < n$ sind diese Summen schon berechnet; die Summe der Größen z^n für jedes der letztgenannten Dreiecke ist $\frac{1}{2^{n+1}}$ von der gesuchten Summe der Größen x^n im Dreieck ACE.

Einige andere Anwendungen der Methode Cavalieris als die hier von uns mit den Integrationen in unmittelbare Verbindung gesetzten haben wir im Abschnitte 2e zu besprechen.

Im Anschluß an Cavalieri oder vielleicht mehr noch im Anschluß an die Infinitesimaluntersuchungen Galileis, die nie an die Öffentlichkeit gekommen sind, hat auch Torricelli Aufgaben gelöst, die heutigen Tages auf Integrationen hinauslaufen. So zeigt er uns in einem Abschnitt seiner *Opera geometrica* 20 Verfahren zur Ausführung der Quadratur des Parabelsegments, bei denen jedoch, wie bei dem einen Archimedesschen, teilweise andere Methoden angewendet werden als die mit der Integration zu vergleichenden. Eine andere Untersuchung tut sich dadurch hervor, daß der Inhalt eines Körpers bestimmt wird, der sich ins Unendliche erstreckt; es ist dies der Körper, der von einer durch Drehung einer gleichseitigen Hyperbel um eine Asymptote erzeugten Fläche samt einem Umdrehungscylinder um diese Asymptote und der von der anderen Asymptote erzeugten Ebene umschlossen wird (also von der Fläche, die Fig. 17 durch Drehung von $OMNS$ um OS erzeugt wird). Er findet diesen Inhalt, indem er zeigt, daß die Cylinderfläche, die von MN durch die Drehung erzeugt wird, von dem Abstand zwischen MN und OS unabhängig ist. Die Integration, mit der seine Bestimmung zunächst zu vergleichen wäre, würde also, wenn die Gleichung der Hyperbel $xy = k$ ist,

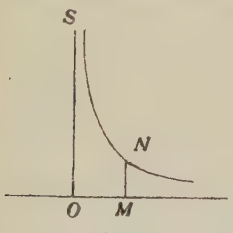

Fig. 17.

$$\text{Vol.} = \int_0^x 2\pi xy\,dx = \int_0^x 2\pi k\,dx = 2\pi kx$$

sein.

In demselben Jahre wie die *Exercitationes* Cavalieris, 1647, erschien ein Werk, das einen noch größeren Umfang hatte als die beiden Werke Cavalieris und gleichfalls viele solche Bestimmungen enthielt, die wir heute durch Integration ausführen. Es war dies das *Opus geometricum* von Gregorius von St. Vincentius. Die Beweise werden den antiken Forderungen gemäß geführt; dagegen sind weder die Auffassungen so umfassend wie bei Cavalieri, noch die Resultate von der gleichen Bedeutung, wie sehr er auch die Anwendungen der allgemeinen Betrachtungen, die er zur Geltung bringt, variiert.

Zu diesen Anwendungen gehört sein *Ductus plani in planum* oder die Multiplikation zweier ebenen Figuren. Was er damit meint, läßt sich am leichtesten mit analytisch-geometrischen Benennungen darstellen, die jedoch Gregorius selbst nicht anwendet. Wir wählen also die Schnittlinie der beiden Ebenen, die wir uns als aufeinander senkrecht denken, zur x-Achse. In den Ebenen liegen die Kurven $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$. Gregorius untersucht nun den Körper $\int_b^a yz\,dx$, der von den Koordinatenebenen, von den

Cylindern $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ und von den Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Die Untersuchungen beschränken sich jedoch auf solche Umformungen, die man erhält, wenn man statt yz ein damit gleiches Produkt zweier Faktoren einsetzt. Ist $yz = uv$, so wird

$$\int_a^b yz\,dx = \int_a^b uv\,dx,$$

ein Resultat, das in dem sog. Satz Cavalieris (S. 259) speziell mit einbegriffen ist. So wird der Raum zwischen der xy-Ebene, der zx-Ebene und den Halbcylindern $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ dem Tetraeder zwischen der xy-Ebene, der xz-Ebene und den beiden Ebenen $y = a - x$, $z = a + x$ gleich, was an und für sich ein hübsches Resultat ist. Das Verdienstvolle dieser Behandlung liegt indes nicht etwa in einem Integrationsfortschritt, sondern vielmehr in der geometrischen Auffassung gewisser Körper. So legt Gregorius in mehreren Fällen die Beschaffenheit der Schnittkurve zwischen zwei Cylindern dar und gibt dadurch Beispiele für die Darstellung einer Kurve im Raume durch ihre Projektionen auf 2 Ebenen. Von der hier angegebenen stereometrischen Darstellung eines Integrals haben, wie wir bald sehen werden, Fermat und Pascal Anwendungen von großer Bedeutung für die Entwickelung der Integrationsmethoden selbst gemacht, ohne daß es sich jedoch deshalb behaupten ließe, daß sie von Gregorius beeinflußt gewesen seien.

Weiterhin beschäftigte sich Gregorius mit Cylindern mit nicht parallelen Grundflächen.

Endlich findet man in seinem Werke zum ersten Male den Satz, daß zwei Flächen, die von einer Hyperbel, der einen Asymptote und zwei Linienpaaren begrenzt werden, die mit der anderen Asymptote parallel und deren Entfernungen von dieser proportional sind, gleich sind. Auf die weitere Bedeutung dieses Satzes für die Entwickelung der Integrationen und seine Anwendung bei der Berechnung der Logarithmen werden wir bei den Integrationen Fermats und später zu sprechen kommen.

c. Fermat, Pascal u. a.

Fermat, der seine eingehenden Studien über dasselbe Thema nicht viel später als Cavalieri, und zwar unabhängig von ihm, begann, weicht in manchem von ihm ab; zunächst schon in äußerer Beziehung, sofern seine Untersuchungen nur aus kleineren Schriften und Briefen bekannt sind, die erst nach seinem Tode gedruckt wurden, während Cavalieri große Werke schrieb. Infolgedessen wurden die Arbeiten Fermats nicht die Quelle, aus der man später die Bekanntschaft mit solchen Integrationen vor der Integralrechnung schöpfte; sie wurden aber doch einem Teil der bedeutendsten

gleichzeitigen Mathematiker bekannt und waren somit nicht ganz ohne Einfluß. So haben wir bereits angeführt, daß Cavalieri, als er in den *Exercitationes* seine eigene Bestimmung von $\int_0^a x^n dx$ veröffentlichte, die damit übereinstimmenden Resultate Fermats kennen gelernt hatte.

Andererseits weicht Fermat darin von Cavalieri ab, daß er, der auf keinem Gebiete ein Bedürfnis nach neuen Formen fühlt, sondern die schon vorliegenden so zu gebrauchen versteht, daß sie alle seine großen und neuen Untersuchungen zu umfassen vermögen, nicht wie dieser auf einen neuen, abstrakten und allgemeinen Ausdruck seiner Sätze und Beweise bedacht ist. Eben dadurch vermeidet er die Gefahren, die mit den neuen, unbewährten Formen verbunden waren; er fußt überall auf unzweifelhaft exaktem und sicherem Grund und Boden und weiß, wie wir bald sehen werden, aus den herkömmlichen Betrachtungsweisen wesentliche Vorteile zu ziehen. Tatsächlich macht die speziellere Form seine Beweise nicht weniger allgemein, weil er für einen einzelnen Fall — z. B. für einen gewissen Zahlenwert eines Exponenten, der eine beliebige ganze Zahl sein können soll, — einen Beweis auf eine solche Art und Weise durchzuführen versteht, daß es klar ist, der Beweis werde auch für jeglichen anderen Fall Geltung haben.

Hiermit ist freilich keineswegs gesagt, daß er — auf diese Weise — für seine Behauptungen stets vollständige Beweise liefert. Im Gegenteil drückt er sich oft mit so großer Kürze aus, daß man nur das Resultat und vielleicht einige Hauptpunkte der Begründung erfährt; doch ist alles mit einer Klarheit und Bestimmtheit ausgedrückt, welche offenbaren, daß das Material für eine vollständige Beweisführung bereit liegt, und an einzelnen Stellen zeigt er durch einen völlig durchgeführten Exhaustionsbeweis, daß dies in der Tat der Fall war.

Die Form, unter der sich eine Integration im Anschluß an die antike geometrische Darstellung von Größen, besonders Produkten, am natürlichsten darstellen mußte, war die Quadratur. Was wir $\int_a^b f(x)\,dx$ nennen, war für Fermat dasselbe wie der Flächenraum, der von der Abscissenachse, der Kurve $y = f(x)$ und den durch $x = a$ und $x = b$ bestimmten Ordinaten begrenzt wird. Auf diese Quadraturen führten er und andere Mathematiker damaliger Zeit solche Fragen zurück, die wir heute von einer derartigen Integration abhängig machen; noch heutigen Tages nennen wir eine solche Integration eine Quadratur und reden von der Zurückführung einer Differentialgleichung auf Quadraturen. Die Berechnung des Integrals $\int_0^a x^n dx$ gestaltete sich ihm zur Quadratur der „Parabel" $y = x^n$, indem wir hier und

im folgenden von einem konstanten Faktor $n - 1^{\text{ten}}$ Grades absehen, den Fermat der geometrischen Homogeneität halber mit heranziehen mußte. Die Benennung „Parabel" erstreckte er jedoch nicht nur auf den Fall, daß n eine ganze Zahl ist, sondern auch auf Kurven, die sich durch Gleichungen von der Form $\frac{y^q}{x^p} = const.$ ausdrücken lassen. Indem er diese gleichfalls quadrierte, fand er auch, was man heute den Wert der Integrale von der Form $\int x^n dx$ nennen würde, wo n gebrochen ist. Ferner quadriert er die Klasse von Kurven, die er als Hyperbeln höherer Ordnung bezeichnete, und deren Gleichungen die Form $x^p y^q = const.$ haben, und berechnet somit auch Integrale von der genannten Form für negative Werte von n.

Aus Fermats Briefen an Roberval vom Jahre 1636 geht hervor, daß er bei seinen ältesten Quadraturen von Parabeln, die jedoch nur Parabeln von der Form $y = x^n$ umfaßten, wo n eine ganze Zahl ist, dasselbe Verfahren befolgte, durch welches Archimedes $\int_0^x x^n dx$ für $n = 1$ und 2 (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 181) berechnet hatte. Schon bei der Mitteilung, Fermat besitze eine allgemeine Methode, und bei dem Resultate für $n = 3$ sagt Roberval, daß er selbst dieselben Integrationen durch die Ungleichheiten

$$1^n + 2^n + \cdots + m^n > \frac{m^{n+1}}{n+1} > 1^n + 2^n + \cdots + (m-1)^n$$

ausführe, und knüpft daran die Vermutung, daß Fermat nach derselben Methode verfahre. Dies bestätigt Fermat, bezweifelt jedoch, daß Roberval für diesen Satz einen allgemeinen Beweis besitze. Bei dieser Gelegenheit erfährt man auch, daß Fermats Berechnung von Potenzsummen mit seiner Summation von Differenzenreihen beliebiger Ordnung (S. 167) zusammenhängt.

Durch ein ganz anderes Verfahren hat Fermat später dieselben Resultate für gebrochene und negative Werte von n bestimmt. Die ersten dieser Resultate sind schon in seiner Mitteilung an Cavalieri 1644 erwähnt, die Methode findet sich aber erst in einem Aufsatz über Quadraturen (*De aequationum localium transmutatione ... in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus*), dessen endgültige Redaktion nach 1657 stattgefunden hat. Hier findet man die im folgenden besprochenen Quadraturen.

In der Einleitung zu dieser Arbeit hebt Fermat als eine Abweichung von Archimedes' Methode hervor, daß dieser, von seiner sogenannten geometrischen Quadratur der Parabel abgesehen (die gar keine Integration ist, sondern auf der Summation einer unendlichen Reihe beruht), arithmetische Reihen anwendet; er selbst wendet dagegen geometrische an. Die

arithmetischen Reihen entstehen bei Archimedes, wie auch bei Cavalieri und bei Fermats eigenen älteren Quadraturen, indem eine Fläche durch äquidistante Parallelen zur Ordinatenachse in unendlich kleine Streifen geteilt wird. Er dagegen will eine Teilung durch Parallelen zur Ordinatenachse benutzen, deren Abscissen eine geometrische Reihe bilden.

Wir wollen mit der Anwendung dieser Methode zur Bestimmung von $\int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx$, wo p und q positiv sind, anfangen. Bei Fermat stellt sie sich als Quadratur der Parabel $x^p = y^q$ dar. Er beginnt mit der Teilung der durch unser Integral dargestellten Fläche in Streifen, die von Ordinaten mit den Abscissen

$$x,\ \alpha x,\ \alpha^2 x, \cdots,$$

wo $\alpha < 1$, begrenzt werden, so daß die Abscissen ins Unendliche bis zu 0 abnehmen. Die Grundlinien der Streifen sind die Differenzen (Δx) zwischen den Abscissen, also

$$(1-\alpha)\,x,\quad \alpha\,(1-\alpha)\,x,\quad \alpha^2\,(1-\alpha)\,x, \cdots;$$

ihre Höhen sind die Ordinaten $y = x^{\frac{p}{q}}$, also

$$x^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{2p}{q}} x^{\frac{p}{q}}, \cdots.$$

Setzt man statt der Streifen die Rechtecke $y\,\Delta x$, so gilt es nur, die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$(1-\alpha)\,x^{\frac{p+q}{q}}, (1-\alpha)\,\alpha^{\frac{p+q}{q}}\,x^{\frac{p+q}{q}}, (1-\alpha)\alpha^{2\,\frac{p+q}{q}}\,x^{\frac{p+q}{q}} \cdots$$

zu finden. Sie ist

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}\,x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Das gesuchte Integral oder die gesuchte Fläche ist der Grenzwert, dem sich diese Größe nähert, wenn die Streifen alle unendlich schmal werden, also für $\alpha = 1$. Um diesen Grenzwert zu finden, vertauscht Fermat auf antike Weise die Ausziehung der q^{ten} Wurzel aus α mit der Bestimmung von $q-1$ mittleren Proportionalen. Ist β die erste dieser mittleren Proportionalen zwischen 1 und α, so wird $\alpha = \beta^q$. Die Transformation ist also dieselbe wie die von uns durch diese Substitution bezeichnete. Dadurch wird

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)\,(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)\,(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{p+q-1})}.$$

Der Grenzwert hiervon, der nun $\beta = 1$ entsprechen soll, wird sodann $\frac{q}{p+q}$.

Um die entsprechende Quadratur von Hyperbeln zu gewinnen oder die Fläche $\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$ zu finden, wird sie durch die Ordinaten mit den Abscissen

$$x, \quad \alpha x, \quad \alpha^2 x, \cdots$$

in Streifen geteilt, wobei jetzt $\alpha > 1$. Die Rechtecke $\frac{\Delta x}{x^m}$ bilden sodann eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $\frac{\alpha - 1}{x^{m-1}}$ und deren Quotient $\frac{1}{\alpha^{m-1}}$ ist. Die Summe wird dann für $m > 1$

$$\frac{\alpha^{m-1}}{x^{m-1}} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha^{m-1} - 1}.$$

Der Grenzwert hiervon für $\alpha = 1$ wird, sowohl wenn m eine ganze, als auch, wenn es eine gebrochene Zahl ist, $\frac{1}{(m-1)\, x^{m-1}}$, was auf dieselbe Weise wie bei der Quadratur der Parabeln ersichtlich ist. Um die Einfachheit des Fermatschen Gedankenganges zu zeigen und darzutun, daß seine Beweisführung im wesentlichen ebenso allgemein ist wie seine Resultate, haben wir hier die moderne und allgemeine Zeichensprache, ja sogar gebrochene Exponenten gebraucht, während Fermat alles durch eine Figur und die mit ihr verknüpften Bezeichnungen und Ausdrücke darstellt und sein Verfahren im besondern nur für die Hyperbel $y = \frac{a^3}{x^2}$ und die Parabeln $y^2 = ax$ und $y^3 = ax^2$ darlegt. Er bezeichnet diese indes ausdrücklich als Beispiele für die Begründung seiner allgemeinen Resultate. Man sieht, daß Fermats Darstellung des Integrals $\int y dx$ vor der Cavalieris den Vorteil hat, daß die unendlich klein werdenden Faktoren (Δx oder dx) in die Berechnungen ausdrücklich eingehen. Daher brauchen sie nicht wie bei Cavalieri, der sie gar nicht nennt, gleich groß zu sein. Das erleichtert die Vertauschung der Variabeln, wie wir bald sehen werden. Später wird es sich zeigen, daß dagegen das Festhalten an Cavalieris Darstellung noch Leibniz eine solche Änderung lange erschwerte.

Fermats Quadratur der Hyperbel $y = \frac{a}{x^m}$ ist unmittelbar nur anzuwenden, wenn $m > 1$. Wenn $m < 1$, so gewinnt man die Quadratur der Hyperbel durch Vertauschung der beiden Achsen. Über den Fall $m = 1$, in welchem es sich darum handelt, die einfache Hyperbel zu quadrieren, bemerkt Fermat, daß die Streifen dann gleich groß werden. Diese Bemerkung hatte 1647 schon Gregorius von St. Vincentius gemacht. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß Fermat in dieser Beziehung eher von einem andern Schriftsteller, nämlich Neper, beeinflußt war, ja, daß seine hier dargestellte Methode zur Quadrierung von Parabeln und Hyperbeln unter diesem Einfluß

zu stande gekommen ist. Er nennt nämlich selbst diese Methode seine logarithmische Methode, was sicherlich bedeuten soll, daß die Anordnung der Abscissen in einer geometrischen Reihe dieselbe ist, wie die von Neper auf die Zahlen angewendete, deren Logarithmen sodann durch den Punkt bestimmt werden, dessen Geschwindigkeit konstant ist (S. 134). Hatte Fermat einmal diese Nepersche Darstellung, die wir durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}$$

haben ausdrücken können, auf eine geometrische Form gebracht, indem er die Größe, die wir hier y nennen, zur Abscisse, $\frac{r}{y}$ zur Ordinate nahm, und daraus ersehen, daß die Logarithmen geometrisch durch Hyperbelflächen dargestellt werden, so mußte er auf seine Quadrierung der übrigen Hyperbeln kommen, wenn er nur dasselbe Verfahren auch auf sie anwendete. Von hier aus kann die Quadrierung auf die Parabeln übertragen worden sein, auf die er sie selbst erst nach der entsprechenden Untersuchung der Hyperbeln anwendete.

Moderne Leser werden sich unter diesen Umständen darüber wundern, daß er nicht geradezu sagt, die von der einen Asymptote und von zwei Parallelen zu der andern begrenzten Hyperbelflächen seien Logarithmen (oder mit Logarithmen proportional). Dies wäre zu damaliger Zeit eine unnatürliche Angabe gewesen, weil die Logarithmen etwas Neues, die Hyperbeln etwas Altes und Wohlbekanntes, die Hyperbelflächen also Größen waren, die, mag man nun die Mittel zu ihrer numerischen Berechnung besessen haben oder nicht, in der geometrischen Form auftraten, die für allgemeine Untersuchungen die anerkannte Grundlage abgab. Aus dem Zusammenhange mußte zwar deutlich hervorgehen, daß man die nun einmal berechneten Logarithmen benutzen konnte, um, wenn es vonnöten war, auch die Größe einer Hyperbelfläche zu finden; wir werden aber sehen, daß man die Hyperbelflächen vielmehr zur Darstellung, Untersuchung und Berechnung der Logarithmen gebrauchte.

Wenn Fermat sodann andere Kurven quadrieren wollte, was für ihn dasselbe war, was wir Integration neuer Funktionen nennen würden, so kam es nur darauf an, diese neuen Quadraturen durch Umformung auf Quadraturen geradliniger Figuren, sodann seiner Parabeln und Hyperbeln (die einfache Hyperbel mit einbegriffen) und von Kreisen zurückzuführen. Die Zurückführung auf die Quadratur der einfachen Hyperbel entspricht, wie wir soeben gesehen, der heutigen Zurückführung eines Integrals auf logarithmische Funktionen, wie die Zurückführung auf die Quadratur des

Kreises oder von Teilen desselben der Zurückführung eines Integrals auf circulare Funktionen. Die numerischen Werte der letzteren konnte man den trigonometrischen Tafeln entnehmen.

Von Zurückführungen, durch die dies zu erreichen war, kannte Fermat erstens diejenigen, die der gliedweisen Integration einer mehrgliedrigen Größe entsprechen; eine solche hatte übrigens schon Archimedes in seiner Kubatur der Hyperboloide ausgeführt. Neben ihnen benutzte Fermat auch eine gewisse Verbindung von Substitutionen und teilweiser Integration.

Eine teilweise Integration oder wenigstens die durch eine solche erreichte Umformung eines Integrals wird durch Vertauschung der beiden Variabeln erreicht. Eine solche ermöglicht eben, wie wir bemerkt haben, Fermats geometrische Darstellung, wenn es ihm auch an Mitteln fehlt, diese Vertauschung völlig zu verwerten. Wir wollen annehmen, daß eine Kurve durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ dargestellt ist, daß diese Kurve die Abscissenachse in einem Punkte, dessen Abscisse a, die Ordinatenachse aber in einem Punkte schneidet, dessen Ordinate b ist, und daß auf dem Wege von dem letzteren dieser Punkte zu dem ersteren y abnimmt, während x zunimmt. Die zwischen den beiden Achsen und der Kurve liegende Fläche läßt sich sodann in doppelter Weise ausdrücken, was

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^b x\,dy$$

ergibt.

Damit man von dieser Änderung denselben Nutzen wie von einer teilweisen Integration haben soll, wird indes erfordert, daß man die Funktion $y = \varphi(x)$ differentiieren kann und es versteht, diese Operation innerhalb des Integrales anzuwenden. Zwar ist nun Fermat selbst, wie wir sehen werden, derjenige, der zuerst Differentiationen ausgeführt hat; über ihren Zusammenhang mit der Integration ist er aber noch nicht in dem Grade im klaren, daß er von diesem Zusammenhange die hier notwendige Anwendung machen kann. Er muß daher seine teilweise Integration auf den Fall beschränken, in dem er das durch eine Differentiation von $\varphi(x)$ zu Erreichende auf andere Weise gewinnen kann. Seine teilweise Integration tritt deshalb nur in folgender Form auf:

$$\int_0^a y^n\,dx = n\int_0^b y^{n-1}x\,dy.$$

Diese Formel, welche er wie gewöhnlich als einen Zusammenhang zwischen Flächenräumen, die von verschiedenen Kurven begrenzt werden, auftreten läßt, benutzt Fermat zwar für ganz willkürliche Werte von n; er beweist

sie aber allerdings teils nur für $n = 1$, teils für $n = 2$. In diesen Fällen ist sein Beweis indes in demjenigen einbegriffen, den Pascal für eine allgemeinere Umformung lieferte; wir dürfen wohl annehmen, daß dies für alle Werte von n der Fall gewesen ist. Wir wollen deswegen hier Pascals allgemeinen Satz und den Beweis mitteilen, den er in seiner Schrift *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* (1659) vollständig darbietet.

Pascals Satz von den Quadraturen läßt sich in der Sprache der späteren Integralrechnung, wie folgt, ausdrücken: Wenn $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ die Gleichungen zweier Kurven sind, von denen erstere auf obige Weise die Punkte $(0, b)$ und $(a, 0)$ verbindet, so ist

$$\int_0^b zx\,dy = \int_0^a \left(\int_0^y z\,dy\right) dx.$$

Der Beweis wird stereometrisch geführt und läßt sich kurz so wiedergeben: zx stellt den Inhalt eines Rechtecks dar (Fig. 18), das durch zwei Werte von z und x gebildet wird, die auf jeder der beiden Kurven demselben Wert von y entsprechen, oder, wenn x, y und z als rechtwinklige Raumkoordinaten aufgefaßt werden, durch die Werte der z- und der x-Koordinate eines Punktes M der Schnittkurve AMC zwischen den beiden Cylindern, welche die beiden Kurven als Projektionen auf die xy-Ebene und die zy-Ebene haben, gebildet wird. $\int_0^b zx\,dy$ wird also der Inhalt des Körpers, der von den Koordinatenebenen und diesen beiden Cylindern begrenzt wird. Die einem vorgegebenen Werte von x entsprechende Ebene wird denselben Körper in einer Figur PRM schneiden, die mit NOS kongruent ist, dessen Flächeninhalt wiederum $\int_0^y z\,dy$ ist. Hieraus folgt, daß dieser Körper auch den Inhalt $\int_0^a \left(\int_0^y z\,dy\right) dx$ hat.

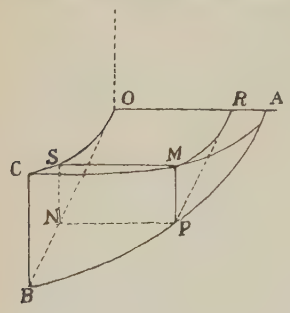

Fig. 18.

An das hier angewendete Raumgebilde*) hat auch Gregorius in seinem *ductus plani in planum* (S. 262) eine Reihe von Untersuchungen von geringerer Bedeutung angeknüpft. Wenn der Cylinder $z = \varphi(y)$ eine Ebene durch die x-Achse ist, nennt Pascal den Körper *onglet*.

*) Der Körper ist allerdings derselbe wie der von Pascal betrachtete; um aber dem Leser den Überblick zu erleichtern, haben wir teils die üblichen Bezeichnungen der Raumkoordinaten angewendet, teils der Figur die Lage gegeben, in der man jetzt gewöhnlich die Raumkoordinaten zeichnet.

Indem man $z = y^{n-1}$ setzt und die bereits bekannte Quadratur dieser Parabel anwendet, erhält man die Formel, die, wie erwähnt, von Fermat angewendet wurde. Die Methoden sind also die gleichen, nur treten sie bei Pascal in größerer Allgemeinheit auf. Es ist nichts darüber bekannt, wer von diesen beiden Gelehrten die Methode zuerst angewendet, und ob etwa der eine dem andern etwas mitgeteilt hat.

Fermat legt durch eine Reihe von Beispielen dar, mit wie großer Fertigkeit er seine Formel anzuwenden vermag. Teils wendet er sie synthetisch an, um aus bekannten Quadraturen neue herzuleiten, teils analytisch, um Quadraturen einer vorliegenden Kurve auf eine bekannte Quadratur zurückzuführen. In beiden Fällen werden allmählich für y^n oder xy^{n-1} neue Ausdrücke von denselben Formen substituiert, welche neue Anwendungen dieser Art teilweiser Integration ermöglichen.

Da Fermat nur nachweisen will, daß es möglich ist, gewisse Kurven zu quadrieren oder von Bogen dieser Kurven und Geraden begrenzte Flächen zu berechnen, läßt er die übrige Begrenzung ganz außer acht und bietet somit in der Tat nur dasselbe, was durch eine Umformung der Größen erreicht wird, die wir jetzt unbestimmte Integrale nennen würden.

In einem Beispiele zeigt Fermat die Quadratur der Kurve, die den Namen *Descartessches Blatt* erhalten hat. Er geht davon aus, daß man, wenn $y^3 = \frac{a^5x - a^6}{x^3}$ ist, durch Quadratur zweier Hyperbeln unmittelbar $\int y^3 dx$ erhält. Daraus ergibt sich durch seine teilweise Integration $\int y^2 x dy$ oder, wenn man $y^2 x = a^2 t$ setzt, $\int t dy$. Die Gleichung in y und t, die durch Elimination von x entsteht, ist $t^3 + y^3 = aty$, die eben das *Descartessche Blatt* darstellt, und seine Quadratur wird also durch das zuletzt gefundene Integral ausgedrückt. Das Resultat mag analytisch, d. h. durch Anwendung derselben Transformationen in umgekehrter Ordnung gefunden sein. Die Anwendung auf eine Kurve, deren übrige Eigenschaften damals schon von anderen untersucht waren, zeigt deutlich, daß die Methode in der Hand Fermats nicht lediglich auf besonders abgepaßte Beispiele anwendbar war.

Das nämliche zeigt Fermat auch, indem er sie auf eine Aufgabe anwendet, die ihm von „einem gelehrten Geometer“ vorgelegt worden war, und die wir als Beispiel für die Zurückführung auf die Quadratur des Kreises oder für die Zurückführung der Integrale auf circulare Funktionen geben. Sie betraf die Quadratur der Kurve $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$; besonders handelte es sich um die Bestimmung der Fläche, die von der Kurve, der y-Achse und der x-Achse, die ihre Asymptote ist, begrenzt wird. Fermat wendet, um diese Quadratur zu finden, folgende Analysis an. Durch die Substitution $z^2 = ay$ wird das Integral $\int y dx$ in $\frac{1}{a}\int z^2 dx$ transformiert. Diese

Quadratur ist zufolge der Methode Fermats von $\int xzdx$ oder, wenn man $xz = at$ setzt, von $\int tdz$ abhängig. Da die gegebene Gleichung und die beiden Substitutionsgleichungen durch Elimination von x und y die Gleichung $t^2 = a^2 - z^2$ ergeben, wird $\int tdz$ eine circulare Fläche darstellen. In dem vorgelegten speziellen Fall werden die verschiedenen hier erwähnten Quadraturen die heute durch folgende Integralausdrücke angegebenen:

$$\int_0^\infty \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty z^2dx = \frac{2}{a}\int_0^a xzdz = 2\int_0^a tdz = \frac{\pi}{2}a^2.$$

Fermat wendete auch seine Methode zur Herleitung allgemeinerer Resultate an, wie zu allmählicher Ausführung der Integration $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$, wo n eine ungerade Zahl ist. Seine Reduktion, die er wegen der Unzulänglichkeit seiner Methode ohne Differentiation von $(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ gewinnen muß, ist jedoch nicht ganz dieselbe, welche man jetzt auf das genannte Integral oder auf das im wesentlichen gleichbedeutende $\int \sin^{n+1} x\,dx$ anwendet. Fermat zeigt erst sein Verfahren für den Fall $n = 3$. Setzt man $a^2 - x^2 = y^2$, so wird nach seiner Methode und durch die successiven Substitutionen von $xy = at$, $y^2 = ax$ allmählich $\int y^3dx$ auf $\int xy^2dy$, $\int tydy$, $\int y^2dt$, $\int zdt$ zurückgeführt. Da die Elimination von x und y die Gleichung $t^2 + z^2 = az$ ergibt, wird das letzte Integral ein circulares und läßt sich durch Verlegung des Ursprungs auf die vorgelegte Form (in der dann $n = 1$) zurückführen. Für höhere ungerade Werte von n hat man, wie Fermat bemerkt, nur nötig, dieselbe Zurückführung mehrmals zu wiederholen. Es wird dann nämlich das vorliegende Integral $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ durch mehrere von derselben Form ersetzt, in denen n mit $\frac{n-1}{2}$ und niederen Werten vertauscht ist.

Was andere französische Mathematiker betrifft, die sich mit denselben Untersuchungen beschäftigten, so haben wir schon Roberval und Pascal genannt, die beide mit Fermat in näherer Verbindung standen. Ersterer beschäftigte sich zu gleicher Zeit wie Fermat mit der Quadratur von Parabeln von beliebiger ganzer Ordnung, scheint aber erst durch ihn zu einer vollständigen Begründung geführt worden zu sein. Übrigens hat er verschiedene spezielle Quadraturen ausgeführt. Auf die interessanteste von ihnen, nämlich die der Cykloide, werden wir später zu reden kommen, wenn wir die vielen von verschiedenen Seiten herrührenden Untersuchungen dieser merkwürdigen Kurve zusammenstellen. Von den übrigen Quadraturen Robervals nennen

wir die der Konchoide, die u. a. eine Bestimmung von $\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = tg\vartheta$ enthält. Sie entsteht dadurch, daß polare Koordinaten zur Quadrierung eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Grundlinie a und der Höhe $atg\vartheta$ benutzt werden. Die infinitesimalen Dreiecke werden nämlich — mit den jetzt üblichen Bezeichnungen — $\frac{1}{2}\frac{a^2}{\cos^2\vartheta}d\vartheta$.

Die Untersuchungen Pascals auf dem Gebiete der Integrationen finden sich in seinen 1659 erschienenen *Lettres de A. Dettonville sur quelques-unes de ses Inventions en Géométrie.* Auch sie zielten teilweise auf die Beschaffung der nötigen Mittel zu den verschiedenen Quadraturen, Kubaturen und Schwerpunktsbestimmungen ab, die sich an die Cykloide und die durch sie erzeugten Umdrehungskörper anknüpfen ließen; die dazu dienenden Vorarbeiten aber sind so systematisch veranlagt, daß sie in der Folge wesentliche Fortschritte der Integrationsmethoden bezeichnen. So läßt die mehr systematische Behandlung, wie wir bereits gesehen haben (S. 270), die Transformation, die wir jetzt durch teilweise Integration gewinnen, in einem klareren Lichte erscheinen als bei Fermat. Bei diesem zeigt sich die Bedeutung des Verfahrens an den großen Resultaten, die er eben durch dies Verfahren gewinnt. Wenn auch die Aufgaben, die Pascal auf diesem Gebiete löst, leichter sind, so gelingt es ihm andererseits, indem er den Ertrag jedes einzelnen kleinen Fortschrittes feststellt, sowohl selbst diesen Ertrag in unmittelbarerer Weise zur Verfügung zu haben, als ihn auch anderen, denen er von Nutzen sein könnte, unmittelbarer zugänglich zu machen.

Was die Darstellung von Integralen betrifft, so schließt sich Pascal zunächst an Cavalieri an, wenn er auch den Gebrauch von dessen Ausdrucksweisen genauer präcisiert. Die Summe unendlich vieler Ordinaten einer Kurve will er ausdrücklich als die Summe von Rechtecken aufgefaßt wissen, die aus Ordinaten, welche gleiche, unendlich kleine Strecken auf der Abscissenachse abschneiden, und diesen Strecken selbst gebildet sind, also als dasselbe, was wir durch $\int ydx$ bezeichnen. Wenn er dagegen die Ordinaten einer Kurve als die Sinus von Bogen bezeichnet, so versteht er unter der Summe von unendlich vielen solchen Sinus die Summe der Produkte aus den Ordinaten, die gleiche, unendlich kleine Bogen abschneiden, und dem unendlich kleinen Bogen selbst, also das heutige $\int yds$ oder, wenn der Bogen ein Kreisbogen ist, dessen Halbmesser wir $= 1$ setzen, $\int \sin\vartheta d\vartheta$. Wo die unabhängige Variable des Integrals nicht wie hier die sogenannte „natürliche" ist, die man nicht zu nennen braucht, gibt er ausdrücklich an, welche als solche zu betrachten ist, indem er ausdrücklich sagt, welche Größe in unendlich (*indéfiniment*) viele gleiche Teile zu teilen sei. Daß

man dadurch eine wirkliche Übereinstimmung mit zu bestimmenden Flächen, Räumen oder statischen Momenten erreicht, dazu behauptet er es durch den Nachweis bringen zu können, daß die Abweichung *„moindre qu'aucune donnée"* werde, welchen Ausdruck schon andere angewendet hatten, und der in der Tat nur besagt, was schon im Exhaustionsbeweise der Alten enthalten ist.

In der Anwendung der arithmetischen Grundlage für die Integrale geht Pascal in seiner Darstellungsweise etwas weiter als Fermat, der sie, wie wir gesehen haben, für seine ältesten Quadraturen von Parabeln benutzte. So bildet er im Anschluß an seine früher (S. 168) erwähnte Lehre vom arithmetischen Dreieck aus den Summen

$$\sum_1^n y_r = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

die Dreieckssumme

$$\sum_1^n y_r + \sum_2^n y_r + \cdots + \sum_{n-1}^n y_r + y_n,$$

die offenbar gleich

$$\sum_1^n r y_r$$

wird. Die Summe solcher Dreieckssummen:

$$\sum_1^n r y_r + \sum_2^n (r-1)\, y_r + \cdots + \sum_{n-1}^n (r-n+2)\, y_r + y_n$$

wird die Pyramidalsumme genannt; sie ist offenbar gleich

$$\sum_1^n \frac{r(r+1)}{2} y_r.$$

Solche Summen läßt er nun unendlich vielen äquidistanten Werten der unabhängigen Variablen (x) entsprechen und multipliziert er mit ihrer Differenz (dx). Dadurch erhält er nicht nur eine bestimmte Darstellung von Integralen von der Form $\int xy\,dx$, die alsdann aus den Dreieckssummen, und von der Form $\int x^2 y\,dx$, die aus den doppelten Pyramidalsummen hervorgehen, sondern beweist zugleich die Sätze, die man heute durch die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a dx \Big(\int_x^a y\,dx \Big) = \int_0^a xy\,dx, \\ \displaystyle\int_0^a dx_1 \Big(\int_{x_1}^a (x - x_1) y\,dx \Big) = \tfrac{1}{2} \int_0^a x^2 y\,dx \end{cases}$$

ausdrücken könnte, arithmetisch.

Des ersten dieser Integrale bedient sich Pascal in seinen Schwerpunktsbestimmungen, um die Summe der statischen Momente der Elemente ydx mit Bezug auf die y-Achse auszudrücken; daß diese $= \xi \int_0^a ydx$ ist, wo ξ die Abscisse des Schwerpunktes ist, benutzt er, um diesen Punkt zu bestimmen.

Die in den Gleichungen (1) aufgestellten Resultate würde man heute zur teilweisen Integration rechnen. Die vollständige Gestalt, in der Pascal diese auf stereometrischem Wege erreicht, haben wir (S. 270) schon in Verbindung mit Fermats Anwendungen derselben Methode besprochen. Namentlich wendet auch Pascal die hierher gehörige Formel

$$(2) \qquad \int_0^a y^n dx = n \int_0^b y^{n-1} x dy$$

an; er kombiniert sie mit solchen Transformationen, die man durch Vertauschung von y mit $y + c$ erhält, und variiert die Anwendungen, indem er die eine der Variablen eine Bogenlänge, die andere die entsprechende Abscisse sein läßt.

Zu der allgemeinen Grundlage seiner Integrationen gehört auch ein Hilfssatz, den er an die Spitze des besonders inhaltsreichen Abschnittes stellt, der seine Integration trigonometrischer Funktionen enthält. Dieser Hilfssatz besagt, daß, wenn man (Fig. 19) zwei beliebige Punkte EE der Tangente in einem beliebigen Punkt D eines Kreises zu Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks EKE macht, dessen Katheten mit zwei festen, einen rechten Winkel bildenden Halbmessern AB und AC parallel sind, das aus EE und dem dem Kreise entsprechenden sin CAD oder DS gebildete Rechteck dem Rechteck aus dem Halbmesser DA und der Projektion von EE auf den festen Halbmesser AC, nämlich RR, gleich sei. Durch diese Ähnlichkeit der Dreiecke EKE und ASD errreicht man allerdings nur dasselbe, was Archimedes in seiner Berechnung der Kugeloberfläche mittelst anderer ähnlichen Dreiecke erzielt, und ihre Anwendbarkeit auf andere Bestimmungen, die man jetzt durch $\int \sin \vartheta d\vartheta$ ausdrücken würde, war auch von Kepler, Guldin u. a. m. erkannt worden (S. 255 u. 241). Wenn wir jedoch hier den Platz und die Form, die ihr Pascal gibt, ausdrücklich hervorheben, so geschieht dies teils der weitergehenden Anwendungen wegen, die sich bei ihm finden, teils aus Rücksicht auf eine spätere, wichtige Anknüpfung eben an Pascals Darstellung und Figur. Bei ihm wird nämlich sogleich der Fall berücksichtigt, in welchem RR und somit auch EE, welche Größe, wie erwähnt, beliebig sein kann, unendlich klein gemacht

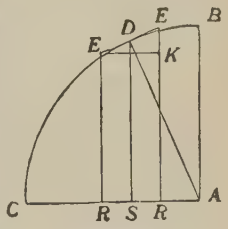

Fig. 19.

werden, wodurch auch das Dreieck EEK unendlich klein wird. Dies unendlich kleine Dreieck Pascals hat, wie Leibniz später selbst erklärt, für sein sogenanntes „charakteristisches Dreieck“ das Vorbild abgegeben. Es wird für eine beliebige Kurve auf dieselbe Weise gebildet, wie Pascals Dreieck für den Kreis, und seine Seiten sind mit den von Leibniz eingeführten Bezeichnungen die Differentiale dx, dy und ds. Dieses charakteristische Dreieck und seine Ähnlichkeit mit denjenigen, deren Seiten Subtangente, Ordinate und Tangente oder Ordinate, Subnormale und Normale sind, war inzwischen allerdings auch sowohl auf Quadraturen als auf Tangentenbestimmungen angewendet worden, besonders von Barrow und Newton; Leibnizens Hinweisung auf Pascal aber zeigt uns den historischen Zusammenhang zwischen ihren Infinitesimalbetrachtungen.

Während diese bei Leibniz in ebenso hohem Grade auf Bestimmungen abzielen, die zur Differentialrechnung gehören, wendet Pascal seinen Hilfssatz nur zur Umformung der Summen an, die sich in absoluter Übereinstimmung mit seinen genauen Erläuterungen als Integrale schreiben lassen. Dieser Satz kann, wenn der Halbmesser des Kreises = 1 gesetzt wird, (von dem Vorzeichen abgesehen) als $d(\cos\vartheta) = -\sin\vartheta d\vartheta$ oder unter Vertauschung der 2 festen Achsen, auf die Pascal abwechselnd seinen Sinus bezieht, als $d(\sin\vartheta) = \cos\vartheta d\vartheta$ geschrieben werden. Unmittelbar wird er nicht nur zur Integration $\int\sin\vartheta d\vartheta$ oder $\int\cos\vartheta d\vartheta$, sondern z. B. auch zur Transformation

$$\int\sin^n\vartheta d\vartheta = (-)\int\sin^{n-1}\vartheta d(\cos\vartheta)$$

angewendet.

Mittelst dieser Transformation bemerkt er z. B. für $n = 2$, daß $\int_0^\alpha\sin^2\vartheta d\vartheta$ der Hälfte des dem Bogen 2α entsprechenden Kreisabschnittes, also $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$ gleich ist, und für $n = 3$ wird $\int_0^\alpha\sin^3\vartheta d\vartheta$ auf die entsprechende Berechnung eines Kugelabschnittes zurückgeführt. Bei der Berechnung von $\int\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta$ wird die Transformation nicht so unmittelbar, sondern in Verbindung mit gewissen statischen Betrachtungen benutzt. Die Größe, die, wenn jeder einzelne Sinus seinen natürlichen Platz in der Figur (wie DS in Fig. 19) einnimmt, durch $\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta d\vartheta$ bestimmt wird, verteilt sich, wie aus der im Hilfssatze angegebenen Transformation der einzelnen Glieder der Summe ersichtlich, zu gleichen Gewichtsteilen auf die gleichen Teile, in welche die Projektion des Bogens auf die Gerade AC geteilt werden kann. Ihr Schwerpunkt wird also gleiche Abstände von den beiden äußersten Sinus

haben, und seine Projektion auf die Achse erhält somit die Entfernung $\frac{1}{2}\cos\alpha$ vom Mittelpunkt. Zufolge der soeben angeführten und von Pascal festgestellten Regel für Schwerpunktsbestimmungen wird nun

$$\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta},$$

was, da der Nenner $\cos\alpha$ ist,

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$

ergibt. Die anderen Grenzen entsprechenden Resultate sind auf dieselbe Art und Weise leicht hieraus herzuleiten.

Von weiteren Resultaten bei Pascal bemerken wir diejenigen, die sich durch

$$\int_0^{\alpha} \cos(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\alpha} \sin(\alpha-\vartheta)\, d\vartheta = 1-\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \cos(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta^2 d\vartheta = \int_0^{\alpha} (1-\cos(\alpha-\vartheta))\, d\vartheta = \alpha-\sin\alpha$$

wiedergeben lassen, und die aus der allgemeinen Formel (1) (S. 274) erfolgen, wenn man x, y und a mit ϑ, $\cos(\alpha-\vartheta)$ und α vertauscht; ferner

$$4\int_0^{\alpha} \cos^2(\alpha-\vartheta)\cdot\vartheta\, d\vartheta = \alpha^2 - \sin^2\alpha.$$

Seine Formationsregeln setzen ihn in den Stand, hieraus neue Integrale, z. B.

$$\int\vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int\vartheta^2 d(\cos\vartheta),\quad \int\vartheta^3 d(\cos\vartheta),$$

$$\int\vartheta\cos\vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int\vartheta^2\cos\vartheta\, d(\cos\vartheta),\quad \int\vartheta\cos^2\vartheta\, d(\cos\vartheta)$$

und viele andere herzuleiten. Indem wir in diesen Integralen $\cos\vartheta$ als unabhängige Variable geschrieben, haben wir andeuten wollen, daß es eben diese ist, die sich Pascal in unendlich viele gleiche Teile geteilt denkt.

Ferner wendet er seine verschiedenen Methoden zur Berechnung von $\int_x^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$, $\int_o^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^3 dx$, $\int_o^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$ an. Das erste dieser Integrale leitet er aus einer Anwendung zur Bestimmung des Schwerpunktes eines halben Kugelabschnittes her, da dieser Schwerpunkt sich auch auf

anderem Wege finden läßt. Das dritte wird daraus durch die Formel (2) hergeleitet.

Während die drei hier besprochenen französischen Mathematiker in einem gemeinsamen, regen und freundschaftlichen Verkehr standen, hat Descartes seine Integralresultate selbständig und sicherlich ohne jegliche Beeinflussung von ihrer Seite gewonnen. Solche Resultate liegen uns in einigen Schwerpunktsbestimmungen und Quadraturen in einem Briefe vom Jahre 1638 vor (also lange vor dem Erscheinen der *Exercitationes* Cavalieris). Da er über das Verfahren, durch das sie gefunden sind, keine Aufschlüsse gibt, müssen wir uns damit begnügen anzugeben, daß sie alle von $\int x^n dx$, wo n eine ganze und positive Zahl ist, abhängig gemacht werden können. Hieraus kann man sich einigermaßen vorstellen, wie weit er es auf diesem Gebiete gebracht hat. Auch Huygens hat mehrere der Quadraturen, die er zu verschiedenen Untersuchungen gebraucht, selbständig ermittelt; aber eben durch die Verknüpfung mit den einzelnen Anwendungen bezeichnen sie nicht so sehr Erweiterungen der Integrationsmethoden, als vielmehr Fortschritte ihrer Anwendungen. Seine Verdienste auf diesem Gebiete haben wir daher erst im Unterabschnitt 2e genauer zu erörtern.

d. Wallis.

Vom griechischen Altertum ab bis auf den heutigen Tag gilt es als eine Bedingung für die Berechtigung, einen mathematischen Satz aufzustellen, daß man den vollständigen Beweis besitzt. Im Altertum spannte man die Forderungen so hoch, daß man, um ihrer Erfüllung gewiß zu sein, bestimmte Regeln für einen vollständigen Beweis entwickelte. So hält man sich in dem größten Teil der aus dem Altertum überlieferten Literatur oft ausschließlich an diese Forderungen und versäumt dabei, direkte Auskunft auch darüber zu geben, auf welchen Wegen man zuerst zu den oft weitreichenden und stets wohlbegründeten Resultaten gelangt war. Infolgedessen bleibt die Möglichkeit bestehen, daß man es damaliger Zeit noch zu anderen Resultaten gebracht haben mag, an deren Mitteilung man aber aus dem Grunde verhindert war, daß man es nicht vermochte, den Beweisen die strenge, nun einmal geforderte Form zu verleihen. Nur ausnahmsweise teilen die alten Schriftsteller einen Satz ohne Beweis mit. Diese Freiheit nehmen sich dagegen die Schriftsteller neuerer Zeit oft, wenn die Weitläufigkeit des Beweises oder andere Gründe dazu auffordern. Einen Beweis muß aber der Urheber eines Satzes selbst besitzen, wenn nicht bloß von einem mehr oder minder begründeten Erraten die Rede sein soll.

Die antiken Regeln für die Beweisführung hatte man sich im 17. Jahrhundert gut angeeignet. Jedoch wird in Zeiten, in denen das mathematische

Wissen so üppig gedeiht, die Beweisführung stets mit den auf unvollständiger Induktion und Analogie beruhenden Mutmaßungen eng verbunden sein, die wenigstens im Kopfe des Erfinders gewöhnlich die Vorläufer des sicheren Fortschrittes sind. Im 17. Jahrhundert fanden diese Mutmaßungen oder ihre Resultate auch in die Literatur Eingang. Mit wieviel Recht auch Fermat versichert haben mag, die Beweise für viele seiner zahlentheoretischen Behauptungen, die er anderen Gelehrten anbietet, auch wirklich zu besitzen, so haben wir doch erwähnt, daß einige seiner Behauptungen auf unvollständiger Induktion beruhten, und daß diese ihn in einem bestimmten Falle sogar zu einer unrichtigen Behauptung verleitete. Ebenso haben wir gesehen, daß beim ersten kräftigen Wiederaufleben der infinitesimalen Untersuchungen die Beweise und die Darstellungsform mit den Entdeckungen neuer Resultate nicht gleichen Schritt und Tritt halten konnten. Kepler baute, wie wir (S. 254) gesehen, ein Resultat, dessen Beweis er jedoch später bei Archimedes fand, zunächst auf einer unvollständigen Induktion auf, und sowohl er als Cavalieri teilten ihre infinitesimalen Untersuchungen in Formen mit, welche die Schüler der Griechen unter ihren Zeitgenossen in noch geringerem Grade als jetzt uns zu befriedigen vermochten; jetzt kennen und benutzen wir nämlich teilweise dieselben infinitesimalen Begriffe, aber in einer besser entwickelten und begründeten Gestalt als die genannten Forscher und können also selbst Mängel der Ausdrucksweise abstellen. Durch die Übung gewann man aber doch eine so große Herrschaft über das Gebiet der neuen Untersuchungen, daß man bald im stande war, den Beweisen seiner Behauptungen eine durchaus exakte und mit den Anforderungen der Alten übereinstimmende Form zu geben. Es wäre jedoch zu weitläufig gewesen, die Beweise für die große Fülle der neuen Sätze auf diese Weise im einzelnen durchzuführen. Man mußte sich deshalb damit begnügen, es wenigstens für einzelne Sätze zu tun und dadurch anzudeuten, wie demnach die übrigen zu beweisen seien. Diesen Standpunkt nahmen Fermat und Pascal ein.

Einen Gegensatz dazu und zur vollständigen Induktion Pascals (S. 168) bilden Wallis' Begründungen, da er die unvollständige Induktion völlig bewußt und systematisch anwendet, d. h. eine solche Induktion, die damit vorlieb nimmt, die Richtigkeit eines Satzes in einer großen, aber endlichen Anzahl von Fällen zu beweisen, wennschon seine Gültigkeit für alle Fälle behauptet wird; oft begnügt er sich auch mit reinen Analogieschlüssen. Wir beeilen uns jedoch hinzuzufügen, daß diese beiden Folgerungsweisen ihm tatsächlich eine weit größere Sicherheit bieten, als man aus einer Behandlung der gleichen Anzahl betrachteter Fälle durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung schließen dürfte. Es läßt sich nämlich sehr wohl voraussehen, daß die Ver-

hältnisse in den tatsächlich betrachteten und in den übrigen Fällen einander in dem Grade gleich sind, daß die Richtigkeit der Behauptung in jenen Fällen auch bei diesen keine Änderung erfahren kann, ohne daß man doch dieser Vermutung schon den Ausdruck eines vollständigen Beweises zu verleihen oder die einander analogen Fälle auf eine umfassendere gemeinsame Behandlung zugeschnitten zu haben braucht. Daß der Takt Wallis' selbst in dieser Beziehung fein entwickelt war, ergibt sich aus der Richtigkeit der wesentlichsten seiner Resultate. Einzelnen von ihnen, die nach der gewöhnlichen Bedeutung der Worte allerdings nicht richtig sind — z. B. daß negative Größen größer seien als unendliche —, mißt er sicherlich selbst nur eine formelle Bedeutung bei.

Wallis, der sowohl mit der Literatur des Altertums als auch mit der seiner eigenen Zeit vertraut und außerdem ein Mann von scharfer Logik war, konnte gegen die logische Schwäche seines Verfahrens ebensowenig blind sein wie die Zeitgenossen. Er sagt selbst, daß er vielleicht klüger getan hätte, wie die Alten — und zwar sicherlich durchaus in der Weise des Archimedes, auf die er später an anderem Orte verweist — lieber bloß einzelne Sätze aufzustellen und zu beweisen, als seine ganze Methode darzulegen. Dadurch wäre er allerdings auch den Bemerkungen entgangen, die wir gegen ihn erhoben haben, allein er hat doch durch die deutliche Angabe der in logischer Beziehung mangelhaften Wege, die ihn zur ersten Entdeckung neuer Sätze führten, die aber gewiß auch andere Entdecker betreten haben, die nur mit ihren Mitteilungen an die Öffentlichkeit vorsichtiger waren, seinerzeit vielen Fortschritten vorgearbeitet.

In seiner *Arithmetica infinitorum* betreibt er seine Hauptaufgabe, die Leser vor allem mit seinen induktiven Entdeckungswegen bekannt zu machen, mit solcher Hingabe, daß er sie auch zur Herstellung solcher Resultate benutzt, für welche damals schon vollständige Beweise vorlagen, von denen ihm diejenigen, die sich bei Cavalieri finden, jedenfalls bekannt, die von Fermat und Roberval vielen Mathematikern mitgeteilten aber wohl kaum ganz unbekannt waren. Die Berechnung von $\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}}$ ist für ihn wie für Cavalieri dasselbe wie die Berechnung von

$$\text{Lim.}\ \frac{0^n + 1^n + 2^n + \cdots + m^n}{m^n + m^n + m^n + \cdots + m^n},$$

wenn m, das zugleich um 1 kleiner ist als die Gliederanzahl des Nenners, unendlich wird. Für $n = 1$ stützt er wie Archimedes das Resultat auf eine Summierung einer Differenzenreihe. Für $n = 2$ und $n = 3$ nimmt er allmählich immer größere Werte von m und zeigt in induktiver Weise und ohne wie

Fermat den exakten Ausdruck der Summe im Zähler anzuwenden, daß der Bruch $= \frac{1}{n+1} +$ eine Größe wird, die durch die Vergrößerung von m kleiner als jede gegebene Größe wird. Die letztere Wendung dient nämlich auch ihm dazu, den Grenzwert in exakter Weise zu charakterisieren. Die Erweiterung des Satzes für größere Werte des Exponenten n geschieht dann durch eine ähnliche Induktion.

Merkwürdiger wird seine Erweiterung auf gebrochene und negative Werte von n dadurch, daß er sie vornahm, ohne in seiner Zeichensprache gebrochene und negative Exponenten in Anwendung zu bringen. Seiner Erweiterung liegt jedoch nicht nur das schon für ganzzahlige positive n gefundene Resultat, daß für $y = x^n$

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} = \frac{1}{n+1}\, xy$$

ist, sondern noch ein anderes zu Grunde, das in exakter Weise von ihm daraus hergeleitet wird und besagt, daß

$$\int_0^y x\,dy = \int_0^y y^{\frac{1}{n}}\,dy = \frac{n}{n+1}\, y^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\, xy.$$

Die beiden hier angegebenen Integrale stellen nämlich die beiden Flächen dar, in welche die Parabel $y = x^n$ das Rechteck xy teilt; das letztere von ihnen kann man also finden, wenn man das erstere von xy abzieht.

Wallis beginnt nun damit, die Koeffizienten von xy in den Integralen $\int y\,dx$, wo $y^q = x^p$, in einer Tafel aufzustellen, deren Kolumnen den Werten 0, 1, 2, 3 $\cdots$ von p, deren Zeilen aber den Werten 1, 2, 3 $\cdots$ von q entsprechen. Sie fängt so an:

	0	1	2	3	4 $\cdots p \cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$.
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$.	
3	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$.		
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$.			
5	$\frac{5}{5}$.				
:	.				
q					
:					

Hier sind die erste Zeile und die erste und zweite Kolumne bekannt; die übrigen Elemente werden sodann nach dem in die Augen springenden Gesetze durch entsprechende Einschaltungen bestimmt. Diese Einschaltungen

nennt Wallis Interpolationen; sie beruhen im wesentlichen aber nur auf Analogieschlüssen. Er erklärt ausdrücklich, wie $\frac{q}{p+q}$ aus dem Verhältnis $\frac{p}{q}$ zwischen den Exponenten von x und y, also aus der Größe gebildet wird, die wir jetzt einen gebrochenen Exponenten nennen; er selbst nennt sie Index, ohne sie jedoch in die Potenzbezeichnung einzuführen.

Bei der Bestimmung von $\int_0^x \frac{x^m}{x^n} dx$ ist für $m \gtreqless n$ der Index $m - n$. Wallis dehnt diese Bestimmung durch Analogie auf den Fall $m < n$ aus und gewinnt somit das Ergebnis

$$\int_0^x x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} xy,$$

in welchem $y = \frac{1}{x^n}$. Wenn $n < 1$ ist, so wird dieses Integral, wie er sagt, positiv und endlich, obgleich sich die dargestellte Fläche ins Unendliche erstrecke. Wenn $n = 1$ ist, also bei der Quadratur der gewöhnlichen Hyperbel, wird die Fläche unendlich; wenn $n > 1$ ist, umfaßt sie offenbar (für $x < 1$) die gewöhnliche hyperbolische Fläche, wird also größer als sie. Den in der Untersuchung benutzten Analogien und ihrem Inhalte getreu, muß Wallis demnach behaupten, daß die negative Größe, die hier das Integral darstellt, größer als unendlich wird. Ohne jegliche Bedeutung ist dieses auf dem Wege der Analogie gefundene Resultat jedoch nicht, da die endliche Fläche, die sich durch $\int_a^b x^{-n} dx$ darstellen ließe, wo a und b zugleich positiv sind, eben hierdurch als eine positive Differenz zwischen den beiden negativen Größen dargestellt werden kann.

Da die hier gefundenen Resultate alle damals bereits bekannt waren, wenn sie auch Wallis selbst nicht alle kannte, so ließen sich die von ihm als Beweise benutzten Analogien umgekehrt leicht aus den tatsächlich bewiesenen Sätzen herleiten. Mit größerem Interesse betrachtet man daher, wie er ähnliche Verfahren anwendet, um etwas ganz Neues ausfindig zu machen, so z. B. seine Bestimmung von π. Er geht hierbei auf die Berechnung von $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$, also des Integrales aus, welches den Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Durchmesser 1 darstellt, also $= \frac{\pi}{8}$ ist. Um es zu finden, beginnt er mit der Berechnung von $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$, wo n eine ganze positive Zahl ist. Er findet nun:

$$\int_0^1 (x - x^2)^0 dx = 1,$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^1 dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4}{4 \cdot 5},$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^3 dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4}{4 \cdot 5} \cdot \frac{9}{6 \cdot 7}$$

u. s. w. und folgert mittelst seiner gewöhnlichen Induktion, daß im allgemeinen, wenn n eine ganze positive Zahl ist,

$$\int_0^1 (x - x^2)^n dx = \frac{1}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ist, wo wir durch $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ oder das bezeichnen, was Euler unter $\Gamma(n+1)$ versteht. Daß man hier, wie Wallis richtig einsieht, mit $0!$ als $= 1$ rechnen muß, erhellt aus den ersten der obigen Integrale, aber auch aus der im folgenden benutzten Bildungsweise. Wallis' Interpolation besteht, wie wir sehen werden, in der Erfindung einer noch allgemeineren Bildungsweise, die zu denselben Resultaten führt und gleichfalls auf gebrochene (und negative) Werte von n angewendet werden kann. Indem er sie auf $n = \frac{1}{2}$ anwendet, gewinnt er ein Mittel zur Bildung eines Ausdrucks für

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^1 (x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2}!)^2}{(2 \cdot \frac{1}{2})!}$$

oder

$$\frac{4}{\pi} = \frac{(2 \cdot \frac{1}{2})!}{(\frac{1}{2}!)^2}.$$

Dieser Größe $\frac{4}{\pi}$ gibt Wallis die besondere Bezeichnung $\square$ (während die Bezeichnung π jünger und erst von Euler eingeführt ist).

Die Größen $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, zwischen welchen interpoliert werden soll, sind Binomialkoeffizienten, und zwar die des mittleren Gliedes, wenn der Exponent $2n$ ist. Reichlicheres Material für die Interpolation erhält man, wenn man alle Binomialkoeffizienten, also die Zahlen, die wir jetzt $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$ schreiben, berücksichtigt. Ebendiese Zahlen sind bereits in Stifels und Tartaglias Tafeln über Differenzenreihen verschiedener Ordnungen ent-

halten, während ihre multiplikative Bildung den Hauptinhalt der Schrift Pascals über das arithmetische Dreieck (S. 168) bildet. Wallis erweitert nun die genannten Tafeln, indem er zwischen die Zeilen und Kolumnen, welche ganzzahligen Werten von p und q entsprechen, Zeilen und Kolumnen einschaltet, die $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$ entsprechen, ja, er erweitert sie sogar rückwärts bis zu $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}$. Die neuen Rubriken der erweiterten Tafel werden dabei allmählich mit Zahlen ausgefüllt, die er nach Gesetzen bildet, welche auf einer Verallgemeinerung der in der ursprünglichen Tafel enthaltenen Gesetze beruhen.

Da, wenn p und q ganze und positive Zahlen sind,

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{(p+q)(p+q-1)\cdots(p+1)}{q\cdot(q-1)\cdots 2\cdot 1}$$

ist, so hat man hier gleich ein Gesetz, das auf die Fälle angewendet werden kann, in denen nur die eine der beiden Zahlen p und q ganz ist. So vermag Wallis alle die Rubriken der Zeilen und Kolumnen der Tafel auszufüllen, die einem ganzzahligen p oder q entsprechen, und es gelingt ihm dadurch zugleich, jede zweite von denjenigen auszufüllen, die den eingeschalteten Brüchen mit dem Nenner 2 entsprechen. So werden in der Zeile, die $p = \frac{1}{2}$ entspricht, dem

$$q = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \cdots$$

beziehungsweise

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}, \quad \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \cdots$$

entsprechen.

Aus der hier benutzten Bildungsweise ergibt sich, daß

$$\frac{(p+q+1)!}{p!\,(q+1)!} = \frac{p+q+1}{q+1}\cdot\frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

Dieses Resultat, das nicht nur für die ganzzahligen Werten von p entsprechenden und vollständig hergestellten Zeilen der Tafel, sondern, wie wir oben gesehen, auch für den schon hergestellten Teil der $p = \frac{1}{2}$ entsprechenden Zeile gilt, dehnt nun Wallis auch auf die gebrochenen Werten von q entsprechenden Glieder dieser Zeile aus. Indem $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ die gesuchte Größe $\square$ ergeben, erhält man somit für

$$q = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}\square, \quad \square, \quad \frac{4}{3}\square, \quad \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\square, \quad \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\square, \cdots$$

Diese Glieder werden in die $p = \frac{1}{2}$ entsprechende Zeile zwischen diejenigen eingeschaltet, die ganzzahligen Werten von q entsprechen.

Wallis bedient sich im weiteren des Umstandes, daß das Verhältnis zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern bis zu dem Grenzwert 1 abnimmt. Daß dies in jeder einzelnen der beiden Reihen, in die wir die $p = \frac{1}{2}$ entsprechende Zeile geteilt haben, der Fall ist, springt sogleich in die Augen, da jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Zahl von der Form $\frac{n+1}{n}$ gebildet ist. Wallis zieht den Schluß, daß es um so mehr in der vollständigen der Fall sein müsse. Sind x, y, z, u vier aufeinander folgende Glieder dieser Zeile, so ist demnach

$$\frac{y}{x} > \frac{z}{y} > \frac{u}{z},$$

also

$$\sqrt{\frac{z}{x}} > \frac{z}{y} > \sqrt{\frac{u}{y}}.$$

Nimmt man hier x, y, z, u z. B. als die $q = \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$ entsprechenden Glieder an, so erhält man

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{8}{7}} > \square > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Geht man in der Zeile weiter und weiter, so werden die Quadratwurzeln in den beiden Grenzen, welche $\square$ einschließen, beide den Grenzwert 1 haben. Also wird das unendliche Produkt

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdots}$$

sich dem Grenzwert $\square$ oder $\frac{4}{\pi}$ nähern.

Da wir hier nur das bei Wallis unmittelbar auf die Berechnung von π Bezügliche angeführt, so haben wir bloß die Werte von $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$, die dem Falle $p = q$ entsprechen, durch Integrale dargestellt. Wallis hat indessen auch Integrale aufgestellt, welche die nämlichen Größen für andere Werte von p und q darstellen. Er findet nämlich, daß für alle ganzen und positiven Werte von p und q

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{q}}\right)^p dx = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}$$

ist. Nachdem er die Potenz nach der Binomialformel entwickelt hat, kann er nämlich diese Integration Glied für Glied ausführen, und indem er mit kleinen Werten von p anfängt, findet er das Resultat durch seine gewöhnliche Induktion. Die eben hergestellte Tafel enthält mithin die umgekehrten Werte dieser Integrale. Daß nun die $p = q = \frac{1}{2}$ entsprechende Rubrik der Tafel den Wert $\frac{4}{\pi}$ enthalten muß, hätte man also auch daraus schließen können,

daß $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$ ist, und diese Bestimmungsweise hätte sofort $\frac{4}{\pi}$ zu allen übrigen Gliedern der Tafel und nicht, wie die von Wallis benutzte, nur zu denjenigen, wo $p = q$ ist, in Beziehung gebracht.

Übrigens ist das von Wallis hier benutzte Integral, von einem Faktor abgesehen, dasselbe wie Eulers B-Funktion. Setzt man nämlich $x = y^q$, so geht es in

$$q \int_0^1 (1-y)^p y^{q-1} dy$$

über, was dasselbe ist wie $qB(p+1, q)$. Die beiden Gelehrten wenden jedoch den Umstand, daß dieser Integralausdruck, wenn p und q ganzzahlig sind, $= \frac{p!\,q!}{(p+q)!}$ wird, — was an und für sich nur in diesem Falle etwas bedeutet —, in entgegengesetzter Weise an. Bei Euler werden die verallgemeinerten Größen durch die Integrale definiert; Wallis dagegen betrachtet sie als durch die ganzzahligen und positiven p und q entsprechenden Werte definiert, indem er den Zusammenhang, der zwischen diesen stattfindet, auch als für alle möglichen reellen Werte von p und q geltend voraussetzt, wozu ihm selbstredend eine streng logische Berechtigung fehlt. Ebenso wie er $\frac{\pi}{4}$ berechnet, könnte er nämlich auch andere Werte der Eulerschen Funktion $B(p, q)$ berechnen, die reellen und rationalen Werten von p und q entsprechen. Seine Tafel enthält sie in den Fällen, in denen p und q den Nenner 2 haben.

Wie gut Wallis es verstand, seine „arithmetische" Methode zu gebrauchen, zeigt sich darin, daß er sie sogleich in Anwendung zu bringen wußte, als Huygens ihm den Vorschlag machte, die von der Cissoide und ihrer Asymptote begrenzte Fläche, deren Schwerpunkt und das durch ihre Drehung um die Asymptote erzeugte Raumgebilde zu berechnen, Aufgaben, welche Huygens bereits auf exakterem Wege durch Anwendung von Polarkoordinaten gelöst hatte. Es kommt bei der ersten dieser Aufgaben, an die wir uns hier halten werden, auf die Berechnung von $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\, dx$ an. Wallis beginnt mit der etwas leichteren Berechnung von $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx$. Er berechnet erst $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^n dx$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$ und findet durch Umschreibung der gefundenen Werte und durch seine gewöhnliche Induktion, daß

$$\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^{n-1}dx = \frac{2n+3}{2n}\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^n dx$$

ist. Indem er die Formel auch auf den Fall anwendet, daß $n = \frac{1}{2}$, findet er

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = 4\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fläche, die er eigentlich zu bestimmen sucht, kann auf ähnliche Weise von $\int_0^1 x\sqrt{x-x^2}\,dx$ abhängig gemacht werden, welches Integral das Moment des hier benutzten Halbkreises mit Bezug auf die Tangente in dem einen Endpunkt des Durchmessers darstellt. Es ist also $= \frac{\pi}{16}$. Nun findet Wallis zugleich durch die gewöhnliche Induktion, indem er von den Werten von $\int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^n dx$ ausgeht, die er für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ berechnet, daß

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^{n-1}dx = \frac{2n+5}{2n}\int_0^1 \sqrt{x^3}(1-x)^n dx.$$

Dies ergibt, auf den Fall $n = \frac{1}{2}$ angewendet, daß

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,dx = \frac{3}{8}\pi,$$

oder aber die gesuchte Fläche dreimal so groß ist wie der bei der Konstruktion der Cissoide benutzte Kreis.

Man begreift, daß Huygens mit Bezug auf die Sicherheit des Beweises die alte Behandlungsweise vorzieht, und daß Wallis zugeben muß, sein Beweis sei, besonders in Hinsicht auf den Übergang zu irrationalen Größen, unvollständig; aber auch Huygens staunt darüber, wie weit man es mit Wallis' Methode bringen kann. Man hatte damals auch wirklich solche Betrachtungsweisen nötig. An Pascals, Fermats und gewiß auch Huygens' weniger bekannten Integrationsmethoden, besonders an den teilweisen Integrationen der beiden ersteren war man allerdings im Begriff, die Mittel zu dem exakten Beweise ebensolcher Reduktionen zu gewinnen wie derjenigen, zu denen Wallis mittelst seiner dreisten Induktionen und Analogieschlüsse zu gelangen vermochte; man arbeitete aber mit den exakten Methoden noch so schwerfällig, daß bloße Rekognoszierungen, wie die von Wallis unternommenen, eine vorzügliche Anleitung zur Erforschung der Wahrheiten abgeben mußten, auf deren ausführlichere Begründung man erst später bedacht sein konnte.

Wallis hat denn auch auf die weitere Entwickelung der Mathematik

großen Einfluß gewonnen. Man braucht hierbei nicht an die nicht gerade in jeder Beziehung lobenswürdige Nachahmung seiner unsicheren Folgerungsweisen im 18. Jahrhundert zu denken. Damals war nicht nur die algebraische Zeichensprache weiter entwickelt als zu seiner Zeit, sondern auch die infinitesimalen Operationen und die Funktionenlehre bereits in ein System gebracht, das eine eigene Zeichensprache besaß. Da man alle Vorteile dieses Systems und dieser Sprache bemerkte, faßte man ein solches Vertrauen zu ihnen, daß man dreist dieselben Operationen auf Gebieten in Anwendung brachte, wo ihre Gültigkeit noch nicht erwiesen war; so wendete man z. B. die Regeln für algebraisches Rechnen mit reellen Größen in endlicher Form sowohl auf imaginäre Größen als auf unendliche Reihen an, sogar ohne sich um die Konvergenz letzterer zu kümmern. Etwas Ähnliches mag, wie oben (S. 220) bemerkt, Wallis bei seiner algebraischen Behandlung irrationaler Größen begegnet sein; bei den infinitesimalen Untersuchungen aber mußte die Sachlage schon aus dem Grunde eine andere sein, weil hier das System oder die Zeichensprache, die so mißbraucht werden sollten, noch nicht ausgebildet waren. Zwar haben wir im vorhergehenden, um von modernen Lesern leichter verstanden zu werden, als es nach Wallis' Darstellung in seinen eigenen Schriften der Fall sein würde, sowohl Potenzen mit gebrochenen oder negativen Exponenten geschrieben, als auch das Faktoriellenzeichen $n!$ angewendet, wo wir uns hinterher n durch gebrochene oder negative Zahlen ersetzt denken; Wallis aber kannte solche Zeichen noch nicht. Seine Erweiterungen sind daher dreister, gleichzeitig aber auch bedeutungsvoller als diejenigen, die im 18. Jahrhundert von einem bereits entwickelten mathematischen System mit zugehöriger Zeichensprache ihren Ausgangspunkt nehmen konnten. Indem sie zu Resultaten führen, die richtig sind, und deren Richtigkeit man damals schon auf anderen Wegen kontrollieren konnte — z. B. die des Ausdruckes für π durch numerische Berechnung —, wiesen sie deutlich auf die Anforderungen hin, welche man an die mathematische Zeichensprache stellen mußte, daß nämlich die in ihr ausgeführten Operationen ihre Bedeutung nicht einbüßen dürfen, selbst wenn man den bezeichneten Größen einen weiteren Sinn als denjenigen gibt, den man ursprünglich im Auge hatte. Es geschah denn auch teilweise im Anschluß an Wallis, daß sich diese Forderungen verwirklichten. So hat er besonders alles für die Erweiterung des Potenzbegriffes vorbereitet, die bald hernach durch die Einführung gebrochener und negativer Exponenten von Newton durchgeführt wurde, und durch welche Potenz und Logarithmus zueinander in das rechte Verhältnis traten. Newtons Erweiterung der Binomialformel knüpft seinen eigenen Angaben nach an Wallis' Untersuchungen an, wenn er auch selbst Analogieschlüsse nie als

Beweise betrachtet hat. Wie schon berührt, hat Eulers entsprechende Erweiterung des Begriffs der Faktoriellen an Wallis' Bestimmung von π einen ähnlichen Vorgänger. Überhaupt läßt sich der Gedanke, daß eine jede Größe, die in die Mathematik eingeführt wird, wenn sie auch ihrer ursprünglichen Bestimmung nach zunächst nur eine ganze positive Zahl sein kann, doch durch eine Begriffserweiterung mit einer stetig variierenden Größe soll vertauscht werden können, auf Wallis zurückführen. Die von ihm vorbereiteten Begriffserweiterungen deuten wiederum auf diejenigen zurück, die Descartes in der Algebra bewerkstelligt hatte.

e. Anwendungen von Integrationen; Rektifikation; reduzierte Pendellängen.

Im vorhergehenden haben wir öfters die Operation, die wir, weil sie auf dasselbe abzielt wie die Integration, auch als solche bezeichnet haben, an bestimmte Anwendungen anknüpfen sehen. Man suchte von Anfang an einen Flächeninhalt, einen Rauminhalt, einen Schwerpunkt; die Bemühungen, sie zu finden, mußten mit dem Streben zusammenfallen, die Integrale zu finden, die in der heutigen Sprache der Mathematik die Lösungen der gestellten Aufgaben ausdrücken. Dabei mußte man die Übereinstimmung bemerken, die zwischen den Lösungen der verschiedenen Aufgaben stattfand, die wir heute auf ein und dasselbe Integral zurückführen, und einsehen, daß sich alle diese Aufgaben zugleich lösen ließen, wenn man nur die gemeinschaftliche Schwierigkeit ein für allemal überwände. So bildete sich, nur in etwas verschiedener Gestalt, ein Begriff heraus, der den heutigen Begriff des Integrals deckt. Zu diesem Begriff konnte man gelangen, indem man ihn mit einer einzelnen bestimmten Anwendung verknüpfte, und dann lag es — nach der aus dem Altertum übernommenen Darstellung von Produkten als Rechtecken — am nächsten, das von uns $\int_a^b y dx$ Genannte als eine Fläche darzustellen, die von der Abscissenachse, den durch die Abscissen a und b bestimmten Ordinaten und der Kurve selbst begrenzt wird, welche die Variation der Ordinate darstellt. Am konsequentesten stellt Fermat die Integrale in dieser geometrischen Form dar. Es gibt aber auch eine arithmetische Darstellung, in der das Integral eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen oder, mit anderen Worten, der Grenzwert ist, dem sich eine Summe, die sich berechnen läßt, solange die Anzahl der Glieder eine endliche ist, nähert, wenn die Anzahl ins Unendliche wächst. Man findet sie schon bei Kepler; sie wird, wenn auch in halb geometrischer Form, von Cavalieri seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt und tritt schließlich

bei Pascal in einer so bestimmten Gestalt auf, daß man sagen kann, das von ihm Definierte sei ganz dasselbe wie heute ein bestimmtes Integral.

Die Folge davon, daß man den abstrakten Begriff der Integrale gewonnen hatte, war notwendigerweise, daß man die Integrale, nachdem man sie erst berechnet hatte, auf die verschiedenartigen Größen anwenden konnte, die durch diese Integrale bestimmt werden. In vielen Fällen benutzte man diese Anwendbarkeit auch in umgekehrter Weise. Wenn nämlich gewisse Anwendungen eines Integrals ein Gebiet betrafen, auf dem sich besonders anschauliche Betrachtungsweisen darboten, so benutzte man erst diese, um die in dieses Gebiet gehörigen spezielleren Aufgaben zu lösen; dadurch wurde dann auch das zur Lösung dieser Aufgabe dienliche Integral bestimmt. Wir haben z. B. sowohl Pascal als auch Wallis statische Betrachtungen auf diese Weise in Anwendung bringen sehen, um erst einen Schwerpunkt und dann dadurch ein Integral zu finden; auch Huygens verfuhr auf diese Weise; es war übrigens derselbe Weg, den schon Archimedes bei seiner ersten Berechnung des Inhalts des Parabelabschnittes eingeschlagen hatte (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 178).

Wegen der engen Verknüpfung mit der begriffsmäßigen Darstellung von Integralen haben wir schon im vorhergehenden ihre Anwendung zur Bestimmung solcher Flächen, die ihrer Form gemäß durch Parallelen in Streifen, und solcher Raumgebilde, die durch parallele Ebenen in Scheiben geteilt werden, sowie zur Bestimmung der Schwerpunkte solcher Flächen und Raumgebilde berücksichtigen müssen. Der Momentensatz, durch den letztere Bestimmung auf Integrationen zurückgeführt wird, findet sich, wie wir bereits gesehen, im wesentlichen bei Guldin (S. 241). Cavalieri war mit dieser Berechnungsweise so vertraut, daß er sie sogar auf Körper anwendete, deren spezifisches Gewicht nach einem einfachen Gesetze variiert. Sehr deutlich tritt sie bei Pascal hervor. Dies hinderte jedoch, wie wir später sehen werden, noch Fermat keineswegs, bei gewissen Schwerpunktsbestimmungen ein ganz anderes Mittel anzuwenden. Hier werden wir aber die nach und nach aufkommenden Mittel betrachten, durch Anwendung von Integrationen auch noch andere Bestimmungen zu gewinnen, was öfters durch Umformung in die Quadratur einer in rechtwinkligen Koordinaten dargestellten Kurve geschieht. Zuvor wollen wir jedoch bemerken, daß die Auffindung der dazu dienlichen Zerlegungen bei weitem nicht so große Schwierigkeiten verursacht haben kann wie die Integration selbst. Dies ist aus der Fülle der geometrischen Formen ersichtlich, die man den integrationsartigen Bestimmungen gegeben hat. So haben wir schon eine Reihe verschiedener Zerlegungen der Umdrehungskörper angetroffen, deren Rauminhalt man bestimmen wollte: bei Kepler (S. 250) und nach ihm bei Guldin (S. 241) in Aus-

schnitte, welche von Ebenen durch die Achse begrenzt wurden, bei Cavalieri (S. 259) in Scheiben, welche durch auf der Achse senkrechte Ebenen begrenzt wurden, und bei Torricelli (S. 262) in cylindrische Rohre um die Achse.

Wir wollen mit der Besprechung von Quadraturen von Kurven beginnen, die in polaren Koordinaten dargestellt sind. In diesem Punkte brauchte man nur Archimedes nachzufolgen, der (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 183) gerade $\int_0^x x\,dx$ und $\int_0^x x^2\,dx$ in der Einleitung seiner Schrift über die Spiralen darstellt, um letzteres Integral, von dem er später auch andere Anwendungen gemacht hat, zur Quadratur der Spiralen zu benutzen. Als die Mathematiker des 17. Jahrhunderts hierauf zurückkamen, lag es ihnen somit nahe, eine geometrisch ausgedrückte Beziehung zwischen den Spiralen und denjenigen Parabeln zu schaffen, die durch dieselben Integrale quadriert werden. Man hat es sogar in zwei verschiedenen Weisen getan. Die eine haben wir (S. 201) Gregorius auch zur Übertragung rein geometrischer Eigenschaften von der Spirale auf die Parabel und umgekehrt anwenden sehen. Zu Inhaltsbestimmungen war sie früher von Cavalieri benutzt worden. Wenn man bei dieser Änderung durch die Gleichungen $r = x$, $r\vartheta = y$ die polaren Koordinaten (r, ϑ) mit den rechtwinkligen (x, y) verbindet, wird der Ausschnitt der Spirale $\int_0^a r\vartheta\,dr$ dem halben Parabelabschnitte $\int_0^a y\,dx$ gleich. Die Flächenberechnung für polare Koordinaten geschieht hier mittelst einer Teilung durch konzentrische Kreisbogen, was in unserer Wiedergabe durch ein Integral dadurch ausgedrückt ist, daß r die unabhängige Variable ist.

Eine Teilung der Fläche durch Leitstrahlen, so daß ϑ die unabhängige Variable wird, erhält man dagegen durch die von den französischen Mathematikern benutzte Verbindung zwischen der Archimedesschen Spirale

$$\frac{r}{a} = \frac{\vartheta}{2\pi}$$

und der Parabel. Sie läßt sich durch die Gleichungen

$$y = r,\ x = \frac{r\vartheta}{2}$$

ausdrücken, die für die entsprechende Parabel die Gleichung

$$\frac{x}{\pi a} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

ergeben.

Diese Verbindung hat Fermat verallgemeinert und auf die Spirale

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m = \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^n$$

und die Parabel

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{\frac{m}{m+n} 2\pi a}\right)^n$$

angewendet. Hier muß der Übergang durch die Gleichungen

$$y = r, \left(\frac{(m+n)x}{m \cdot 2\pi a}\right)^m = \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^{m+n}$$

gewonnen worden sein, die, wenn die Gleichung der Spirale oder der Parabel gegeben ist, mit modernen Bezeichnungen

$$dy = dr, \quad dx = r d\vartheta$$

ergeben. Dadurch wird der doppelte Ausschnitt $\int r^2 d\vartheta$ in den halben Parabelabschnitt $\int y dx$ und in den gleich zu erwähnenden Untersuchungen über Bogenlängen, auf die man besonders sein Augenmerk richtete, $\int \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}$ in $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ umgestaltet. Dadurch kann man die von Fermat ohne Beweise gegebenen Resultate verifizieren.

Von einer solchen gleichzeitigen Beschäftigung mit derselben Integration in verschiedenen Formen bietet schon der Briefwechsel Fermats aus der Zeit, da er zuerst die Quadraturen einer beliebigen Parabel ganzzahliger Ordnung (S. 265) ausfindig machte, folgendes Beispiel. Man beschäftigte sich damals mit der sogenannten Spirale Galileis, $r = a - k\vartheta^2$, die unter dem Äquator anscheinend von einem fallenden Körper beschrieben werden würde, wenn er nicht durch die Umdrehung der Erde eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit erhalten hätte. Fermat suchte die Quadratur dieser Kurve und gleichzeitig die Kubatur eines Körpers, den er später oft behandelt und sein Konoid nennt, und der durch Drehung eines Parabelabschnittes um die ihn begrenzende und auf der Achse senkrechte Sehne erzeugt wird. Auf die Sehne und die Achse als Koordinatenachsen bezogen, erhält diese Parabel die Gleichung $y = a - kx^2$. Die Berechnung der Fläche $\frac{1}{2} \int r^2 d\vartheta$ und des Raumgebildes $\pi \int y^2 dx$ hängt somit von einer Quadratur ab, die nur eine Kenntnis der Parabelquadraturen bis $\int x^4 dx$ erfordert.

Wie soeben berührt, fand die zwischen Spiralen und Parabeln bestehende, von den französischen Mathematikern benutzte Beziehung namentlich bei Untersuchungen über die Bogenlängen dieser Kurven ihre Anwendung. Auch ein älterer Versuch, die Rektifikation von anderen Bogen als Kreisbogen zu finden, war mit der Darstellung in polaren Koordinaten verbunden gewesen. Er rührt von Guldin her, der jedoch anfänglich keineswegs glücklich arbeitete. Er kam nämlich zu dem Resultat, daß die Länge einer Archi-

medesschen Spirale von dem Pole bis zu dem Punkte $(\vartheta, r) = \frac{1}{2} r\vartheta$ oder der Länge des Kreisbogens mit demselben Zentriwinkel und dem Halbmesser $\frac{1}{2} r$ gleich sei. Für dies unrichtige Resultat führt Guldin im Gegensatze zu Kepler und Cavalieri, die er des Mangels an Exaktheit beschuldigt, in den überlieferten Formen einen vollkommenen Beweis. Dieser Beweis hat nur den Fehler, daß die eine der behaupteten Voraussetzungen unrichtig ist, daß ein Bogen einer Spirale — Δs zwischen den Punkten (ϑ, r) und $(\vartheta + \Delta\vartheta, r + \Delta r)$ — kleiner sei als der Kreisbogen — $(r + \Delta r)\Delta\vartheta$ — mit demselben Zentriwinkel, dessen Halbmesser der Leitstrahl nach dem äußersten Punkt des Bogens ist. Diese Behauptung in Verbindung mit der richtigen, daß $\Delta s > r\Delta\vartheta$, veranlaßte ihn, die Bogenlänge s als $\int r d\vartheta$ zu bestimmen. Darauf aufmerksam gemacht, daß sein Satz unrichtig sei, konnte er später diese Unrichtigkeit selbst beweisen, indem er dem von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ gehenden Bogen der Spirale ein Zwölfeck einbeschrieb und ausrechnete, daß dies größer ist als der Halbkreis, dessen Radius der dem Werte $\vartheta = 2\pi$ entsprechende Leitstrahl ist. Bei diesem Beweise benutzte er $\Delta s > \sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta\vartheta^2}$. In Verbindung hiermit erhielt er eine näherungsweise Berechnung von Spiralbogen, die wir durch die Formel $\Sigma\sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta\vartheta^2}$ wiedergeben können. Ebenso bot ihm die Formel $\Sigma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ eine näherungsweise Berechnung von Kegelschnittbogen.

Die Art und Weise, in der Guldin seinen groben Irrtum wettgemacht hatte, zeigt uns, daß es damals keine erheblichen Schwierigkeiten bereitete, Rektifikationen von Kurven, die tatsächlich immer von einer Integration abhängig sind, auf Quadraturen oder andere damals übliche Integrationsformen zurückzuführen. Die Fortschritte mußten darin bestehen, daß man auf diesem Wege zu neuen Resultaten gelangte. War ein solches erst erreicht, so konnte allerdings die genaue Durchführung des Beweises weitläufig und mühevoll sein, aber dem mit der stark entwickelten Technik des Exhaustionsbeweises Vertrauten keine ernstlichen Schwierigkeiten bereiten. Die dabei notwendigen Grenzen, zwischen denen eine Bogenlänge einzuschließen war, verschaffte man sich auf verschiedene Weise, wie wir bald an ein paar Beispielen dartun werden. In vielen Fällen begnügte man sich jedoch damit, ohne eine solche exakte Aufstellung die Kurvenlänge als Grenze entweder des eingeschriebenen oder des umschriebenen Vielecks zu betrachten.

Das älteste uns bekannte Resultat auf diesem Gebiete ist — abgesehen von der Kreismessung — eine Rektifikation der logarithmischen Spirale, die von Torricelli herrührt. Er nannte diese Spirale die geometrische, kannte übrigens auch ihre Quadratur und die ihr anhaftende Eigenschaft, daß sie alle Leitstrahlen unter einem konstanten Winkel schneidet. Er erwähnt diese Resultate in einem noch ungedruckten Berichte über einige wissenschaftliche Verhandlungen mit den

französischen Mathematikern im Jahre 1640, zu welcher Zeit auch Descartes, wie wir später darzulegen haben, angefangen hatte, sich mit dieser merkwürdigen Kurve zu beschäftigen. Der gedachte Bericht soll einige Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Parabel- und Spirallängen verraten, der in der Folge von französischen Mathematikern behandelt wurde.

Unter diesen äußerte 1643 Roberval, daß die einander entsprechenden Bogenlängen einer Archimedesschen Spirale und einer Parabel, die miteinander in der schon erwähnten, durch $y = r$, $x = \frac{1}{2} r\vartheta$ ausgedrückten Beziehung stehen, gleich sind. Für diesen Satz lieferte Pascal 1658 einen vollständigen Beweis, in welchem er eingeschriebene Vieleckstücke als niedrigere Grenzen von Bogen der beiden Kurven benutzt. Als höhere Grenze eines Parabelbogens benutzt er eine sägenförmige Linie, die aus Strecken der Tangenten und der Durchmesser besteht, welche zwischen der Kurve und diesen Tangenten liegen. Als höhere Grenze eines Spiralbogens betrachtet er eine die Kurve umschließende Linie, die aus Strecken von Tangenten und Kreisbogen zusammengesetzt ist, deren Zentrum im Pol der Kurve liegt.

Die gewonnenen Resultate verallgemeinerte Fermat, indem er auch die Gleichheit der einander entsprechenden Bogen der übrigen Spiralen und Parabeln behauptete, deren gegenseitige Beziehung wir schon besprochen haben. Gleichzeitig stellte er verschiedene Relationen nicht nur zwischen Längen gewisser Kurven, sondern auch zwischen gewissen Bogenlängen und Flächeninhalten auf. Davon erwähnen wir die Darstellung der Bogenlänge der Parabel $y^2 = 2px$ durch eine Fläche, die von der Hyperbel $x^2 = y^2 + p^2$, der Ordinatenachse und zwei Parallelen zur Abscissenachse begrenzt wird. Das gewonnene Resultat ist dasselbe, das heute dahin ausgedrückt wird, der Parabelbogen s, vom Scheitel aus gerechnet, sei

$$= \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

Dies Resultat war keineswegs ohne Wert, da, wie wir gesehen, eine Zurückführung auf eine hyperbolische Fläche etwas Ähnliches bezeichnete wie für uns ein Ausdruck durch logarithmische und algebraische Funktionen. Fermat stellte in Verbindung hiermit Relationen zwischen Bogenlängen einer Reihe von Kurven auf, von denen die erste eine gewöhnliche Parabel ist, übrigens aber jede aus der vorhergehenden so gebildet ist, daß jede Ordinate der derselben Abscisse entsprechenden Bogenlänge der vorhergehenden gleich wird.

Fermat jedoch war nicht der alleinige Erfinder der genannten Rektifikation einer einfachen Parabel. Bevor er sie in einer Schrift von Lalouvère veröffentlichte, war sie schon von Huygens in Briefen an verschiedene Mathematiker mitgeteilt worden; dadurch kam es an den Tag,

daß sie und einige Verallgemeinerungen auch von dem Astronomen Auzout gefunden worden waren.

Diese Beispiele zeigen, daß es Fermat zu damaliger Zeit vollständig verstand, eine Rektifikation auf eine Quadratur zurückzuführen. Wäre ihm also eine solche Kurve vorgelegt worden, deren Rektifikation von einer der ihm bekannten algebraischen Quadraturen abhing, so hätte er gleich diese Rektifikation ausführen und den algebraischen Ausdruck der Bogenlänge finden können. Ein solcher Fall war indessen weder ihm noch anderen begegnet. Da auch Kreisbogen nicht algebraisch ausgedrückt werden können, entstand dadurch das Vorurteil, daß Bogenlängen sich überhaupt nicht algebraisch ausdrücken ließen. Eben dieses Vorurteil zeugt übrigens davon, daß die Rektifikationsfrage wirklich andere als die hier genannten Gelehrten interessierte, so auch Descartes, der in seiner Geometrie S. 32 die Vermutung ausspricht, das Verhältnis zwischen Geraden und Kurven könne von uns Menschen nicht erkannt werden, was in dem vorliegenden Zusammenhang besagt, daß es sich nicht algebraisch ausdrücken lasse. Diesem Aberglauben tat es keinen wesentlichen Abbruch, daß man erfuhr, es sei Wren gelungen, die Cykloide zu rektifizieren, und Fermat habe daran sofort einen Beweis und mehrere Sätze über die Rektifikation anderer transcendenter Kurven angeknüpft. Der Aberglaube wurde dadurch nur auf die algebraischen Kurven allein beschränkt.

Obgleich man also die Mittel zur Rektifikation von Kurven schon besaß und anwendete, mußte es im Hinblick auf das erwähnte Vorurteil als ein bedeutungsvolles Ereignis erscheinen, als man die erste algebraisch rektifizierbare algebraische Kurve fand. Es handelt sich um die semikubische Parabel $ay^2 = x^3$. Ihre algebraische Rektifikation entdeckten unabhängig voneinander drei Mathematiker, nämlich Neil, dessen Rektifikation, wenn auch erst später bekannt gemacht, doch älter sein soll als Wrens Rektifikation der Cykloide, van Heuraet und Fermat. Fermat kam zuletzt; wie sehr ihn aber die Entdeckung erfreute, läßt sich daraus entnehmen, daß er ausnahmsweise einen vollständigen Exhaustionsbeweis lieferte, der zugleich als Beispiel dafür dienen kann, wie er seine Beweise auch für die vielen Resultate aus dem Gebiete der infinitesimalen Untersuchungen durchgeführt haben mag, die er ohne Beweis, aber doch in einem Zusammenhange mitteilt, daß man sehen kann, er besitze das Material für eine vollständige Beweisführung. Die Grenzen, zwischen denen Fermat eine Bogenlänge einschließt, die bis auf 0 schwinden soll, sind die Strecken, die auf den Tangenten in ihren beiden Endpunkten von den Ordinaten ebendieser Punkte abgeschnitten werden. Daß die eine dieser Strecken größer, die andere kleiner ist als die Bogenlänge, leitet er aus den allgemeinen

Archimedesschen Postulaten über Bogenlängen her (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 176). Nachdem erst eine Kurve mit einem algebraischen Ausdruck für die Länge ihrer Bogen gefunden war, knüpfte Fermat hieran mehrere andere an. Kurz darauf fand Huygens ein allgemeines Mittel, um Kurven zu finden, die sich rektifizieren lassen, nämlich die Bestimmung der Evoluten gegebener Kurven. Von diesen werden wir später reden (III,5).

Als man ein Mittel zur Berechnung von Bogenlängen gefunden hatte, konnte es keine Schwierigkeiten mehr bereiten, den Inhalt des Stückes einer Umdrehungsfläche zu finden, das von zwei Parallelkreisen begrenzt wird. Sein Ausdruck $2\pi\int y ds$, wo ds ein Element der Meridiankurve, y dessen Abstand von der Achse ist, ist schon in Pappus-Guldins Oberflächentheorem enthalten; ausdrücklich aufgestellt wurde es aber erst von Pascal in seinen 1659 herausgegebenen *Lettres*, in denen $\int y ds$ auf die S. 273 erwähnte Weise dargestellt wird. Hierbei sind übrigens Archimedes' Berechnung der Kugelfläche und die damit verbundene Bestimmung von $\int \sin\vartheta d\vartheta$ deutliche Vorbilder, und Pascal gibt vorläufig keine anderen Beispiele für seine Bestimmungsweise, die durchaus allgemein ist, wennschon er selbst nur die durch die Cykloide erzeugten Umdrehungsflächen vor Augen hat.

Ungefähr zu derselben Zeit machte Huygens in Briefen verschiedenen Mathematikern, u. a. auch den Parisern, von der algebraischen Quadratur des Umdrehungsparaboloids Mitteilung, während die Quadratur von Umdrehungsellipsoiden auf die Quadratur des Kreises und der Hyperbel, d. h. in der Sprache der modernen Mathematik auf Kreis- und logarithmische Funktionen zurückgeführt wird. Später hat er diese Quadraturen in sein *Horologium mirificum* aufgenommen.

Huygens' Mitteilungen über die Quadratur des Paraboloids waren für Pascal eine ausgezeichnete Veranlassung, seine eigenen Integrationsmethoden an einer fremden Aufgabe zu prüfen, und seine Auflösung, die er Carcavy brieflich als Mitteilung an Huygens zustellte, bietet somit zugleich ein gutes Mittel, um ihre Brauchbarkeit zu erkennen. Es zeigt sich nämlich, daß er die Aufgabe ausschließlich durch Umformungen, die er ausdrücklich angibt, und den soeben angeführten Ausdruck für die Parabellänge löst. Letzteren schreibt er dem genannten Auzout zu. Von einigen Irrtümern in der uns erhaltenen Abschrift Carcavys abgesehen, können die Umformungen, wenn wir annehmen, daß die Werte $s = l$ und $s = 0$ bezw. den Werten $y = 0$ und $y = b$ entsprechen, in der heutigen Sprache der Integralrechnung durch

$$\int_0^l y ds = \int_0^b s dy = \frac{1}{p}\int_0^b dy\left(\int_y^b \sqrt{y^2+p^2}\, dy\right) = \frac{1}{p}\int_0^b y\sqrt{y^2+p^2}\, dy$$

wiedergegeben werden. Die erste Umformung ist nur die sowohl bei Fermat wie bei Pascal vorkommende Form einer teilweisen Integration. In diese ist Auzouts Ausdruck für s eingeführt. Die zweite Umformung ist die von uns S. 274 in der Formel (1) angeführte. Der letzte Ausdruck ist, wie man sieht, derjenige, der unmittelbar entstehen würde, wenn man ds durch dy ausdrücken würde. Man darf wohl annehmen, daß Huygens nicht diesen Umweg gemacht hat, den Pascal zurücklegen mußte, eben weil er seine eigenen fertigen Methoden anwenden wollte, die für andere Zwecke gebildet waren. Von dem zuletzt gefundenen Ausdruck sagt Pascal, daß er sich durch eine Kubatur der von der Hyperbel $x^2 = y^2 + p^2$ durch Umdrehung um die x-Achse erzeugten Umdrehungsfläche berechnen läßt. Dies kann verschiedentlich geschehen; er kann dabei z. B. die S. 275 in der Formel (2) ausgedrückte Umformung benutzt haben.

Auch Fermat hatte von Huygens' Quadratur des Umdrehungsparaboloids gehört, ohne jedoch dessen Schrift selbst gesehen zu haben. Dies veranlaßte ihn in der oben erwähnten, von Lalouvère herausgegebenen Schrift gerade diese von anderen bereits gelöste Aufgabe mit Stillschweigen zu übergehen und sein Können auf dem Gebiete der Quadratur von Umdrehungsflächen an anderen Beispielen darzutun. Dazu benutzt er namentlich sein eigenes Konoid, das durch Umdrehung einer Parabel um eine auf der Achse senkrechte Sehne erzeugt wird; seinen Flächeninhalt drückt er durch die Länge der Parabel und eine andere als hyperbolische Fläche dargestellte logarithmische Funktion aus.

Von Parallelkreisen begrenzte Umdrehungsflächen waren nicht die einzigen Flächen, die man quadrierte. So findet Roberval in seinem *Traité des indivisibles*, daß der Teil der krummen Oberfläche eines Umdrehungscylinders, der von einer Kugelfläche begrenzt wird, deren Mittelpunkt auf der Cylinderfläche liegt und deren Halbmesser der Durchmesser der Cylindergrundfläche ist, oder, wie er selbst sagt, die Fläche eines Kreises auf dem Cylinder mit diesem Halbmesser, das Vierfache des Quadrates über dem Halbmesser der Kugel ist. Die gleiche Größe hat bekanntlich der Teil der durchschnittenen Halbkugelfläche, die außerhalb des hier genannten Cylinders liegt. Dies Resultat fand Viviani allerdings erst gegen Ende des Jahrhunderts (1692), aber gewiß doch, ohne die damals aufgekommene Technik der Integralrechnung zu verwerten. Die Aufgabe, welche eben durch seinen Satz gelöst wird, und die den Aufbau eines halbkugelförmigen Tempeldaches mit 2 gleich großen ähnlichen und gleichliegenden Fenstern erforderte, dessen übriger Teil aber einem vollständigen Quadrate gleich ist, sandte er verschiedenen Mathematikern zu; sie wurde sofort von Leibniz durch Integralrechnung gelöst, wie sie noch heutigen Tages eins der bequemsten Übungsbeispiele für die Anwendung dieser Rechnung abgibt.

Roberval machte auch von den von anderen Kugeln mit dem Zentrum auf der Cylinderfläche eingeschlossenen Stücken dieser Fläche Gebrauch. Er zeigt nämlich durch eine elegante Zusammenstellung der infinitesimalen Elemente, daß der Inhalt der krummen Fläche eines schiefen circularen Cylinders durch ein solches Stück dargestellt werden kann. Auch Pascal hat in einem Briefe an Huygens die krumme Oberfläche eines schiefen Cylinders bestimmt, und zwar als die „Summe" der Geraden, die einen festen Punkt in oder außerhalb der Ebene eines Kreises mit den Endpunkten unendlich kleiner, gleicher Bogen dieses Kreises verbinden (mit diesen Bogen vervielfacht). Liegt der Punkt in der Kreisebene, so wird diese Summe durch das Integral

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta}\cdot d\vartheta$$

ausgedrückt. Wie Pascal bemerkt, ist die krumme Oberfläche des Cylinders dem Produkte aus der Achse und einer Ellipsenlänge gleich. Er hat jedoch nicht die Absicht, die Länge der Ellipse durch dies Integral auszudrücken, vielmehr umgekehrt, dieses, das, wie Wren gefunden hat, die Länge einer verlängerten oder verkürzten Cykloide darstellt, als die Länge einer bekannteren Kurve darzustellen. Hier ist also eine Größe, die heute durch ein elliptisches Integral dargestellt wird, als Zwischenglied gebraucht, um die Gleichheit der Länge zweier verschiedenen Kurven darzutun.

Besonders schöne Beispiele dafür, wie weit man es in der Anwendung der Integration in der Form bringen konnte, in der man sie damals kannte, bieten Huygens' Bestimmungen der reduzierten Pendellängen, welche physischen Pendeln von gegebenen Formen entsprechen. Er hatte, wie von uns bereits (S. 247) erwähnt, im *Horologium oscillatorium* diese Bestimmungen auf die Berechnung der Größe zurückgeführt, die wir heute das Trägheitsmoment nennen und als $\int r^2 dm$ bezeichnen, wo dm ein unendlich kleines Massenteilchen und r dessen Abstand von einer Achse ist. Huygens bezeichnet nach dem Vorbild Cavalieris das Verhältnis dieser Größe zur Masse ($\int dm$) als die Summe der Quadrate der Entfernungen aller der gegenseitig gleich großen Massenteilchen von der Achse, dividiert durch die Anzahl der Massenteilchen. Er gibt allgemeine Regeln für die Berechnung dieser Größe, wenn das Pendel eine homogene, ebene Figur, die sich um eine in ihrer Ebene liegende Gerade oder eine Parallele zu dieser dreht, oder ein homogener Körper ist. Was uns an diesen Regeln besonders interessiert, ist teils die Art und Weise, wie er zu einer Zeit, als man den abstrakten Integralbegriff noch nicht zur Verfügung hatte, die notwendigen Integrationen auf die damals bekannten Anwendungen von Integrationen,

namentlich auf Inhalts- und Schwerpunktsbestimmungen zurückführt, teils seine Reduktion der mehrfachen Integration, welche die Berechnung erforderte, auf mehrere einfache Integrationen.

Die erstere dieser Umformungen stellt sich schon bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche in Bezug auf eine Achse in derselben Ebene ein. Nennen wir ein Flächenelement df, seinen Abstand von der Achse x, so kommt es Huygens darauf an,

$$\frac{\int x^2 df}{\int df} = \frac{\int x \cdot x df}{\int x df} \cdot \frac{\int x df}{\int df}$$

oder das Produkt der Entfernungen folgender Punkte von der Achse zu berechnen: 1) der Projektion des Schwerpunktes eines von der gegebenen Ebene und einer anderen Ebene durch die Achse ausgeschnittenen Keils eines auf der gegebenen Fläche stehenden geraden Cylinders und 2) des Schwerpunktes der gegebenen Fläche. Unmittelbar wendet er jedoch diese Bestimmung nur in dem Falle an, daß die Achse den Umriß der Fläche berührt. Da er aber sowohl für ebene Figuren wie für Raumgebilde die Relationen zwischen den Trägheitsmomenten in Bezug auf parallele Achsen in verschiedenen Entfernungen vom Schwerpunkt kennt, werden andere Trägheitsmomente leicht hierauf zurückgeführt.

Das Trägheitsmoment eines Körpers (oder einer ebenen Fläche in Bezug auf eine auf ihr senkrechte Achse) wird durch Addition der zwei Integrale $\int x^2 dv$, $\int y^2 dv$ gefunden, wo x und y die Entfernungen des Elements dv von zwei gegenseitig senkrechten Ebenen durch die Achse sind. Ferner wird die Berechnung eines jeden von ihnen, z. B. die von $\int x^2 dv$, auf die vorhergehende Berechnung des Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche zurückgeführt. Setzt man nämlich hier $dv = u dx$, so bedeutet u den Flächeninhalt des durch x bestimmten ebenen Schnittes des Körpers; stellt man aber durch dieselben Werte von u die Ordinaten einer ebenen Kurve dar, so wird $\int x^2 u dx$ das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf die Ordinatenachse bedeuten.

Die Berechnung kann einfacher ausgeführt werden, wenn auf der Achse senkrechte Schnitte unter sich ähnlich sind und die Spuren der Achse in entsprechende Punkte fallen. Ist nämlich der Inhalt eines solchen Schnittes u, so wird sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse $= ku^2$, wo k eine Konstante ist, die sich durch die Berechnung des Trägheitsmomentes eines einzelnen der Schnitte berechnen läßt. Das Trägheitsmoment des Raumgebildes wird $J = k \int u^2 dz$, wo z die Strecke ist, welche der Schnitt u auf der Achse abschneidet. Auch diese Berechnung führt Huygens auf eine Schwerpunktsbestimmung zurück. Indem er z zur Abscisse, u zur

Ordinate des laufenden Punktes einer ebenen Kurve wählt, wird der Rauminhalt durch die ebene Fläche $\int u dz$ dargestellt. Ist die u-Koordinate des Schwerpunktes dieser Fläche u_1, so wird

$$J = k \int u^2 dz = 2 k u_1 \int u dz$$

und somit $2ku_1$ der Faktor, mit dem der Rauminhalt $\int u dz$ vervielfacht werden muß, um das gesuchte Trägheitsmoment zu ergeben.

Huygens benutzt seine Methoden, um die reduzierten Pendellängen zu finden, die einem Kreise, einem Rechteck, einem gleichschenkligen Dreieck, einem Parabelabschnitt, einem Kreisausschnitt, einem Kreisumfang, einem regelmäßigen Vieleck, einer Pyramide, einem Kegel, einer Kugel, einem Cylinder, einem Abschnitt eines Umdrehungsparaboloids und einem halben Kegel entsprechen, die um angemessen gewählte Achsen schwingen.

Solchen Untersuchungen wie den hier genannten Anwendungen der Integration folgte man, wie es namentlich aus den Briefen von und an Huygens ersichtlich ist, in nicht kleinen Kreisen mit großem Interesse und hatte seine Lust daran, neue Fälle heranzuziehen, in denen sich die Integrationen ausführen ließen und übersichtliche Resultate ergaben. Es mangelte nicht an Einsicht in die mögliche Anwendung der Integration; sie tritt im Gegenteil deutlich in der Sicherheit hervor, mit der man eine Anwendung mit der anderen in Verbindung brachte. Die Integration selbst dagegen verstand man nur in einer ziemlich beschränkten Anzahl von Fällen, und zwar oft nur mit recht vieler Mühe, durchzuführen. Ihre weitere Entwickelung erheischte die Gewinnung neuer und umfassenderer Anschauungsweisen. Solche sollte man bald teils dem Gebrauche unendlicher Reihen, teils dem gegensätzlichen Verhältnis zur Differentiation entnehmen, die heute zur Charakterisierung der Integralrechnung wesentlich mitgehört, und von welcher der Name Integration, den wir der Deutlichkeit halber vorausgenommen haben, erst später hergeleitet wurde. Bevor wir zu der aus diesen neuen Anschauungsweisen entstandenen allgemeinen und methodischen Behandlung der Integrationsaufgaben übergehen, müssen wir die auch an und für sich sehr bedeutungsvollen Untersuchungen erörtern, auf denen sie beruhen.

3. Die Methoden unendlicher Näherung; Reihen.

Bei den im vorhergehenden besprochenen Integrationen war man stets bemüht, die gesuchte Größe wo möglich algebraisch durch die gegebenen auszudrücken. Wenn dies unmöglich war, konnte man sich damit begnügen, ihre Bestimmung auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel zurückzuführen, was dasselbe ist, wie wenn wir jetzt das betreffende Integral durch

Kreis- oder logarithmische Funktionen ausdrücken. In ganz einzelnen Fällen sind wir auf eine Zurückführung auf noch kompliziertere Integrale gestoßen. Dann konnte die Untersuchung nur auf einen Vergleich der Größen abzielen, die durch ein und dasselbe Integral dargestellt werden, wie z. B. auf den Vergleich von Spiralbogen höherer Ordnung mit Parabelbogen höherer Ordnung (S. 294) oder auf den der Länge einer verlängerten oder verkürzten Cykloide mit der Länge einer Ellipse (S. 298). Sollte dies irgend einen wesentlichen Ertrag ergeben, so mußte man indes eine der zwei zu vergleichenden Größen kennen, oder aber Mittel zu ihrer Berechnung oder zu der des Integrals selbst besitzen.

Wurde ein Integral auf diese Weise auf Kreisflächen zurückgeführt, so gewährte die Kenntnis von π und der trigonometrischen Tafeln Mittel, um die Berechnung vornehmen zu können. Dasselbe war, wenn man eine Integration auf die Quadratur der Hyperbel zurückführte, insofern der Fall, als man dann die bereits vorliegenden Logarithmentafeln benutzen konnte. Wie erwähnt, war man indes eher geneigt, es umgekehrt als einen Vorteil zu betrachten, die noch neuen Logarithmen mit einer schon lange bekannten Kurve in Verbindung zu bringen. In ihrer Darstellung als hyperbolische Flächenstücke — also als Integrale, indem wir noch immer dies Wort vorausnehmen — suchte man deshalb zunächst einen neuen Weg zur Berechnung der Logarithmen.

Das erste Mittel, das sich darbietet, die Darstellung einer Größe als eines Integrals zu ihrer Berechnung zu verwerten, ist die Eigenschaft des Integrals als des Grenzwertes einer Summe. Infolgedessen läßt sich das Integral, wenn man es aus mehr und mehr immer kleineren Teilen zusammensetzt, mit immer größerer Genauigkeit berechnen. Auf diese Weise berechnete schon Kepler die Näherungswerte von $\int_0^{\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta$, die für seine induktive Bestimmung des genauen Wertes dieses Integrals maßgebend waren (S. 254); dasselbe Verfahren wendet Roberval auf Integrale an, für die er keinen exakten Ausdruck zu finden vermag. Hierher gehört auch die Berechnung der Länge einer Kurve, die in der Berechnung eingeschriebener Vielecke mit mehr und mehr Seiten besteht. Dies Verfahren, das schon längst bei der Berechnung von π in Anwendung gebracht war, sehen wir die Mathematiker von Guldin bis auf Wallis auch auf andere Kurvenlängen anwenden.

Indes kommt am Ende der Zeit, die uns hier beschäftigt, besonders bei der Berechnung der Logarithmen, ein anderes Verfahren in Anwendung, die Darstellung der Integrale durch unendliche Reihen Bevor wir diese Methode, die bald eine allgemeinere Bedeutung erhalten sollte, genauer be-

sprechen, wollen wir auf den Gebrauch unendlicher Reihen und anderer unendlicher Näherungen in früheren Zeiten einen Blick werfen.

Schon im Altertum wendeten sowohl Euklid als auch Archimedes (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 170, 180) in ihren Beweisen solche Darstellungen von Größen an, die im wesentlichen mit den modernen unendlichen Reihen zusammenfallen, und zwar Archimedes namentlich die Summation der unendlichen geometrischen Reihe. Durch den Exhaustionsbeweis sorgte man dann dafür, daß die Summen dieser Reihen sich wirklich den Größen näherten, die sie ausdrücken sollten. Dabei baute man auf eine Voraussetzung, die in der 4. Definition des 5. Buches des Euklid aufgestellt wird, oder unmittelbarer auf den daraus hergeleiteten 1. Satz des 10. Buches. Dieser Satz besagt, daß man, wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr als die Hälfte hinwegnimmt und dieses Verfahren hinlänglich oft wiederholt, bis zu einer Größe gelangen kann, die kleiner ist als jegliche vorgegebene Größe derselben Art, ein Kriterium, das sich in der heutigen Sprache so wiedergeben läßt: *Lim.* $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 0$, wenn α, β, γ sämtlich $\leqq \frac{1}{2}$ sind (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 167). Wir wiederholen es hier, weil, wie wir sehen werden, wenigstens Newton seine Untersuchungen über die Konvergenz darauf stützt.

Unendliche Reihen sind jedoch nicht die einzige Näherungsform, die uns in der früheren Entwickelung der Mathematik begegnet ist. Eine unendliche Annäherung liegt jedesmal vor, wenn eine irrationale Zahl — es sei eine Wurzelgröße, eine Wurzel einer Gleichung, eine trigonometrische Größe oder π oder ein Logarithmus — mit größerer und größerer Genauigkeit durch ein Verfahren bestimmt wird, das sich fortsetzen läßt, bis die Abweichung von der zu berechnenden Größe kleiner als jegliche vorgegebene Zahl wird. Hiermit haben wir uns also schon in allen denjenigen vorhergehenden Abschnitten beschäftigt, die von numerischer Berechnung handelten. Wenn sich aber in ihnen die Frage nach der Konvergenz noch nicht erhoben hat, so beruht dies darauf, daß entweder durch eine solche Bestimmung jeder neuen Decimale sicher gestellt war, daß sie weder zu groß noch zu klein sei, oder darauf, daß die Konvergenz so stark war, daß sie gar nicht zu bezweifeln war; wirklich taugen ja nur solche starke Konvergenzen zu numerischen Berechnungen.

Unter den im vorigen Abschnitt behandelten Fragen wollen wir hier nur an solche Fälle erinnern, in denen die Konvergenz in einer bestimmten unendlichen Näherungsformel hervortritt. Hierher gehört Bombellis und Cataldis Darstellung der Quadratwurzel bestimmter Zahlen durch unendliche Kettenbrüche (S. 151), von der wir sahen, daß sie mit genauen Untersuchungen über den Grad der durch jeden Schritt gewonnenen Näherung

verbunden war. Bei Vietas Bestimmung von π als einem Produkte aus unendlich vielen Faktoren (S. 121) ist dessen Annäherung an π eine unmittelbare Folge davon, daß die Abweichung der Flächeninhalte der eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke von dem Inhalt des Kreises, wie Euklid dargetan hat, kleiner gemacht werden kann als jede vorgegebene Grenze. Auf wie dreiste Analogien Wallis' Bestimmung von π übrigens auch gebaut war, so haben wir doch (S. 285) gesehen, daß die Konvergenz mit großer Genauigkeit klargelegt war, indem π zwischen zwei Größen eingeschlossen wurde, deren Grenzverhältnis 1 war. In welchem Grade der Sinn für solche unendliche Näherungsformeln wachgerufen war, davon zeugt, daß Lord Brouncker sogleich Wallis' Ausdruck für π in einen unendlichen Kettenbruch

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + }}}}$$

umschrieb. Wir wissen jedoch nicht, wie er diesen merkwürdigen Ausdruck gefunden hat.

Während Wallis' unendlicher Näherungsprozeß π oder den ganzen Kreis betraf, verdankt man James Gregory einen solchen, der auf jeden Ausschnitt mit dem Scheitel im Mittelpunkt nicht nur eines Kreises, sondern auch einer Ellipse oder Hyperbel angewendet werden kann. Bezeichnen wir (Fig. 20) einen solchen Ausschnitt $OADB$ als s, das dazu gehörige Zentraldreieck OAB als i_1 und das Viereck $OACB$, das von den Halbmessern OA und OB und den Tangenten in A und B begrenzt wird, als u_1. Ist D der Berührungspunkt der mit AB parallelen Tangente des Bogens AB, dann teilt OD den Ausschnitt in zwei gleiche Ausschnitte; die Summe der hierin eingeschriebenen Dreiecke OAD und ODB bezeichnen wir als i_2 und die Summe der durch Halbmesser und Tangenten bestimmten Vierecke $OAFD$ und $ODGB$ als u_2. Sodann erhält man durch eine ähnliche Teilung der neuen Ausschnitte eine aus 4 Dreiecken bestehende Summe i_3 und eine aus 4 Vierecken bestehende Summe u_3 u. s. w. Die Figur zeigt, daß, wenn der Zentriwinkel des Ausschnittes kleiner als 2 rechte Winkel ist, $u_n \gtrless s \gtrless i_n$, wo die oberen Ungleichheitszeichen Ellipsen (Kreisen), die unteren Hyperbeln entsprechen. Was die Kreise betrifft, so ist schon in Euklids Beweis der Proportio-

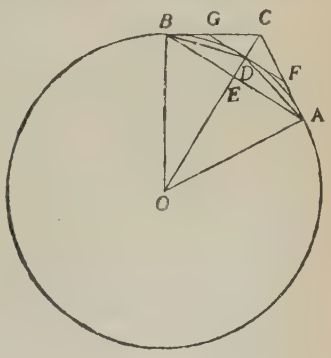

Fig. 20.

nalität von Kreisen mit den Quadraten der Halbmesser dargetan, daß der Grenzwert von i_n, wenn n ins Unendliche zunimmt, s ist; das gleiche ergibt sich auf dieselbe Weise für Ellipsen und Hyperbeln. Die Frage nach der Konvergenz bietet daher hier eigentlich nichts Neues dar, außer daß Gregory zuerst den Namen Konvergenz gebraucht, wobei er jedoch zunächst die allmähliche Bildung der konvergierenden Größen vor Augen hatte.

Die Bildungsweise, die er in diesem Fall für die Reihe von Größen

$$i_1, u_1; i_2, u_2; i_3, u_3; \cdots$$

aufstellt, ist

$$i_n = \sqrt{i_{n-1} u_{n-1}},\ u_n = \frac{2 i_n u_{n-1}}{i_n + u_{n-1}},$$

also eine Bestimmung sämtlicher Größen mittelst der beiden ersten durch folgende zwei Operationen: die Bestimmung der geometrischen und der harmonischen mittleren Proportionalen. Gregory gebraucht zwar keine Stellenzeiger; die dadurch ausgedrückte Gleichförmigkeit der fortgesetzten Bildung aber hebt er sehr kräftig hervor und benutzt sie in einer Weise, von der wir bald zu reden haben.

Der Gleichförmigkeit und Homogeneität wegen genügt es auch, die Sätze für $n = 2$ zu beweisen, was durch die vorliegende Figur leicht geschieht; man sieht dann wie Gregory, daß sie ebensowohl für Ellipsen und Hyperbeln wie für Kreise gelten.

Die gefundenen Resultate lassen sich zur Berechnung sowohl des ganzen Kreisflächeninhalts, also auch zu der von π, wie zur Berechnung des Inhalts eines Kreisausschnittes, wenn statt seines Zentriwinkels selbst dessen trigonometrische Funktionen gegeben sind, also zur Berechnung von Kreisfunktionen benutzen. Gregory wendet sie auch zur Berechnung von Hyperbelinhalten und vermittelst ihrer auf die der Logarithmen an. Jedoch wird die Berechnung durch die wiederholten Quadratwurzelausziehungen etwas weitläufig.

Ihr größtes Interesse erhalten die Formeln Gregorys indes durch seine theoretischen Anwendungen, indem er durch sie beweist, daß, wie wir es heute ausdrücken würden, die circularen und logarithmischen Funktionen nicht algebraisch sind. Er behauptet nämlich, daß sich der Grenzwert s, dem sich die Ausdrücke von i und u nähern, nicht analytisch durch zwei der Näherungswerte, i und u, ausdrücken läßt, d. h. daß er durch i_1 und u_1 nicht mittelst der gewöhnlichen algebraischen Operationen: der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelausziehung, ausgedrückt werden kann.

Die Hauptzüge des Beweises lassen sich so wiedergeben. Da man erst

durch eine unendliche Wiederholung desselben Verfahrens zu s gelangt, muß diese Größe auf ebendieselbe Weise von i_2 und u_2 abhängig sein wie von i_1 und u_1, oder, mit unserem modernen Funktionszeichen, es muß

$$s = f(i_1, u_1) = f(i_2, u_2)$$

sein.

Es gilt nun zu beweisen, daß diese Funktion f keine algebraische sein kann, wenn i_2 und u_2 in den schon angegebenen Weisen durch i_1 und u_1 ausgedrückt werden sollen. Da diese Ausdrücke irrational sind, führt Gregory neue Variabeln ein, indem er

$$i_1 = a^2(a + b), \quad u_1 = b^2(a + b)$$

setzt, wodurch

$$i_2 = ab(a + b), \quad u_2 = 2ab^2$$

werden. Der Beweis zielt sodann darauf ab, daß $f(i_1, u_1)$ und $f(i_2, u_2)$, wenn f eine algebraische Funktion bezeichnet, in a nicht von demselben Grad sein können. Wünschenswert wäre allerdings eine genauere Erklärung, wie der Grad berechnet werden soll, wenn die Funktion irrational ist; auf dem angegebenen Wege läßt sich aber sicherlich ein exakter Beweis durchführen, woraus hervorgeht, daß s wirklich keine algebraische Funktion von a und b oder von zwei zusammengehörenden i und u sein kann. Da man, wenn $i < u$ ist, durch Anwendung eines Kreisausschnittes und der ersten mit i_1 und u_1 bezeichneten Näherungsfiguren erkennt, daß

$$s = u\sqrt{\frac{i}{u-i}}\ \text{arc cos}\ \sqrt{\frac{i}{u}},$$

und da man, wenn $i > u$ ist, durch Anwendung auf eine gleichseitige Hyperbel s durch i und u algebraisch und logarithmisch ausgedrückt findet, ist es also bewiesen, daß circulare und logarithmische Funktionen nicht algebraisch sind.

Wie schon Leibniz bemerkt hat, verhindert dies nicht, daß s für einzelne bestimmte Werte von i und u durch gegebene rationale Zahlen algebraisch ausgedrückt werden kann. Dies könnte der Fall sein, wenn i und u solche Werte haben, daß s zu dem ganzen Kreise in einem rationalen Verhältnis steht. Gregory hat also nicht bewiesen, daß π, wie wir heute sagen, eine transcendente Zahl ist, ebensowenig — wie er vielleicht selbst glaubte —, daß sich der Kreis nicht mittelst Lineals und Zirkels quadrieren lasse. Dies ist erst in der neuesten Zeit auf ganz anderen Wegen von Lindemann und sodann auch von anderen bewiesen worden.

Vielleicht hinderte eben die Annahme, Gregorys Beweis betreffe gerade das soeben genannte Problem, Huygens, zu erkennen, was Gregory wirklich erreicht hat. In einer Rezension im *Journal des Savants* 1668 sucht

Huygens nämlich an einem Beispiel zu zeigen, daß man sehr wohl, wenn i_1 und u_1 und i_2 und u_2 auf die angegebene Weise durch a und b ausgedrückt werden, einen algebraischen Ausdruck aus i und u bilden kann, der durch Einsetzung beziehungsweise von i_1 und u_1 oder von i_2 und u_2 denselben Wert erhält; er läßt aber die Konstanten dieser Ausdrücke selbst von a und b abhängig sein und sieht also nicht, daß Gregory vorausgesetzt hat, a und b seien variabel oder *indefinitae*, wie er sich ausdrückt und in seiner Gegenantwort in den *Philosophical Transactions* hervorhebt.

Später hat Gregory seine für numerische Berechnung nur wenig zweckmäßige Näherungsmethode mit der Anwendung unendlicher Reihen vertauscht. Was die Logarithmen betrifft, so geschah dies erst, nachdem er mit der Reihenentwickelung Mercators bekannt geworden war, von der er gleichzeitig eine geometrische Begründung gab, was die circularen Funktionen betrifft, erst nachdem er eine Anwendung der allgemeinen Methode Newtons kennen gelernt hatte. Da seine verdienstvollen Arbeiten auf diesem Gebiete also keine neuen Bahnen brechen, wollen wir hier nur die wichtigsten Resultate hervorheben, die man ihm besonders zu verdanken hat. Es sind:

$$\log \frac{y}{z} = k\left[\frac{y-z}{y+z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

wo k eine Konstante ist, die für die natürlichen Logarithmen $= 2$ wird, und

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots,$$

wo wir seiner Formel die Gestalt gegeben haben, die sie erhalten muß, wenn man die moderne Bezeichnung *arc tg* gebraucht und den Halbmesser gleich 1 setzt. Erstere Formel ist wesentlich dieselbe wie

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

Wir nennen diese Resultate schon hier, weil sie eine sehr wichtige Übereinstimmung mit Gregorys älteren Untersuchungen aufweisen. Diese enthielten eine gemeinschaftliche Näherungsmethode zur Berechnung von Inhalten von Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln, somit auch von circularen und logarithmischen Funktionen. Gregorys Reihen zur Berechnung der zwei Arten von Funktionen stimmen denn auch, vom Vorzeichen jedes zweiten Gliedes abgesehen, völlig überein.

Nach der kurzen Besprechung dieser Anwendung unendlicher Reihen zur Berechnung circularer und logarithmischer Funktionen werden wir jetzt andere ältere Anwendungen derselben Methode erörtern. Sie begegnen uns zuerst bei Huygens und bei Brouncker, und zwar in einer Gestalt, die

sie augenscheinlich infolge Beeinflussung durch Archimedes' geometrische Quadratur des Parabelabschnittes (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 180) erhalten haben. Diese wurde ausgeführt, indem dem Abschnitt ein Dreieck einbeschrieben wurde, dessen Scheitelpunkt der Berührungspunkt der mit der Sehne des Abschnittes parallelen Tangente war, sodann jedem der beiden übriggebliebenen Abschnitte auf dieselbe Weise Dreiecke einbeschrieben wurden, deren Summe nun ein Viertel des ersten Dreiecks ausmacht, ferner den abgeschnittenen vier Abschnitten wiederum neue Dreiecke einbeschrieben wurden u. s. w. Der vorgelegte Abschnitt wurde sodann gleich dem Produkte der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, deren Wert $\frac{4}{3}$ ist, in das erste Dreieck.

Huygens wendete dasselbe Verfahren zur Bestimmung von Grenzen an, zwischen denen ein Kreisabschnitt liegen muß. In dem Abschnitt $AEBDC$ (Fig. 21), der kleiner ist als ein Halbkreis, wird zuerst das Dreieck ABC mit dem Scheitelpunkt B im Mittelpunkt des Bogens ABC einbeschrieben, sodann auf dieselbe Weise die Dreiecke AEB u. BDC den übriggebliebenen Abschnitten u. s. w. Demnächst beweist er, daß

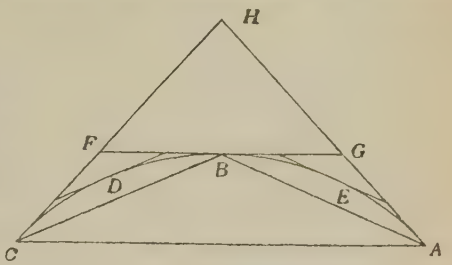

Fig. 21.

$$\triangle AEB + \triangle BDC > \tfrac{1}{4} \triangle ABC.$$

Wenn man nun den neuen Abschnitten immer neue Dreiecke einbeschreibt, wird man, wieweit man auch dies Verfahren fortsetzt, doch den Abschnitt nie ganz erreichen. Also wird

$$\text{Segm. } AEBDC > \triangle ABC \ (1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \cdots), \text{ also} > \tfrac{4}{3} \triangle ABC.$$

Er beweist ferner, daß $\triangle FHG > \frac{1}{2} \triangle ABC$ ist, wenn AH und CH die Tangenten in A und C sind, die in F und G von der zu AC parallelen Tangente geschnitten werden. Da ebenso die von den Tangenten in E und D abgeschnittenen äußeren Dreiecke größer sind als $\frac{1}{2} \triangle AEB$ und $\frac{1}{2} \triangle BDC$ u. s. w., die äußere Fläche $AEBDCH$ aber den Grenzwert der Summe der ersteren Dreiecke, der Abschnitt $AEBDC$ den der letzteren ausmachen, ist

$$2 \times \text{Fläche } AEBDCH > \text{Segm. } AEBDC$$

und somit

$$\text{Fläche } AEBDCH > \tfrac{1}{3} \triangle AHC.$$

Huygens vermag nun die Berechnung von π und die darauf beruhenden Berechnungen trigonometrischer Größen wesentlich zu vereinfachen. Diese hatten bisher namentlich darauf beruht, daß der Flächeninhalt und

der Umfang des Kreises größer sind als die eines einbeschriebenen Vielecks und kleiner als die eines umschriebenen. Die hier angegebenen Resultate setzten aber Huygens in den Stand, gleich nach der Berechnung der Flächeninhalte I_n und U_n eines einbeschriebenen und eines umschriebenen Vielecks engere Grenzen, als es diese sind, für den Kreisinhalt oder, wenn wir den Halbmesser $= 1$ setzen, für π anzugeben. Man findet dann nämlich

$$I_n + \tfrac{1}{3}(I_n - I_{\frac{n}{2}}) < \pi < U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - I_n).$$

Auf diese Weise erhält man ungefähr doppelt soviel richtige Ziffern in π, als wenn man wie Archimedes nur das ein- und umschriebene Vieleck als Grenzen gebraucht.

Huygens wendet übrigens auch andere Mittel an, um ohne Vermehrung der Seitenzahl der Vielecke die Grenzen, zwischen denen π liegen muß, noch ferner zu beschränken. Hierüber wollen wir nur bemerken: ebenso wie die schon dargestellte Bestimmung auf einem Vergleiche des Inhaltes eines Kreisabschnittes mit dem eines Parabelabschnittes beruht, so hängen die übrigen teilweise von einer Untersuchung der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte dieser Abschnitte ab.

Huygens stellte einen Kreisabschnitt durch eine unendliche Reihe, deren erstes Glied das einbeschriebene Dreieck, deren zweites die Summe von 2 Dreiecken, deren drittes die Summe von 4 Dreiecken ist u. s. w., unter vergleichender Heranziehung der geometrischen Reihe dar, die bei gleicher Zerlegung einen Parabelabschnitt darstellt. Lord Brouncker verfuhr ganz ebenso mit dem Abschnitt einer gleichseitigen Hyperbel (*Philosophical Transactions* 1668). Hier erhält man indes zugleich einfache Ausdrücke für den Inhalt der einzelnen Dreiecke, so daß die unendliche Reihe, welche den Abschnitt darstellen soll, in rein arithmetischer Gestalt auftritt. Er beginnt aber mit der Entwickelung ähnlicher Reihen zur Bestimmung anderer hyperbolischer Flächen, besonders derjenigen, die unmittelbar Logarithmen darstellen.

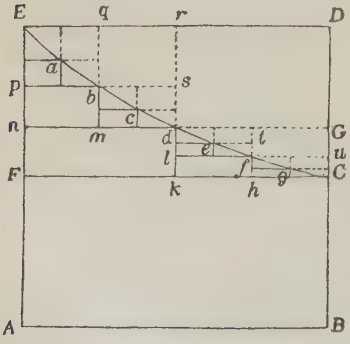

Fig. 22.

Lord Brouncker sucht gewissermaßen nur log 2; sein Verfahren kann aber, wie er selbst bemerkt, auf die Logarithmen aller rationalen Zahlen angewendet werden. Der Bogen EdC (Fig. 22) ist ein Stück der gleichseitigen Hyperbel, welche, auf ihre Asymptoten als Koordinaten bezogen, die Gleichung $xy = 1$ hat. AB ist die eine

dieser Asymptoten, E der Scheitelpunkt der Hyperbel, dessen Koordinaten beide 1 sind; setzen wir $AB = 1$, so erhält der Punkt C die Koordinaten 2 und $\frac{1}{2}$ und die Fläche $AEdCB$ den Inhalt log (2). Das Stück AB der Abscissenachse wird erst in 2, sodann in 4, 8 u. s. w. gleiche Stücke geteilt. In der Figur sind a, b, c, d, e, f, g die Punkte der Hyperbel, welche die Abscissen

$$1\tfrac{1}{8},\ 1\tfrac{2}{8},\ 1\tfrac{3}{8},\ 1\tfrac{4}{8},\ 1\tfrac{5}{8},\ 1\tfrac{6}{8},\ 1\tfrac{7}{8}$$

haben. Die Geraden der Figur sind den Koordinatenachsen (Asymptoten) parallel gezogen. Nun findet man erst innerhalb der Fläche $EDCd$ Rechtecke von folgenden Größen

$$dD = \frac{1}{2\cdot 3},\ br = \frac{1}{4\cdot 5},\ fG = \frac{1}{6\cdot 7},$$

$$aq = \frac{1}{8\cdot 9},\ cs = \frac{1}{10\cdot 11},\ et = \frac{1}{12\cdot 13},\ gu = \frac{1}{14\cdot 15},$$

und innerhalb der gesuchten Fläche $ABCdE$ selbst

$$CA = \frac{1}{1\cdot 2},\ dF = \frac{1}{3\cdot 4},\ bn = \frac{1}{5\cdot 6},\ fk = \frac{1}{7\cdot 8},$$

$$ap = \frac{1}{9\cdot 10},\ cm = \frac{1}{11\cdot 12},\ el = \frac{1}{13\cdot 14},\ gh = \frac{1}{15\cdot 16}.$$

Dies läßt sich leicht nachweisen, da die Seiten der Rechtecke Differenzen sind teils zwischen den gegebenen Abscissen, teils zwischen den entsprechenden Ordinaten der Hyperbel $xy = 1$. Teilt man AB in 16, 32, $\cdots$ Teile, so kommen an den beiden Stellen 8, 16, $\cdots$ neue Rechtecke hinzu, deren Inhalte dem schon deutlich hervortretenden Gesetze gemäß ausgedrückt werden; dies ist ein Induktionsschluß, von dessen Gültigkeit sich Lord Brouncker wohl überzeugen konnte, obgleich man damals noch keine genügenden algebraischen Hilfsmittel besaß, um in übersichtlicher Weise einen vollständigen Beweis liefern zu können. Auf diesem Wege findet er, daß

$$(1) \qquad EDCd = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{8\cdot 9} + \cdots$$

$$(2) \qquad ABCdE = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots$$

Indem er diese Reihen addiert, findet er, daß

$$(3) \qquad 1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots$$

Er folgert ferner, daß der Abschnitt

$$(4) \qquad ECd = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \cdots$$

Letzterer wird als halbe Differenz der Flächen $EDCd$ und $FCdE$ gefunden,

von denen letztere nach Wegnahme des ersten Gliedes der Reihe (2) durch diese Reihe dargestellt wird. Nun erhält man die Glieder der Reihe (4), indem man die Glieder der $EDCd$ und $FCdE$ darstellenden Reihen Glied für Glied subtrahiert, nämlich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ u. s. w.}$$

Die einzelnen Glieder dieser neuen Reihe werden übrigens von Brouncker unmittelbar als Teile des Abschnittes EdC dargestellt. So ist das erste Glied der Inhalt von $\triangle EdC$, das zweite der von $\triangle Ebd$, das dritte der von $\triangle dfC$ u. s. w., kurz, die Glieder sind die Inhalte von Dreiecken, die denjenigen entsprechen, in die Archimedes den Parabelabschnitt, Huygens den Kreisabschnitt teilte.

Die Reihe (4) wird als die konvergenteste bei der wirklichen Ausführung der Berechnung benutzt, worauf log 2 gefunden wird, indem der Abschnitt vom Trapez $ABCE$, das $= \frac{3}{4}$ ist, abgezogen wird. Bei der Berechnung sucht Lord Brouncker teils (wie Huygens) der gesuchten Größe näher zu kommen, als es durch die berücksichtigten Glieder der Reihe möglich ist, teils zuverlässige Grenzen für die Genauigkeit zu gewinnen. Wie Archimedes ordnet er die Glieder, den allmählichen Teilungen des Stückes AB in 2, 4, 8, 16, $\cdots$ gleiche Teile entsprechend, gruppenweise. Nennen wir diese Gruppen von 1, 2, 4, 8, $\cdots$ Gliedern $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$, so ist

$$u_1=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\quad u_2=\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} \text{ u. s. w.}$$

Lord Brouncker behauptet nun, daß — mit diesen Bezeichnungen — $\frac{1}{4}u_n < u_{n+1}$ sei, und liefert hierfür einen vollständig allgemeinen algebraischen Beweis, indem er durch Buchstabenrechnung dartut, daß, wenn nur $a > 2$ ist,

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{a(a-1)(a-2)} < \frac{1}{2a(2a-1)(2a-2)}+\frac{1}{(2a-2)(2a-3)(2a-4)}$$

ist, also daß $\frac{1}{4}$ jedes Gliedes in u_n kleiner ist als die Summe zweier entsprechenden Glieder in u_{n+1}. Dadurch findet er, daß

$$\text{Segm. } ECd > u_1+u_2+\cdots u_n\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4^2}\cdots\right)$$

oder

$$\text{Segm. } ECd > u_1+u_2+\cdots u_n+\tfrac{1}{3}u_n,$$

also eine nähere niedrigere Grenze als die, welche man erhält, wenn man bei dem Gliede u_n aufhört. Als höhere Grenze für den Rest wird ohne anderen Beweis als die Bezugnahme darauf, daß $u_{n+1} > \frac{1}{4}u_n$, die Größe $\frac{4}{3}\,u_n\frac{2}{u_{n-1}}$ aufgestellt. Um zu dieser Behauptung zu gelangen, muß er den

Umstand benutzt haben, daß sich, wie aus seinem Beweis für die genannte Ungleichheit wirklich hervorgeht, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, wenn es auch den Wert $\frac{1}{4}$ nie erreicht, doch abnehmend diesem Grenzwert nähert, so daß

$$u_{n+1} < \frac{u_n}{u_{n-1}} u_n, \quad u_{n+2} < u_n \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^2 \text{ u. s. w.},$$

weshalb die Summe der Glieder nach u_n kleiner wird als

$$\frac{u_n{}^2}{u_{n-1}} \frac{1}{1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

Lord Brounckers Resultat erhält man, wenn man hier $\frac{1}{4}$ für $-\frac{u_n}{u_{n-1}}$ einsetzt. Formaliter mindestens ist dies unrichtig, da $\frac{1}{4}$, das zu klein ist, auch den Bruch zu klein macht, man also nach Einsetzung von $\frac{1}{4}$ einer höheren Grenze nicht mehr durchaus gewiß sein kann. Da indessen u_n und u_{n-1} bekannt sind, braucht man sich nur auf die Decimalen zu beschränken, auf welche die genannte Einsetzung ohne Einfluß ist. Nun berücksichtigt Brouncker allerdings in der numerischen ($n = 5$ entsprechenden) Berechnung 1 Decimale mehr, als hiernach erlaubt sein sollte; daß man demungeachtet eine höhere Grenze erhält, darf man wohl dem Umstand entnehmen, daß es in dem letzten Faktor der von uns angegebenen zuverlässigen höheren Grenze erlaubt ist, das bekannte $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ mit $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zu vertauschen, das allerdings nicht berechnet ist, aber $\frac{1}{4}$ viel näher kommen wird als $\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Das Material für eine ähnliche Behandlung der weniger konvergierenden Reihen (1) und (2) beschafft Lord Brouncker gleichfalls, indem er in beiden auf dieselbe Weise die Glieder in Gruppen vereinigt. Was die Reihe (1) betrifft, so wird die umgestaltete Reihe aus dem ersten Gliede, das wir auch hier u_1 nennen werden, der Summe (u_2) der zwei folgenden, der Summe (u_3) der vier folgenden u. s. w. gebildet. Es wird sodann bewiesen, daß $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$, wodurch der Rest, wenn man bei einem beliebigen Gliede aufhört, kleiner wird als in einer konvergenten geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$. In dem Beweis hierfür hatte Brouncker nicht wie vorhin nötig, zu der ungewohnten Anwendung der algebraischen Zeichensprache auf die allgemeinen Glieder seine Zuflucht zu nehmen, sondern er konnte mit der gewöhnlicheren geometrischen Algebra vorlieb nehmen. Er folgert nämlich aus der Figur, daß

$$\tfrac{1}{2}\, dD = br + bn > br + fG \text{ u. s. w.},$$

da $bn > fG$, weil sie dieselbe Grundlinie $\frac{1}{4}$ haben, während die Höhe, d. h. die Differenz zwischen Ordinaten, welche Abscissen mit derselben Differenz entsprechen, abnimmt, wenn die Abscissen wachsen. Es ist leicht ersichtlich, daß sich diese Begründung auf alle Glieder der Reihe ausdehnen läßt. — Aus der Reihe (2) dagegen erhält man [nach Wegwerfung des ersten Gliedes und] mittelst einer ähnlichen Ordnung der Glieder $u_{n+1} > \frac{1}{2} u_n$; also wird, wie für die Reihe (3), die entsprechende geometrische Reihe nur eine untere Grenze bilden.

Erstens also berechnet Lord Brouncker Größen als Summen unendlicher Reihen; zweitens gestaltet er diese in solche um, in denen das Verhältnis eines jeden Gliedes zu dem vorhergehenden sich einer Grenze nähert, die kleiner als 1 ist. Während die entsprechende Umgestaltung Archimedes zu einer konvergenten geometrischen Reihe führte, wendet Brouncker drittens einen Vergleich mit geometrischen Reihen an, um eine stärkere Annäherung zu erzielen und namentlich, um Grenzwerte für den Rest zu finden. In dem Falle, daß das genannte Verhältnis wie bei der Reihe (1) sich wachsend dieser Grenze nähert, erhält man auf diesem Wege eine exakte Bestimmung einer höheren Grenze der Summe der Reihe. Wenn das Verhältnis zwischen den Gliedern dagegen abnimmt, wie in (2) und (4), wendet er viertens einen recht sinnreichen Kunstgriff an, um eine höhere Grenze zu berechnen. Dieser ist jedoch nicht durchaus zuverlässig, wenn er als abstrakte Regel aufgestellt wird, und es ist nicht klar, ob Brouncker sah, wie man seine Gültigkeit bei der vorliegenden numerischen Untersuchung sichern sollte.

Lord Brouncker bemerkte aber doch, welche Forderungen man bei der Berechnung der Summe einer unendlichen Reihe zu stellen hat. Was wir heute Konvergenz einer Reihe nennen, beruht ja darauf, daß die Differenz zweier Werte, zwischen denen die Reihe liegen muß, kleiner als jede vorgegebene Größe gemacht werden kann. So ist die Konvergenz der Reihe (1) jedenfalls vollständig klargelegt.

Für die vorliegende Untersuchung ist indes der besondere Beweis für die Konvergenz der Reihen weder notwendig noch hinreichend; ersteres nicht, weil die Summen der Reihen, der geometrischen Anwendung entsprechend, stets kleiner bleiben, als die endlichen Flächenräume, für deren Darstellung sie bestimmt sind; letzteres nicht, weil sich die Reihen, wenn sie auch konvergent sind, möglicherweise nicht diesen Flächenräumen, sondern nur kleineren Grenzwerten nähern. Daß man indessen durch die Heranziehung einer genügenden Anzahl Glieder in jeder Reihe die Abweichung von dem Flächenraum, den sie darstellen soll, kleiner als jede vorgegebene Größe machen kann, geht aus einem Umstand hervor, den Brouncker ausdrücklich anführt. Er sagt nämlich, daß

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{a(a+1)}=1-\frac{1}{a+1}$$

ist, ein Resultat, welches leicht zu begründen ist. Hieraus folgt, daß sich, wenn man a ins Unendliche wachsen läßt, die unendliche Reihe (3) wirklich dem für sie aufgestellten Werte 1 nähert. Da nun die Abweichung dieser Reihe von dem Flächeninhalt des Quadrates $ABDE$ die Summe der Abweichungen der Reihen (1) und (2) von den Flächenräumen $DCdE$ und $ABCdE$ ausmacht, so können auch diese letzteren Abweichungen, wenn man mehr und mehr Glieder berücksichtigt, kleiner als jede Grenze gemacht werden.

Die Möglichkeit, auf diesem Wege auch die Logarithmen anderer rationaler Zahlen als 2 zu berechnen, beruht darauf, daß man, wenn AB nur rational ist, es in andere rationale Teile als die hier angewendeten teilen kann; den Teilungspunkten entsprechen dann auch rationale Ordinaten, also rationale Rechtecke. Wenn die Zahl zwischen 1 und 2 liegt und der Nenner eine Potenz von 2 ist, kann man sogar dieselben Teilungen, also Glieder derselben Reihen anwenden. So findet Lord Brouncker

$$\log\frac{5}{4}=\frac{9}{40}-\text{Segm. }Eab,$$

wo

$$\text{Segm. }Eab=\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\frac{1}{16\cdot 17\cdot 18}+\frac{1}{18\cdot 19\cdot 20}+\frac{1}{32\cdot 33\cdot 34}+\frac{1}{34\cdot 35\cdot 36}$$
$$+\frac{1}{36\cdot 37\cdot 38}+\frac{1}{38\cdot 39\cdot 40}+\cdots$$

ist, und berechnet hieraus und aus dem gefundenen Wert von log 2 den log 10.

Mercators Logarithmenbestimmung durch Reihen, die in seiner *Logarithmotechnia* etwas vor der Brounckers veröffentlicht wurde, bildet zu dieser einen gewissen Gegensatz. Brouncker hat gezeigt, wieweit man es bringen konnte, wenn man in der hergebrachten Weise im Anschluß an die altertümlichen Auffassungen, aber doch im Bedürfnisfall unter Benutzung moderner Hilfsmittel arbeitete. Im Anschluß an das Altertum wurde auch an allen Forderungen festgehalten, die man sonach an die exakte und vollständige Behandlung der engeren Aufgabe, welche vorlag, stellen mußte. Mercators Methode hat das deutliche Gepräge einer größeren Allgemeinheit; er ist zugleich der erste, der eine Anwendung dieser Methode veröffentlicht hat, wenn auch Newton sie damals schon besaß und durch sie bereits Resultate von der allergrößten Bedeutung gewonnen hatte. Ihrer Allgemeinheit wegen läßt sich Mercators Anwendung kürzer darstellen als Lord Brounckers Untersuchung.

Wir können hierbei als zu quadrierende Hyperbel die schon in Fig. 22 dargestellte benutzen, indem wir in ihrer Gleichung den Punkt A zum Anfangspunkt wählen, während AB Abscissenachse bleibt. Dann haben wir die Gleichung

$$y = \frac{1}{1+x}$$

oder durch eine Reihenentwickelung, die Mercator durch fortgesetzte Division erzielt,

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Wenn wir hier durch a $(= AB)$ einen beliebigen Wert von x bezeichnen, finden wir den Flächenraum $ABCE$ oder den natürlichen Logarithmus von $(1+a)$, indem wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens von 0 bis a integrieren, also

$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

Mit dieser ganz neuen Anwendung der Integrationen oder Quadraturen, die er von Wallis kannte, verband Mercator jedoch nicht die Genauigkeit der Ausführung, die mit den alten Untersuchungsmethoden so eng verknüpft war. So ist es bezeichnend, daß in seiner eigenen Figur $a > 1$ ist, so daß die Konvergenz gar nicht vorliegen würde, die für seine Methode die notwendige Bedingung ist. Die Notwendigkeit der Konvergenz wurde übrigens von Wallis hervorgehoben; er zeigt zugleich, daß man die Methode durch eine geringe Erweiterung doch zur Berechnung eines jeden Flächenraumes anwenden kann, der von einer gleichseitigen Hyperbel, einer Asymptote und zwei der anderen Asymptote Parallelen begrenzt wird. Wählt man die eine von diesen zur Ordinaten-, die erstere Asymptote zur Abscissenachse, so läßt sich die Gleichung der Hyperbel

$$y = \frac{b}{1 \pm x}$$

schreiben, wenn wir den Abstand der Ordinatenachse von der mit ihr parallelen Asymptote gleich 1 setzen und das Stück, das die Kurve auf der Ordinatenachse abschneidet, b nennen. Das doppelte Vorzeichen rührt davon her, daß Wallis für die Abscissen x noch keine Vorzeichen anwendet. Hieraus folgt, wenn $0 < a < 1$, durch das von Mercator angewendete Verfahren

$$\pm b \cdot \log(1 \pm a) = b\left(a \mp \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \mp \frac{a^4}{4} + \cdots\right),$$

wo $\pm b \log(1 \pm a)$ ein in der angeführten Weise begrenzter Flächenraum ist. Wallis macht darauf aufmerksam, daß ein jeder Flächenraum sich so bestimmen lasse. Es kann in jedem Falle durch Benutzung der

unteren Vorzeichen geschehen, weil dann die Ordinatenachse diejenige der beiden Parallelen ist, die vom Zentrum den größeren Abstand hat und also $a < 1$ ist.

Sowohl bei den unendlichen Reihen als bei den übrigen von uns besprochenen unendlichen Näherungen hat es sich gezeigt, daß man im 17. Jahrhundert im Anschluß an die Betrachtungsweise des Altertums trotz der formalen Veränderungen die Konvergenz dieser Operationen noch sorgfältig berücksichtigte. Hierbei denken wir jedoch nicht an die abstrakte, von den Anwendungen unabhängige Konvergenz der Reihe selbst oder einer anderen Entwickelung, die man vornahm. Einer solchen Betrachtungsweise nähert sich nur Lord Brouncker; es gelingt ihm, die abstrakte Konvergenz wenn auch nur für die Reihe zu beweisen, die wir als (1) bezeichnet haben. Nein, man hielt sich an die Konvergenz, auf die es zunächst ankam — von der die abstrakte Konvergenz sodann eine Folge wird — an die Konvergenz der Reihen eben nach den Größen, die man darzustellen und zu berechnen wünschte. Öfters geht diese Konvergenz fast unmittelbar aus den für die numerische Berechnung bestimmten Ausdrücken hervor, die man für die Genauigkeit der allmählichen Näherungen fand. Dies haben wir früher schon bei Wallis (S. 285), wie auch hier bei Brouncker gesehen.

Man hat indes oft schließen wollen, daß man sich im 17. Jahrhundert und früher gar nicht um die Konvergenz bekümmert habe, und zwar aus den Nachlässigkeiten, deren man sich im 18. Jahrhundert in dieser Beziehung gewöhnlich schuldig machte.

Es kann in der Tat auch auffällig scheinen, daß man im 18. Jahrhundert die guten Lehren der großen Vorgänger sollte vernachlässigt haben. Hierzu können wir erstens bemerken, daß diese Lehren nicht mehr unmittelbar anzuwenden waren, wenn man sich nicht mehr nur mit unendlichen Reihen oder Näherungen begnügen wollte, welche Größen darstellen sollten, an deren Existenz von vornherein kein Zweifel bestehen konnte, wohl aber Größen in Betracht zog, die durch die Reihen selbst erst definiert werden sollten. Sodann ist es verständlich, daß vieles vom Alten verloren gehen konnte, wenn seine ganze Darstellung in die neuen Formen hineingeleitet wurde, deren Anwendung man im 18. Jahrhundert erlernt hatte. Mit ihnen hatte sich noch keine Tradition verbunden, welche darauf hätte hinweisen können, in welchen Beziehungen man sich vor Irrtümern zu hüten habe, und die Begriffe, die den neuen Operationsformen zu Grunde lagen, waren noch nicht so scharf abgegrenzt, daß man zu jeder Zeit den Gültigkeitsbereich der Operationen recht hätte überblicken können. Dagegen sah man, wie leicht sich die Operationen in diesen neuen Formen ausführen ließen,

und erkannte den großen Umfang der dadurch gewonnenen Resultate, wendete aber vorläufig nicht die nötige Zeit dazu auf, um ihre Begrenzung völlig klarzulegen. Eine Andeutung, daß wir mit dieser Erklärung recht haben, liegt schon darin, daß gerade Mercator, dessen Reihenentwickelungsmethode das modernste Gepräge hatte, durchaus nicht von der Konvergenz der Reihe redet, während diese von denjenigen nicht versäumt wurde, die sich genauer an die alten bewährten Formen hielten.

Wenn sich also die alten Verfahren von wesentlich geometrischer Art im Gegensatz zu den mehr algebraischen oder denjenigen, die später mit noch weitergehendem Gebrauch von Algorithmen verknüpft wurden, als die sicheren und exakten bewährten, so streitet dies durchaus nicht dagegen, daß man heutzutage umgekehrt nicht ohne Grund die Analyse für exakter als die meisten Anwendungen geometrischer Methoden ansieht. Die größte Exaktheit kann man stets auf dem Gebiete erreichen, auf dem man den Voraussetzungen die schärfste Definition gegeben hat. Dies Gebiet war in der Zeit, mit der wir uns hier beschäftigen, die aus dem Altertum überlieferte Geometrie; im Laufe des 19. Jahrhunderts ist aber die Analyse in der genannten Beziehung immer mehr in den Vordergrund getreten.

4. Die Behandlung der Aufgaben, die heute durch Differentiation gelöst werden.

Während die Wertbestimmung des Integrals einer entwickelten Funktion schon vom Altertum her in der Gestalt einer Quadraturaufgabe auftreten konnte und ihre Verbindung mit anderen Aufgaben, die durch dasselbe Integral gelöst werden, schon von Archimedes benutzt wurde, unterzog man im Altertum die Aufgaben, die heute durch Differentiation gelöst werden, keiner so systematischen und gleichmäßigen Behandlung. Wir denken hier namentlich an die Bestimmung von Tangenten, Maximis und Minimis und an die Feststellung der Bedingungen für gleiche Wurzeln algebraischer Gleichungen. Besonders gestalteten sich die Tangentenbestimmungen recht verschiedenartig, indem man die verschiedenen bekannten Eigenschaften der einzelnen Kurven oft ziemlich ungleichmäßig zu dem Beweise benutzte, daß eine gewisse Gerade zwar einen Punkt mit der Kurve gemein habe, zu beiden Seiten des Punktes aber auf derselben Seite der Kurve liege. Deutlicher trat in der Behandlung der Alten der wechselseitige Zusammenhang zwischen den genannten verschiedenen Klassen von Aufgaben hervor. Daß eine gewisse Größe einen Maximal- oder einen Minimalwert hat, ergibt sich ja daraus, daß sie, falls sie größer oder kleiner wird, die betreffende Aufgabe unmöglich macht; die Angabe des Maximal- oder Minimalwertes wird gewöhnlich in dem sogenannten Diorismus der Aufgabe selbst bei-

gefügt (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 99). Einen solchen Wert aber gewinnt man eben, wenn die Gleichung, von der die algebraische Lösung abhängen würde, gleiche Wurzeln hat. In der im Altertum üblichen Behandlung gibt sich dies dadurch kund, daß die Kurven, durch deren Schnitt die Aufgabe gelöst wird, einander berühren; der Beweis, daß dies stattfindet, beruht wiederum auf derBestimmung der Tangenten der einzelnen Kurven.

Schon der mit der Auflösung quadratischer Gleichungen verbundene Diorismus und die in ihm enthaltene Bestimmung des Maximums von $x\,(a-x)$ sind ein Beispiel für die Verbindung von Maximalbestimmungen mit der Lösung gewisser Probleme. Ebenso enthält der Diorismus der durch Eutokius auf uns gekommenen Auflösung der Archimedesschen Gleichung 3. Grades (Zeuthen, a. a. O., S. 218)

$$x^2\,(a-x) = b^2c$$

eine Bestimmung des Maximalwertes von $x^2\,(a-x)$, die aus den Tangentenbestimmungen der zur Auflösung benutzten Kurven hergeleitet wird. In ähnlicher Weise verwendet Apollonius die Bestimmung von Tangenten an die Kurven, durch die er die Normalen von einem gegebenen Punkt bis zu einem Kegelschnitt konstruiert, um die Anzahl solcher Normalen zu erörtern. (Zeuthen, a. a. O, S. 221).

Noch eine Minimalbestimmung aus dem Altertum wollen wir hervorheben, und zwar die von Pappus in seinen Hilfssätzen zu der verloren gegangenen Schrift des Apollonius von dem bestimmten Schnitt erwähnte. Hier gilt es, auf einer Geraden mit den Punktepaaren A, A' und B, B' einen Punkt P derart zu bestimmen, daß das Verhältnis $\frac{PA \cdot PA'}{PB \cdot PB'}$ einen bestimmten Wert erhält. Im allgemeinen erhält man zwei Punkte, das Verhältnis wird aber, wie Pappus sagt, „einfach“ und am kleinsten (oder am größten), wenn P, wie man sich heute ausdrückt, ein Doppelpunkt in der durch A, A' und B, B' bestimmten Involution wird. Fermat macht darauf aufmerksam, daß der Ausdruck „einfach“ gerade bezeichnet, daß bei diesem Werte die entsprechenden Punkte zusammengefallen sind. Dies stimmt eben mit dem Zusammenhang zwischen gleichen Wurzeln und Minimalwerten, den wir eben hervorgehoben haben, überein.

Da man zu Anfang der neueren Zeit vor allem bemüht war, die in geometrischer Form von den Alten ererbte Algebra teils umzugestalten, teils in bedeutendem Grade zu erweitern, war man zwar durch den Ausbau der Methoden zur Lösung von mehr und mehr Gleichungen derart in Anspruch genommen, daß man die Diorismen und die in ihnen enthaltenen Sätze über Maxima und Minima etwas weniger beachtete. Immerhin drängten sich solche Grenzfälle von selbst auf, indem sie bisweilen, wie bei der Gleichung

3. Grades, Fälle, die man bereits zu behandeln verstand, von solchen unterschieden, deren Behandlung erst später möglich werden sollte. In dieser Weise war, wie wir (S. 87) gesehen haben, Tartaglia auf eine interessante Maximalbestimmung geführt worden. In den einfachen Fällen, in denen irgend eine Bestimmung dieser Art mit der Erörterung einer Konstruktion mittelst Lineals und Zirkels oder mit der Erörterung der Auflösung einer Gleichung 2. Grades verbunden werden konnte, versäumte man dies nicht. Eine derartige Minimalbestimmung ist uns z. B. bei Galilei begegnet (S. 245 unten).

Eine zusammenhängende Reihe solcher Bestimmungen findet man in Vivianis 1659 erschienener Schrift *De maximis et minimis*, die zwar einer Zeit zugehört, in der schon neue Methoden zu ihrer Erledigung vorhanden waren, die aber selbst durchaus antike geometrische Behandlungsweise anwendet. Sie tritt sogar als ein Versuch auf, das Rätsel zu lösen, was das 5. Buch des Apollonius von den Kegelschnitten, das erst etwas später aus dem Arabischen bekannt wurde, enthalten haben mag.

Der Versuch ist insofern gelungen, als Viviani die Konstruktion der Normalen von einem gegebenen Punkt bis zu einem Kegelschnitt, die Apollonius in dem genannten Buch aufstellt, wirklich wiederauffand. Aus Eutokius' Kommentar wußte er zwar, daß Apollonius diese Aufgabe dort behandelt habe. Es gereicht ihm aber zur besonderen Ehre, es in der Aneignung der antiken Geometrie so weit gebracht zu haben, daß er gerade Apollonius' Lösung wiederfand. Er verknüpft damit jedoch keine solche Untersuchung der Möglichkeitsbedingungen wie Apollonius. Der Umstand, daß dasjenige Buch der Apolloniusschen Kegelschnitte, dessen Wiederherstellung er versucht, gerade Fragen über Maxima und Minima behandelt haben sollte, veranlaßte ihn, mit Eifer alle diesbezüglichen Fragen, welche Kegelschnitte betreffen konnten, heranzuziehen. Vieles davon hat nur geringes Interesse; er bekommt aber doch Gelegenheit, Dinge vorzubringen, die bald in anderem Zusammenhang von Bedeutung werden sollten.

Wenn er z. B. einen Kegelschnitt sucht, der einen anderen in einem gemeinschaftlichen Scheitel berühren und, indem er zugleich irgend eine andere gegebene Bedingung erfüllt, selbst so groß oder so klein wie möglich sein soll, gibt er ihm denselben (der gemeinschaftlichen Achse entsprechenden) Parameter wie der gegebenen Kurve. Dann findet für die Kegelschnitte, wie wir jetzt sagen würden, eine Berührung 3. Ordnung statt.

Die Behandlung der Aufgaben, die Maxima und Minima von Abschnitten von Kegelschnitten betreffen, knüpft er daran an, daß die Umhüllungskurve der Sehnen, welche Abschnitte von gegebenem Inhalt abschneiden, ein dem gegebenen konzentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitt ist. In ähnlicher Weise benutzt er die Umhüllungsfläche von

Ebenen, die in Verbindung mit gegebenen Umdrehungsflächen 2. Ordnung Abschnitte von gegebenem Rauminhalt begrenzen. Wie wir sehen werden, hatte jedoch damals schon Torricelli einen anderen Fall von Umhüllungskurven betrachtet.

Von einigen Aufgaben, die Viviani am Schlusse seiner Schrift besonders behandelt, führen wir folgende an:

1. In einem geraden oder schiefen Kegel einen parabolischen Schnitt zu legen, in welchem der von dem Schnitt mit der Grundfläche begrenzte Abschnitt ein Maximum wird. Hierzu benutzt er die Bestimmung des größten Sehnendreiecks eines Kreises.

2. Einen Punkt so zu bestimmen, daß die Summe der Entfernungen von drei gegebenen Punkten so klein wie möglich ist. Diese Aufgabe hatte schon früher Cavalieri in Angriff genommen.

Aufgaben ähnlicher Art wie mehrere der Kegelschnittaufgaben Vivianis waren übrigens auch in dem etwas älteren *Opus geometricum* von Gregorius von St. Vincentius behandelt worden. So findet dieser den größten Kreis, der in einer Ellipse enthalten ist und sie in einem Endpunkt der großen Achse berührt, sowie das größte einem Parabelabschnitt einbeschriebene n-Eck, indem er die Sehne in $n - 1$ gleiche Teile teilt: die Diameter durch die Teilpunkte werden dann $n - 2$ Ecken bestimmen. Die beiden übrigen sind die Endpunkte der Sehne.

Die antike geometrische Bestimmung der Maxima und Minima, die man sich derart vollständig dienstbar zu machen verstanden hatte, führte bald weiter, und zwar unmittelbar zuvörderst infolge der großen Fortschritte in der modernen Algebra, die ja eben allmählich an die Stelle der geometrischen Algebra trat; damit verbanden sich aber auch ganz neue Anschauungsweisen. Der Gebrauch von Koordinaten veranschaulichte, wie schon Oresme hervorgehoben hatte (Zeuthen, Altertum u. Mittelalter, S. 324), die Tatsache, daß eine Größe in der Nähe eines Maximums oder Minimums am wenigsten variiere. Es war jedoch erst Kepler, der diese Betrachtung mit der wirklichen Behandlung einer damals recht schwierigen Aufgabe verband: in eine gegebene Kugel den möglichst großen Cylinder einzuschreiben. Sie tritt in der oben erwähnten Doliometrie auf, welche die zweckmäßigste Form für Weinfässer untersucht und besonders eine solche ausfindig machen will, die bei dem geringsten Aufwand von Holz den größten Rauminhalt gewährt.

Die genannte Aufgabe läßt sich leicht auf die Einschreibung des größtmöglichen Parallelepipedons in eine Kugel zurückführen. Die Analogie mit der ebenen Geometrie führt Kepler zu der Annahme, dies müsse ein Würfel sein, woraus folgt, daß der Durchmesser der Grundfläche des gesuchten Cylinders

dem Produkte aus der Höhe in $\sqrt{2}$ gleich sein muß. Diese Annahme kontrolliert er zunächst in seiner gewöhnlichen induktiven Weise, indem er eine Tabelle über die Variation des Rauminhaltes bei variierender Höhe berechnet. Schon diese Tabelle läßt deutlich erkennen, daß die Variation in der Nähe des gegebenen Maximums am geringsten ist. Dasselbe zeigt sich auch in dem darauffolgenden geometrischen Beweis, daß tatsächlich der Würfel das gesuchte Maximum ist. Der Beweis besteht in einem Vergleich der Stücke eines anderen eingeschriebenen Parallelepipedons, die außerhalb des Würfels, mit den Stücken des Würfels, die außerhalb des Parallelepipedons liegen. Außerdem aber macht dieser Vergleich recht einleuchtend, daß der Unterschied zwischen den Teilen der beiden Körper, die bezw. einer außerhalb des andern liegen, je mehr sich das Parallelepipedon dem Zusammenfall mit dem Würfel nähert, im Verhältnis zu diesen Teilen selbst verschwindend klein wird. Daß Kepler, der schon in seinen Kubaturen trotz solcher Abweichungen, die wir heute unendlich kleine Größen höherer Ordnung nennen, unendlich kleine Größen als gleich groß betrachtet hatte, auch für den hier angeführten Umstand einen offenen Blick hatte, ergibt sich aus dem folgenden, wo er wiederholentlich die Unmerkbarkeit von Änderungen in der Nähe des Maximums hervorhebt. Zwar vermochte er noch nicht, darauf eine direkte Bestimmung dieser Maxima zu begründen; seine Betrachtung ist aber in den Untersuchungen über die größte Geräumigkeit von Weinfässern sicherlich maßgebend gewesen. Aus einem Briefe von Briggs, der selbst einen neuen Beweis dafür mitteilt, daß der Würfel ein Maximum sei, sieht man, daß Keplers Betrachtungen bei ihm auf guten Boden gefallen waren.

Von Kepler können wir weiter noch anführen, daß er einmal in der Behandlung der Refraktion eine Parabel durch ihren Krümmungskreis ersetzt. Andere neue Betrachtungsweisen für stetig variierende Größen und verschiedene dazu gehörige infinitesimale Bestimmungen erhielt man durch Galileis Untersuchungen über die Bewegung.

Auf solche Weise waren die verschiedenen Methoden vorbereitet, die wir jetzt zu besprechen haben. Sie kamen so ziemlich gleichzeitig und voneinander unabhängig auf. Wir werden sie daher, wo eine gegenseitige Beeinflussung nicht stattgefunden hat, ohne Berücksichtigung der chronologischen Reihenfolge nach ihrer Zusammengehörigkeit ordnen. Zuvörderst wollen wir demnach daran erinnern, daß Wallis, wie schon S. 224 erwähnt wurde, nach dem Aufkommen der meisten der im folgenden angeführten Methoden Tangentenbestimmungen ungefähr wie Apollonius ausführte, nur daß er statt dessen geometrischer Algebra die neue Algebra benutzte. Im übrigen wollen wir mit Torricellis und Robervals kinematischer Methode anfangen, in der sich die neueren Betrachtungsweisen am unmittelbarsten

geltend machen. Wenn man diese ihre Methode kennen lernt, wird man besser verstehen können, daß die Auffassung der stetigen Änderung auch den Erfindern der anderen entwickelteren Methoden nicht fern lag, wenn diese auch in einer rein algebraischen Darstellung eine sicherere und besser bewährte Grundlage suchten. Durch diese Darstellung brachte man es dann allmählich zu einer tatsächlichen Ausführung der Operation, die wir heute Differentiation nennen.

a. Torricellis und Robervals Tangentenmethode; einige spezielle Tangentenbestimmungen von Descartes.

Wie man jetzt erkennt, haben Torricelli und Roberval unabhängig voneinander diejenige Methode der Tangentenkonstruktion zu gegebenen Kurven gefunden, die man bislang gewöhnlich „Robervals Tangentenmethode“ nannte. Sie geht von der Vorstellung der stetigen Änderung aus, die durch Galileis Lehre von der Bewegung entwickelt worden war. Ja, Torricellis, seines Schülers, wichtigste Anwendung der Methode knüpft sogar unmittelbar an die Untersuchungen des Lehrers an; sie findet sich nebst einer ganz kurzen Mitteilung über andere Anwendungen in einer Schrift *De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum*, deren Gegenstand eben der Fall und die parabolische Wurfbewegung sind. Diese Schrift enthält übrigens sowohl neue Begründungen der Resultate Galileis wie neue daran anknüpfende Sätze. Gedruckt ist sie in der Sammlung kleinerer Schriften Torricellis, die 1644 unter dem Titel *Opera geometrica* erschien.

In dieser Schrift benutzt Torricelli das von Galilei aufgestellte Verhältnis zwischen der senkrechten und wagerechten Geschwindigkeit eines ausgeschleuderten schweren Körpers, der die Parabel $x^2 = 2py$ durchläuft, zur Bestimmung der Tangente dieser Kurve im Punkte (x, y). Dies Verhältnis ist $\frac{x}{p}$ oder $\frac{2y}{x}$ (S. 245). Aus letzterem Ausdruck schließt er, daß die Tangente die Parabelachse in einem Punkt schneidet, der um die Strecke $2y$ höher als der Punkt (x, y) oder um die Strecke y höher als der Scheitel der Parabel liegt. Der hierfür zu Grunde liegenden Bestimmung der Tangente als der Diagonale des Parallelogramms, das von den die beiden gleichzeitig wirkenden Geschwindigkeiten darstellenden Linien gebildet wird, gibt er eine besondere Begründung. Er fügt noch hinzu, daß sich derselbe allgemeine Satz wegen der Gleichheit der nach den beiden Brennstrahlen gerichteten Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes, der einen Kegelschnitt durchläuft, zu dem Beweise benutzen lasse, daß die Tangente einen der Winkel der Brennstrahlen halbiere; ebenso, daß er ihn zur Bestimmung der Tangente

einer archimedischen Spirale angewendet habe. Endlich verspricht er zu Ende der nächsten Schrift jener Sammlung, die darauf begründete Bestimmung der Tangente einer Cykloide zu geben. Dies tut er auch sowohl für die einfache als für die verkürzte und die verlängerte Cykloide; besonders was letztere Kurven betrifft, zeigen seine kurzen Angaben, daß er die Tangente durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten bestimmte, welche der Punkt durch eine Parallelverschiebung längs der Grundlinie der Cykloide und eine Drehung um den Mittelpunkt des rollenden Kreises erhält.

In der genannten Schrift *De motu* finden sich auch mehrere Sätze über die Parabeln, die von verschiedenen Teilchen durchlaufen werden, welche mit gleicher Geschwindigkeit von demselben Punkt aus geschleudert werden. So findet er, daß der geometrische Ort ihrer Scheitel eine Ellipse ist, die er genauer bestimmt. Mehr interessiert uns hier, da wir von der Vorbereitung der Differentialrechnung reden, der Satz, daß alle diese Parabeln ein Umdrehungsparaboloid mit dem Brennpunkt im Ausgangspunkt der Wurfbewegungen berühren. Der Beweis wird mittelst einer Anwendung der geometrischen Bestimmung der Parabeltangenten, also nicht mittelst eines neuen infinitesimalen Prinzips geführt; die Art und Weise aber, wie Torricelli seinen Satz zur Bestimmung der verschiedenen möglichen Würfe anwendet, zeigt, daß er die Tragweite seines Satzes völlig erkannte. Tatsächlich war der Satz, auf eine einzelne senkrechte Ebene beschränkt, das erste Beispiel einer Umhüllungskurve krummer Linien, während Apollonius Sätze aufgestellt hatte, durch welche die Kegelschnitte als Umhüllungskurven ihrer Tangenten bestimmt wurden (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 210). Beides geschah jedoch ohne ausdrückliche Aufstellung eines so allgemeinen Begriffes wie eben des der Umhüllungskurven.

Torricelli war vielleicht derjenige, der zuerst die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, wie soeben beschrieben, zur Tangentenbestimmung anwendete; seine wenigen Mitteilungen darüber haben, wie wir später sehen werden, auf die englischen Mathematiker ihren Einfluß ausgeübt. Roberval dagegen lieferte, nachdem er erst das gleiche Verfahren auf verschiedene Fälle angewendet hatte, worüber schon in einer Schrift Mersennes aus dem Jahre 1640 berichtet wird, eine zusammenhängende Darstellung der Methode und ihrer wichtigsten Anwendungen. Er tat es in einer Schrift über zusammengesetzte Bewegungen, die er 1668 der französischen Akademie der Wissenschaften unterbreitete, welche sie später nebst seinen übrigen Arbeiten in ihren *Mémoires* veröffentlichte. Er fängt mit einer Darstellung der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten mittelst eines Parallelogramms an und verwendet sie sodann, um die Tangenten an Kegelschnitte mit gegebenen Brennpunkten, an verschiedene Konchoiden, an die archimedische

Spirale, die Quadratrix, die Cissoide, die Cykloide und ihre sogenannte Gefährtin (siehe Abschn. 5) sowie die S. 210 erwähnte Kurve Descartes' zu finden. Er endet mit einem Entwurfe zu einem mechanischen Werk über die zusammengesetzten Bewegungen. Alle die gewonnenen Resultate sind richtig. Seine allgemeinen Äußerungen aber sind, wie im 19. Jahrhundert von Duhamel nachgewiesen wurde, ungenau, insofern sie die bei den Kegelschnitten benutzte Bestimmung einer Kurve durch eine Gleichung zwischen den Entfernungen von zwei festen Punkten betreffen. Die Geschwindigkeiten, die Roberval und, soviel man aus den diesbezüglichen Angaben ersehen kann, auch Torricelli zusammensetzen, sind nämlich diejenigen, um welche die Entfernungen wachsen oder abnehmen, also $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{dr_1}{dt}$, wenn wir durch r und r_1 die Entfernungen, durch t die Zeit bezeichnen und die Symbole der Differentialrechnung gebrauchen. Diese Geschwindigkeiten sind indes die Projektionen der tatsächlichen Geschwindigkeit auf die beiden Brennstrahlen, nicht die Komponenten der Geschwindigkeit in der Richtung dieser Geraden. Sind die Geschwindigkeiten einander gleich oder gegenseitig senkrecht aufeinander, so bleibt dieser Unterschied ohne Einfluß auf die Tangentenbestimmung, und diese wird daher bei Roberval richtig, der sie in dieser unrichtigen Gestalt nur auf die Kegelschnitte anwendet; die unrichtige Angabe hat aber Montucla, ja sogar Monge dazu verleitet, in anderen Fällen tatsächliche Fehler zu begehen.

Robervals großer Zeitgenosse, Descartes, entging diesem Fehler und zwar in einem Falle, wo er ihm besonders hätte nahe liegen können. Da die Größen, die wir in moderner Weise $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{dr_1}{dt}$ genannt haben, die Projektionen der Geschwindigkeit des bewegten Punktes auf die Brennstrahlen sind, sind sie zu den Cosinus der Winkel der Tangente mit diesen Linien oder zu den Sinus der Winkel der Normale proportional. Dementsprechend fand Descartes, daß die Normale der Kurven, welche durch Gleichungen von der Form

$$ar + br_1 + c = 0$$

dargestellt werden, und die nach ihm den Namen der Descartesschen Ovale tragen, den Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen in Winkel teilt, deren Sinus sich wie $\frac{b}{a}$ verhalten. Ursprünglich muß er durch direkte geometrische und infinitesimale Betrachtungen zu diesem Ergebnis geführt worden sein, nicht aber durch die weitläufigen Rechnungen, durch die er es der allgemeinen algebraischen Methode gemäß, die wir später besprechen werden, in seiner Geometrie begründet hat. Abgesehen davon, daß er diese kaum ganz zu Ende geführt haben würde, wenn er nicht schon vorher ein so einfaches

Resultat in Aussicht gehabt hätte, sind sie übrigens, wie er selbst anderswo erwähnt, für Aufgaben wie diejenigen unbrauchbar, die er sich ursprünglich gestellt und gelöst haben muß, nämlich vielmehr umgekehrt eine Kurve zu finden, deren Normale in einem beliebigen Punkt gerade die hier angegebene Eigenschaft besitzt, daß das Verhältnis zwischen den Sinus der Winkel, welche sie mit den Verbindungslinien des Punktes mit zwei festen Punkten bildet, einen gegebenen Wert hat. Eine solche Kurve zu suchen, wurde er durch seine optischen Untersuchungen veranlaßt, weil sie die Strahlen, die von dem einen festen Punkt ausgehen, so brechen würde, daß die gebrochenen Strahlen den anderen Punkt treffen.

Descartes hat übrigens auch sonst die hier benutzte Normalenbestimmung in Anwendung gebracht. Durch sie wird die Normale die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten mit zwei Geraden durch den Punkt zusammenfallen, von denen jede beziehungsweise der Projektion der Geschwindigkeit auf die andere gleich ist, die eine aber die entgegengesetzte Richtung hat. Diese Beobachtung führt unmittelbar zu der Konstruktion der Normale einer Konchoide, die sich auf S. 41 seiner Geometrie findet. CD (Fig. 23) sei die Konchoide, A ihr Pol, HB ihre Asymptote. Die Konchoide wird dann konstruiert, indem man auf Geraden durch A dem Punkt C eine gegebene Entfernung EC von dem Durchschnittspunkt E mit der Asymptote gibt. Descartes konstruiert nun die Normale CG als dritte Seite eines Dreiecks CFG, dessen eine Seite CF auf CA fällt und der Entfernung des Punktes C, nämlich CH, von der Asymptote HB gleich ist, während die andere Seite FG der Strecke EA gleich ist, die auf dem Leitstrahl zwischen der Asymptote und dem Pol abgeschnitten wird. Setzen wir nämlich der Bequemlichkeit halber $AC = r$, $HC = y$, $EC = a$, $AB = b$, so haben wir

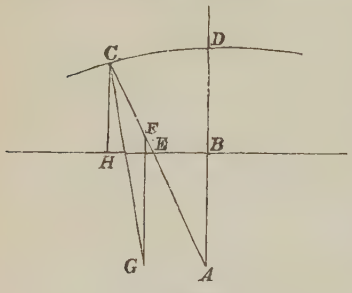

Fig. 23.

$$(r - a)\, y = ab,$$

also durch Differentiation

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r - a},$$

woraus erhellt, daß CF, das $= y$, und FG, das $= r - a$ gesetzt ist, sich wie die Projektionen der Geschwindigkeit des bewegten Punktes C auf HC und CA verhalten. Wir haben also gerade die Konstruktion vor uns, die, wie Descartes leicht durch ähnliche Dreiecke beweisen konnte, aus dem angeführten Prinzip hervorgeht. Irgendwelche andere einfache Erklärung

der Konstruktion ist kaum möglich, und aus den Ausdrücken in der Geometrie Descartes' geht hervor, daß er sie jedenfalls nicht durch seine algebraische Tangentenmethode gefunden hat.

Descartes bestimmt die Normale eines Punktes der Cykloide, indem er sie durch den Berührungspunkt der entsprechenden Stellung des rollenden Kreises und der Grundlinie der Cykloide gehen läßt. Diese Bestimmung mag durch unmittelbare Anwendung des im vorigen Falle benutzten Verfahrens gefunden sein, und möglicherweise meint Descartes eben dieses Verfahren, wenn er von einem Beweise redet, den er selbst vorzieht, dessen Darstellung aber zu weitläufig sein würde. Er beweist dagegen den Satz tatsächlich dadurch, daß er den Kreis als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachtet. Dieser Beweis läßt sich auch auf andere Rollkurven (Rouletten) anwenden, ein Vorteil, den Descartes bemerkt und zu einer entsprechenden Konstruktion der Normalen einer verkürzten oder verlängerten Cykloide benutzt. Im letzteren Falle setzt diese Konstruktion ihn auch in den Stand, die Wendepunkte zu konstruieren. Die Normale in einem solchen wird durch den augenblicklichen Berührungspunkt des rollenden Kreises gehen und denjenigen Kreis um den Mittelpunkt des rollenden berühren, der durch den die Kurve beschreibenden Punkt geht.

b. Descartes' und Huddes Methoden.

Um die hier erwähnten kinematischen Tangenten- und Normalenmethoden anzuwenden, muß man die verschiedenen Bestimmungen der einzelnen Kurven verschiedentlich benutzen. Eine allgemeine Methode zur Auflösung der hierher gehörenden Aufgaben konnte man nur auf algebraischem Wege und im Anschluß an die neu geschaffene analytische Geometrie zu finden hoffen. Nur die der Algebra entliehenen Hilfsmittel waren hinlänglich entwickelt, um volle Sicherheit zu gewähren. Ohne sie konnte man sich leicht solcher Fehler schuldig machen wie derjenigen, die durch die Unklarheiten in der Darstellung Robervals wirklich später veranlaßt worden sind.

Wir sehen daher auch Descartes in seiner Geometrie eine vollständige Methode zur analytisch-geometrischen Bestimmung von Tangenten an algebraische Kurven entwickeln; er verwendet sie zuvörderst zu Beweisen für die von ihm schon gefundenen Tangentenkonstruktionen. Was die Konchoide betrifft, so scheint er indes die notwendigen Rechnungen nicht durchgeführt zu haben, sondern weist nur darauf hin, daß sich der Beweis auf diesem algebraischen Wege führen lasse. Der Umstand, daß er früher nicht unmittelbar die Tangente, sondern die Normale verschiedener Kurven gefunden hatte, erklärt es, weshalb die allgemeine algebraische Methode, die er ausarbeitete, unmittelbar auf die Bestimmung von Normalen abzielte.

Daher läßt sich seine Methode wohl zum Beweise der schon im voraus bekannten Resultate gebrauchen; da aber die Bestimmung der Normale in rechtwinkligen Koordinaten, die er nun anwendet, ziemlich viele Rechnungen erfordert, ist die Handhabung der Methode im allgemeinen etwas schwer, was besonders Fermat hervorgehoben hat.

Sie findet sich im 2. Buch der Geometrie S. 33 ff. und läßt sich folgendermaßen kurz wiedergeben. Es sei (a, b) ein Punkt einer algebraischen Kurve und $(c, 0)$ der Punkt, in dem die Normale der Kurve in (a, b) die Abscissenachse schneidet. Dann muß der Kreis um $(c, 0)$ mit dem Halbmesser $\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$ mit der Kurve zwei in (a, b) zusammenfallende Schnittpunkte haben. Sucht man nun durch Elimination der Ordinate y aus den Gleichungen der Kurve und des Kreises eine Gleichung zur Bestimmung der Abscisse x zu gewinnen, so muß $(x-a)^2$ auf ihrer linken Seite als Faktor auftreten. Da dies mit $x-a$ schon zufolge der Bildung der Gleichung der Fall ist, erhält man auf diese Weise zur Bestimmung von c eine einzige Gleichung. Diese Größe bestimmt die Lage der Normale und somit zugleich die der Tangente.

Bei der Herstellung der c bestimmenden Gleichung benutzt Descartes die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Ist die Gleichung, welche die Abscisse der Schnittpunkte der Kurve mit dem Kreise bestimmt, von dem Grade r, so identifiziert Descartes ihre linke Seite mit einem Produkte aus $(x-a)^2$ und einem unbekannten Ausdruck vom Grade $r-2$. Die Gleichung zur Bestimmung von c erhält man sodann durch Elimination der unbestimmten Koeffizienten dieses Ausdrucks aus den Gleichungen, die dadurch entstehen, daß die Koeffizienten der beiden identischen Ausdrücke r^{ten} Grades einander gleich gesetzt werden. Descartes hebt die große Tragweite dieser allgemeinen algebraischen Methode hervor. An der Hand dieser Methode hat er übrigens in einem hinterlassenen Manuskript auch untersucht, ob seine Ovale mehr als zwei Brennpunkte haben; es zeigt sich verschiedentlich, daß er tatsächlich den dritten Brennpunkt kannte.

Descartes knüpft die Darstellung seiner Tangentenmethode an eine durchgeführte Anwendung auf die Fälle an, in denen die Kurve ein auf eine Achse als Abscissenachse bezogener Kegelschnitt oder ein Descartessches Oval ist. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten läßt sich indes unter weit einfacheren Formen zur Tangentenbestimmung anwenden. Dies geschieht, wenn man, wie van Schooten es in seinem Kommentar zur Geometrie Descartes' tut, auf diesem Wege die Bedingungen findet, unter denen die Schnittpunkte einer Geraden und einer gegebenen Kurve zusammenfallen. Von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus, der auch die übrigen Operationen berücksichtigt, zu denen wir heute die Differentiation benutzen,

hat Hudde die algebraische Behandlungsweise Descartes' weiter entwickelt und in Anwendung gebracht. Dies geschieht in zwei Schriften über die Reduktion von Gleichungen und über Maxima und Minima, die gleichfalls in der Ausgabe der Geometrie Descartes' durch van Schooten als Anhang ihren Platz gefunden haben.

Die Bildung einer bestimmten algebraischen Regel für den Nachweis gleicher Wurzeln einer algebraischen Gleichung liefert Hudde für die verschiedenen differentiationsähnlichen Untersuchungen einen allgemeinen algebraischen oder analytischen Ausgangspunkt. Zudem erhält diese Regel eine allgemeinere Form als diejenige, die man heute durch Differentialrechnung gewinnt. Sie besagt folgendes: Ob die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

zweimal durch ein und dieselbe Wurzel erfüllt wird, ist daran zu erkennen, daß diese dann auch die Gleichung

$$a x^n + (a+b)\, a_1 x^{n-1} + (a+2b)\, a_2 x^{n-2} + \cdots + (a+nb)\, a_n = 0$$

erfüllen wird, die durch Multiplikation der Koeffizienten mit den Gliedern einer arithmetischen Reihe entsteht.

Hudde beweist diese Behauptung zu Anfang des zweiten Aufsatzes für eine Gleichung 5. Grades. Hat diese zweimal die Wurzel $x = y$, so muß sich ihre linke Seite als

$$(x^2 - 2yx + y^2)(x^3 + px^2 + qx + r)$$

oder als

$$\begin{array}{llll} x^5 - 2yx^4 + y^2x^3 & & & \\ + px^4 & - 2ypx^3 + py^2x^2 & & \\ & + qx^3 & - 2qyx^2 + qy^2x & \\ & & + rx^2 & - 2ryx + ry^2 \end{array}$$

schreiben lassen.

Wird nun die angegebene Operation allein auf den Faktor

$$x^2 - 2yx + y^2$$

angewendet, so erhält man

$$ax^2 - 2(a+b)yx + (a+2b)y^2,$$

was offenbar für $x = y$ Null ergibt. Dasselbe wird mit jeder einzelnen der 4 Zeilen der Fall sein, in die wir die linke Seite der vorgelegten Gleichung durch Umschreibung geteilt haben. Wendet man nun die verschiedenen Reihen

$$\begin{array}{llll} a & , & a+b, & a+2b \\ a+b & , & a+2b, & a+3b \\ a+2b, & & a+3b, & a+4b \\ a+3b, & & a+4b, & a+5b \end{array}$$

auf jede einzelne der 4 Zeilen an, in denen wir das Produkt aufgeschrieben haben, und addiert, so wird man die gegebene Umgestaltung gerade auf die gegebene Gleichung anwenden und dadurch eine Gleichung erhalten, die durch $x = y$ erfüllt wird.

Hudde bemerkt, daß man den Umstand, daß die angewendete arithmetische Reihe eine beliebige ist, zur Erleichterung der Rechnungen anwenden kann, und weist namentlich auf den Gebrauch der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

hin, bei welcher das Glied n^{ten} Grades wegfällt. Er benutzt jedoch auch die Reihe

$$n,\ n-1,\ \cdots,\ 1,\ 0,$$

durch welche die linke Seite der neuen Gleichung nach Hebung von x dem Differentialquotienten der linken Seite der gegebenen gleich wird. Schreibt man die gegebene Gleichung als $f(x) = 0$, so gestaltet sich Huddes allgemeine abgeleitete Gleichung als $af(x) + b\,[nf(x) - xf'(x)] = 0$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel kann man, wenn man probiert, ob die abgeleitete Gleichung eine Doppelwurzel hat, finden, ob die ursprüngliche eine dreifache habe u. s. w.

Hudde hebt schon in dem ersten Aufsatz hervor, daß die angeführte Regel sowohl zu Tangentenbestimmungen als zur Lösung von Maximal- und Minimalaufgaben anwendbar ist. Als Beispiele von Tangentenbestimmungen wählt er die Descartes' und zeigt, daß dabei sein Kennzeichen der gleichen Wurzeln zu einer einfacheren Herleitung der Größe führt, die wir oben (S. 326) c nannten, als Descartes' unmittelbarer Gebrauch der Methode der unbestimmten Koeffizienten ermöglicht. Die Bestimmung der Maxima und Minima einer Größe, für die man entweder einen ganzen rationalen Ausdruck hat, oder die in den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung enthalten ist, wird im zweiten Aufsatz behandelt. Hudde betrachtet es dabei als überflüssig, zu beweisen, daß solche Werte gerade eintreten, wenn die Gleichung gleiche Wurzeln erhält. Er macht ausdrücklich darauf aufmerksam, daß sich die Methode wohl anwenden lasse, wenn die Gleichung, von der er annimmt, daß sie durch Elimination aus mehreren entstehe, in Bezug auf die Größe, die ein Maximum oder Minimum sein soll, nicht ersten Grades ist, und diese also keine rationale Funktion der unabhängigen Variablen wird. Obgleich die Bestimmung rein algebraisch ist, wird, wie man sieht, die Berechnung im wesentlichen mit derjenigen zusammenfallen, die man heute durch die Differentialrechnung erhält.

Huddes zwei Aufsätze oder Briefe sind indes nur Auszüge aus einer größeren Arbeit, die leider nie erschienen ist. Aus seiner kurzen Mitteilung über ihren Plan ersieht man zunächst, daß er auch Maxima und Minima

von Funktionen mehrerer Variablen behandelt hat. Er mag auch dann, indem er nach und nach die verschiedenen unabhängigen Variablen als Unbekannte der Gleichung betrachtete, auf die er seine Methode anwendete, die Maxima und Minima in solchen Fällen gefunden haben, in denen man im voraus weiß, daß solche wirklich existieren. Dagegen gibt er seine Unwissenheit darüber zu, wie es (im allgemeinen) zu entscheiden sei, ob eine gefundene Größe, die ein Maximum oder Minimum sein kann, wirklich das eine oder das andere oder keins von beiden sei. Diese Beschränkung der Tragweite der Methode betrifft auch den Fall, in dem nur eine Variable vorliegt, und gilt auch für die im folgenden erwähnten Methoden; ihre Bedeutung wird aber dadurch um ein wesentliches geschmälert, daß es, wenn man erst die Werte der unabhängigen Variablen gefunden hat, die überhaupt ein Maximum oder Minimum ergeben können, in der Regel leicht ist, in jedem einzelnen Falle zu unterscheiden, ob Nachbarwerte die abhängige Variable vergrößern oder verkleinern. Hudde hebt noch die Bedeutung seiner Methode für die *determinatio* aller Gleichungen hervor, ein Wort, mit welchem man damals den Diorismus der Alten bezeichnete. Die Fälle, in denen eine Gleichung gleiche Wurzeln erhält, werden nämlich die Grenzen zwischen denjenigen bilden, in denen sie eine größere oder eine geringere Anzahl Wurzeln hat.

Eine Beschreibung der rein algebraischen Herleitung derjenigen Größen, die wir heute die Reihe der abgeleiteten Funktionen der linken Seite $f(x)$ einer algebraischen Gleichung nennen, finden wir noch Ende des Jahrhunderts in der Algebra Rolles. Sie treten bei ihm als Koeffizienten der Gleichung auf, die durch Vertauschung von x mit $(x + z)$ entsteht. Rolle sagt, daß sich — mit modernen Bezeichnungen — zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln der Gleichung $f^{(r+1)}(x) = 0$ höchstens eine Wurzel der Gleichung $f^{(r)}(x) = 0$ findet. Der Beweis fehlt in seiner Algebra. Er kann aber damals betreffs der infinitesimalen Anwendungen von $f'(x)$, aus denen sein Satz leicht hervorgeht, besonders wenn man $y = f(x)$ geometrisch darstellt, nicht ganz unwissend gewesen sein. Daß er selbst seinen Satz auf diese Weise gefunden hat, darauf deutet schon der Titel des kleinen Buches, der seinen Beweis enthalten soll: *Sur les effections géométriques.*

In der früher als Vorlesung ausgearbeiteten *Arithmetica universalis* stellt Newton die aus Rolles Satz folgende Bestimmung der äußersten Grenzen der Wurzeln auf.

c. Fermats Methode; Huygens' und de Sluses Regeln.

Fermat schilderte in einem Briefe an Descartes 1638 seine Bestimmung der Werte von x, die eine davon abhängige Größe, die wir $f(x)$

nennen wollen, zu einem Maximum oder Minimum machen. Sie besteht darin, daß er zunächst die Gleichung bildet, die wir jetzt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

schreiben würden, dann aber, nachdem er die Division durch h ausgeführt, $h=0$ setzt. Er setzt also die Größe, die wir heute die abgeleitete Funktion $f'(x)$ oder den Differentialquotienten nennen, gleich Null.

Wenn er auch die Richtigkeit dieser Regel nicht ausdrücklich beweist, so bekundet er doch bei Gelegenheit, daß auch er von der Betrachtung ausgeht, der Maximal- oder Minimalwert von $f(x)$ werde ein solcher sein, der zwei entsprechende Werte von x gleich groß macht. Darauf deutet schon seine früher erwähnte Erklärung von Pappus' Bezeichnung als „einzelnes" oder kleinstes Verhältnis hin (S. 317); ebendiese Betrachtung tritt aber in einer der vorliegenden älteren Darstellungen der Anwendungen seiner Methode auf verschiedene Beispiele noch bestimmter zu Tage. In dieser Darstellung legt er ganz einfach x zwei Werte x und y bei und setzt $f(x)=f(y)$; durch Division bildet er sodann die Gleichung

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$$

und setzt nun $x=y$. Aber, sagt er, es ist unbequem, mit einem Binom $y-x$ zu dividieren. Dies vermeidet er eben, indem er $y=x+h$ setzt. Auf rein algebraischem Wege also gewinnt er seine Methode, die jedoch zugleich mit dem Umstand zusammenhängt, den schon Oresme und nach ihm Kepler bemerkt hatten, daß die Funktion gerade in dem Augenblick nicht variiert, in welchem ein Maximum oder ein Minimum durchlaufen wird. Daß der Sprung von einer rein algebraischen Begründung bis zu einer infinitesimalen nicht weit ist, erkennt man, wenn man sieht, wie Huygens in einem Beweise für Fermats Methode, die jedoch von der hier gegebenen Erklärung wenig abweicht, die Größe, die bei Fermat zunächst endlich ist, nach der Division aber gleich Null gesetzt wird, also unser h, unendlich klein nennt.

Fermats vorhin erwähnte Auseinandersetzung der Methode paßt am unmittelbarsten auf die Fälle, in denen $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ist; als Beispiele dazu hat er die beiden ersten der S. 317 erwähnten antiken Aufgaben behandelt. Er sucht gleichwohl nicht die Anwendung auf gebrochene Funktionen zu vermeiden; so behandelt er die durch Pappus auf uns gekommene Aufgabe über das Minimum eines Verhältnisses, dessen Zähler und Nenner in seiner algebraischen Darstellung 2. Grades in x werden. Um das Maximum eines in x irrationalen Ausdrucks $y=x+\sqrt{ax-x^2}$ zu finden, in welchem die Quadratwurzel geometrisch als Ordinate

eines Kreises dargestellt wird, bringt er die Gleichung in rationale Gestalt und sagt sodann, daß er das Maximum des Ausdruckes

$$y^2 = ax + 2xy - 2x^2$$

zu suchen habe. Obgleich er, wie man sieht, y enthält, wendet er doch sein gewöhnliches Verfahren an und findet

$$a + 2y - 4x = 0;$$

diese Gleichung in Verbindung mit der ursprünglichen Gleichung in x und y dient nun dazu, das Maximum von y und den entsprechenden Wert von x zu finden. Sein Verfahren deckt sich also mit der Bestimmung des Maximums und Minimums von y durch eine gegebene Gleichung in x und y:

$$f(x, y) = 0$$

und die abgeleitete:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 0.$$

Von den vielen Beispielen, auf die er nach den verschiedenen Mitteilungen, die er darüber macht, sein Verfahren angewendet hat, wollen wir die Einschreibung eines größten Kegels oder eines Cylinders mit größter Oberfläche in eine Kugel, sowie die für die Erklärung der Strahlenbrechung wichtige Aufgabe erwähnen, zwei auf den verschiedenen Seiten einer Ebene liegende Punkte durch eine gebrochene Linie zu verbinden, die in möglichst kurzer Zeit durchlaufen wird, wenn die Geschwindigkeiten auf den beiden Seiten der Ebene in einem gegebenen Verhältnis stehen.

Nahe verwandt mit Fermats Bestimmung des Maximums oder Minimums ist seine Bestimmung der Tangente einer gegebenen Kurve in einem gegebenen Punkte M, dessen Koordinaten wir x und y nennen. Er fängt damit an, die Tangente mit einer Sekante zu vertauschen, die zugleich durch einen Punkt der Kurve mit der Abscisse $x + h$ geht. Die Ähnlichkeit des Dreiecks MNP, das (Fig. 24) von der auf der Sekante abgeschnittenen Sehne MN und Parallelen zu den Koordinatenachsen gebildet wird, und des Dreiecks SMR, dessen Katheten die Ordinate $MR = y$ und die Strecke SR sind, die für $h = 0$ in die Subtangente übergehen wird, zeigt nun, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve ist, daß

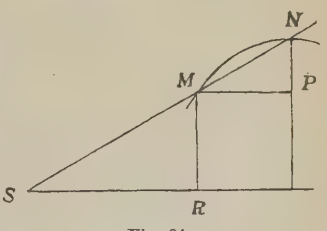

Fig. 24.

$$SR = \frac{RM \cdot MP}{PN} = \frac{f(x) \cdot h}{f(x+h) - f(x)}$$

ist, und daß die Subtangente, die wir mit S_t bezeichnen, denjenigen Wert erhält, den dieser Ausdruck annimmt, wenn man erst mit h kürzt und dann

$h = 0$ setzt. Das Dreieck PMN ist, wenn h bis zu 0 schwindet, dasselbe Dreieck, das auch Pascal in seinen Quadraturen anwendet, und das Leibniz später das charakteristische nannte. Die von Fermat angeführten Regeln sind übrigens dieselben wie die, welche zu dem Ausdrucke führen, den wir heute

$$S_t = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

schreiben würden.

Man gewinnt diese Bestimmung unmittelbar, wenn die Kurve dadurch bestimmt ist, daß y als rationale Funktion von x gegeben ist. Zu einer Zeit, als man noch nicht konsequent rechtwinklige Koordinaten zur Darstellung aller möglichen Kurven anwendete, wurden allerdings deren Eigenschaften in den verschiedenen Fällen verschieden benutzt. Da indes die genannte Darstellung durch Descartes' und Fermats Schriften immer allgemeiner wurde, ist es von Bedeutung, daß uns aus Fermats Hand auch ein klarer Aufschluß darüber vorliegt, wie die Methode anzuwenden sei, wenn die Kurve durch eine unaufgelöste Gleichung in x und y,

$$f(x, y) = 0,$$

dargestellt wird. Er hat sich darüber ausgesprochen, namentlich weil Descartes glaubte, es würde schwer fallen, die Methode auf die Kurve anzuwenden, die wir heute als das Descartessche Blatt ($x^3 + y^3 = 3axy$) bezeichnen. Fermats an diese Kurve anknüpfende Darstellung geht darauf aus, daß die Subtangente S_t aus der Gleichung zu bestimmen ist, die man erhält, wenn man in der Gleichung, die sich mit den jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen

$$\frac{f\left(x - h,\ y - \frac{y}{S_t}h\right) - f(x, y)}{h} = 0$$

schreiben ließe, $h = 0$ setzt. Da $\frac{y}{S_t}$ (vom Vorzeichen abgesehen) dem heutigen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ gleich ist, werden also ganz die nämlichen Operationen ausgeführt wie bei der Herstellung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Fermat hebt mit Recht als einen Vorteil hervor, daß man es durch dies Verfahren vermeidet, die Gleichung zu lösen und somit irrationale Größen einzuführen. Im umgekehrten Falle fängt er damit an, irrationale Größen, wenn sie vorkommen, wegzuschaffen. Wenn er so in einem Briefe mitteilt, daß er die Tangente einer so zusammengesetzten Kurve wie

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{cx - x^2} + \sqrt{\frac{x^3 - ax^2}{b}} + \sqrt{\frac{x^4 + bx^2}{a^2 + x^2}}$$

zu finden vermöge, so geht aus einem späteren Briefe hervor, daß es in der Weise geschehen müsse, daß man erst die Gleichung rational macht und sodann die Methode anwendet.

Er hat die Anwendung der Methode übrigens an so vielen Kurven dargelegt oder doch angedeutet, daß ihre allgemeine Anwendbarkeit klar einleuchtet. Es waren teils bekannte, teils neue Kurven, die gerade als Beispiele für Tangentenbestimmungen dienen sollten, wie die soeben genannte Kurve und die Kurve $\frac{y^2}{a^2} = \cos\frac{x}{b}$. Da er außerdem seine Methode benutzte, um die Tangente der Cykloide zu bestimmen, gewann er endlich Achtung für sie auch bei Descartes, der selbst vergebens versucht hatte, seine eigene algebraische Methode zu derselben Bestimmung anzuwenden, die er jedoch schon auf anderem Wege gefunden hatte. Descartes' früherer, aber ungerechter Angriff auf Fermats Methode (S. 29) hatte diesen bereits zu Aufschlüssen allgemeinerer Natur veranlaßt. Weil Fermat die Tangentenbestimmung mit der Bestimmung der Maxima und Minima in Verbindung bringt, bezichtigte ihn Descartes z. B. des sonderbaren Irrtums, daß die Tangente DA (Fig. 25) einer Kurve von einem außerhalb gelegenen Punkt D die Gerade sein solle, auf der zwischen D und einem Punkt A der Kurve die größte oder kleinste Strecke abgeschnitten werde. Deswegen erklärt Fermat einerseits, daß diese Bestimmung die Normale von D aus ergeben würde, andrerseits, daß durch seine eigene Bestimmung, wenn die Abscissenachse durch den festen Punkt D gelegt wird, das Verhältnis zwischen der Ordinate CA und der Subtangente CD zum Maximum oder Minimum wird. Ersteres war selbstredend auch Descartes einleuchtend, dessen eigene Tangentenbestimmung, wie wir gesehen haben, auf einer Bestimmung der Normale beruht.

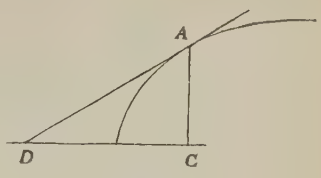

Fig. 25.

Aus der Verhandlung zwischen den beiden Forschern sieht man, daß sie es beide verstanden, die Tangentenbestimmung auf solche Aufgaben anzuwenden, wie z. B. diejenige, zu einer Kurve eine mit einer gegebenen Geraden parallele Tangente zu ziehen. Die sich erhebenden Streitigkeiten, an denen sich auf Fermats Seite der ältere Pascal und Roberval beteiligten, gaben letzterem die Gelegenheit, den Doppelpunkt des Descartesschen Blattes zu bemerken. Er gestaltete sich indes, da Roberval die Vorzeichen nicht berücksichtigte und daher das Blatt in den vier Quadranten wiederholte, als ein 4-facher Punkt.

Wir haben noch zu bemerken, daß sich Fermat nicht mit der Bestimmung der Tangente selbst begnügte, sondern auch für die Frage nach der Lage der Tangente zur Kurve Interesse hatte. Eingehender hat er sich darüber zwar nicht ausgesprochen; er hat aber doch eine klare Regel hinterlassen, wie auf einer gegebenen Kurve die Wendepunkte zu finden seien. Er bestimmt zunächst die Tangente in einem beliebigen Punkt und den Winkel, den sie mit der Achse bildet. Sodann sucht er das Maximum oder Minimum dieses Winkels. Da die Tangente dieses Winkels durch die Fermatsche Tangentenbestimmung als Funktion der Abscisse gewonnen wird, ließ sich die Lösung dieser Aufgabe mittelst der schon beschriebenen Methode Fermats vollständig durchführen. Die damit verbundenen Rechnungen sind dann ganz dieselben, die man heute durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ angeben würde.

Fermat hat kein Beispiel für die Anwendung dieser Regel hinterlassen; daß aber die Frage seine Zeitgenossen interessierte, geht aus den zu damaliger Zeit aufkommenden Bestimmungen von Wendepunkten anderer Kurven hervor, die wir deshalb hier einschalten. So hat Huygens in einem Anhang zu seiner Schrift über die Quadratur des Kreises eine Konstruktion der Wendepunkte der Konchoide mitgeteilt. Da diese Bestimmung auf einer Gleichung 3. Grades beruht, führt er in antiker, damals noch gebräuchlicher Weise die Konstruktion mittelst einer Parabel und eines Kreises aus. Der Beweis fehlt; man sieht daher nicht, wie er die Gleichung 3. Grades gefunden hat, muß sich also an van Schooten halten, der in seinem Kommentare zur Geometrie Descartes' mitteilt, wie er bewerkstelligt werden kann. Van Schooten bestimmt den Wendepunkt als den Punkt, in welchem drei der Durchschnittspunkte mit einer und derselben Geraden zusammenfallen; dazu bedient er sich, wie bei seiner Bestimmung einer Tangente an die Konchoide (S. 326), Descartes' Methode der unbestimmten Koeffizienten. De Sluse fand die Kurve, die durch die Wendepunkte aller Konchoiden geht, die denselben Pol und dieselbe Asymptote haben, und ähnliche Bestimmungen von Wendepunkten anderer Kurven. Wendepunktsbestimmungen werden öfters in seinen und Huygens' Briefen erwähnt. Dieser findet z. B. die Wendepunkte der Kurve

$$y = kx^2 (a - x).$$

Auf seinen Vorschlag lösten v. Heuraet und Hudde dieselbe Aufgabe, dem Anschein nach, indem sie den Durchschnittspunkt der Wendetangente mit der Achse als denjenigen Punkt bestimmten, von welchem zwei zusammenfallende Tangenten ausgehen. (Über Descartes' Bestimmung der Wendepunkte einer verlängerten Cykloide siehe S. 325.)

Unter den Kurven, deren Tangenten Fermat mittelst seiner Methode finden zu können behauptet, nennt er auch diejenige, deren Ordinate die Bogenlänge einer Parabel ($y^2 = 2px$) ist, wenn man sie vom Scheitelpunkt bis zu dem Punkt der Parabel rechnet, der dieselbe Abscisse (x) hat wie der entsprechende Punkt der neuen Kurve, und die Kurve:

$$y = \sqrt{(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)},$$

wo y_i und s_i die Ordinate und die Bogenlänge bezeichnen, welche dem Punkt einer willkürlich gegebenen Kurve angehören, der die Abscisse x hat. Hieraus erhellt, daß Fermat seine neue Operation, die wir heute Differentiation nennen, auf Ausdrücke von Bogenlängen, also auf Ausdrücke anzuwenden verstand, die er selbst mittelst einer Quadratur (S. 294) bestimmt. Diese Benutzung des gegensätzlichen Verhältnisses zwischen Differentiation und Quadratur, das später eine so große Bedeutung erhalten sollte, kommt bei ihm jedoch nur ganz gelegentlich vor. Wenn Fermat weiterhin gewisse Schwerpunktsbestimmungen als eine dritte Anwendung seiner Differentiation anführen kann, obgleich diese Bestimmungen sowohl nach ihrer Natur, wie nach der Auffassung und Behandlungsweise jener Zeit von Quadraturen (Integrationen) abhängig sind, so dürfen wir darin kein neues Beispiel von der Benutzung des angeführten gegensätzlichen Verhältnisses erblicken. Er kann dies Verfahren nämlich nur in solchen Fällen brauchen, in welchen ihm die Bestimmung des Schwerpunktes bis auf den Wert einer Konstante bekannt ist, und die Differentiation dient ihm dann nur dazu, aus einer identischen Gleichung, die diese Konstante enthält, eine andere Gleichung herzuleiten, die gleichfalls identisch sein soll, es aber nur für einen bestimmten Wert der unbekannten Konstante wird. Auf diese Weise bestimmt Fermat den Schwerpunkt eines Paraboloidabschnittes. Er setzt voraus, daß das Verhältnis, nach welchem dieser Punkt die Höhe des Abschnittes teilt (bezw. das im Abschnitt enthaltene Stück des Durchmessers, wenn es ein schief abgeschnittener Abschnitt ist), von deren Größe unabhängig, also das gleiche sei wie in einem anderen Abschnitt mit der Höhe $x - h$. Der vorgelegte Abschnitt ist aus letzterem Abschnitte und einer Scheibe zusammengesetzt, deren Schwerpunkt auf der gemeinsamen Achse und innerhalb der Scheibe liegt. Er wendet jetzt den Satz von der Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers an, der aus zwei anderen zusammengesetzt ist, deren Schwerpunkte und Rauminhalte (Massen) bekannt sind, und setzt nun $h = 0$. Davon abgesehen, daß das abgeschnittene Stück unendlich klein sein soll, hat das Verfahren einige Ähnlichkeit mit Archimedes' Schwerpunktsbestimmung des Parabelabschnittes; denn auch er baut darauf, daß die Schwerpunkte verschiedener Parabelsegmente ihre Durch-

messer nach demselben Verhältnis teilen müssen (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 189). Mit Bezug auf die Anwendung des Schwerpunktes eines unendlich kleinen Teiles des betrachteten Körpers stimmt Fermats Verfahren dagegen mit dem de la Failles überein (S. 238).

Fermat erwähnt noch eine vierte Anwendung seiner Differentiation, und zwar zur Herleitung gewisser zahlentheoretischer Sätze (S. 159); worin aber diese Anwendung bestanden hat, ist nicht ganz klar.

Die Übereinstimmung, die zwischen Fermats Anwendungen derselben Methode auf verschiedene Beispiele und auf ganz verschiedene Gattungen von Aufgaben bestand, zu deren Darstellung er aber nicht dieselben Mittel besaß wie wir, läßt er selbst durch gleichförmige Bezeichnungen hervortreten. Die von uns als h bezeichnete Größe nennt er stets E, während A bei Maximal- und Minimalaufgaben die unabhängige Variable, bei Tangentenaufgaben die Subtangente ist.

Fermats hier erwähnte Differentiation findet sich zwar in Schriften und Briefen, die erst weit später gedruckt worden sind; da sie aber an die Gelehrten, die an den mathematischen Fortschritten damaliger Zeit den größten Anteil hatten, gesandt und unter ihnen erörtert wurden, gelangte die Kenntnis seiner Methode, wenn auch nicht in allen hier besprochenen Einzelheiten, so doch in der Hauptsache zu den meisten, von deren Arbeiten wir im folgenden zu reden haben; einige von ihnen mögen jedoch ziemlich unabhängig von Fermat gearbeitet haben. Huygens knüpft in einer kleinen Schrift über die Bestimmung der Maxima und Minima unmittelbar an ihn an. Der Fortschritt besteht bei ihm darin, daß er nicht jede einzelne Frage auf die letzten Prinzipien zurückführt, sondern seine Rechenregeln aus dem allgemeinen Verfahren Fermats herleitet, nach denen man die Größen mechanisch aufschreiben kann, deren Verschwinden ausdrückt, daß eine ganze rationale Funktion $f(x)$ oder ein Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ einen Maximal- oder Minimalwert annehmen soll. Es sind dies die Regeln, nach denen man in der heutigen Differentialrechnung die Ausdrücke $f'(x)$ oder $\psi(x) \cdot \varphi'(x) - \varphi(x) \cdot \psi'(x)$ aus x samt Koeffizienten und Exponenten der Polynome $f(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bildet. Fällt Fermats Methode mit der Differentiation zusammen, so gestalten sich Huygens' Regeln zu einem Stück Differentialrechnung (ohne Differentiationssymbole), ein Unterschied, welchen wir im folgenden Gelegenheit haben werden deutlicher hervorzuheben. — Etwas Ähnliches läßt sich von einer Regel von de Sluse sagen, mittelst welcher er, wenn die Gleichung $f(x, y) = 0$ einer algebraischen Kurve gegeben ist, unmittelbar Zähler und Nenner desjenigen Verhältnisses ableitet,

das wir, als von Fermat die Rede war, $\frac{S_t}{y}$ nannten, und das dieser in jedem einzelnen Falle durch eine umständlichere Anwendung seiner Methode berechnen mußte. Was de Sluses Beweis betrifft, so hat er in einem späteren Briefe die Hilfssätze mitgeteilt, auf die er seine Regel stützt. Aus ihnen läßt sich schließen, daß er sie ungefähr auf dieselbe Weise gewann, die sich mit modernen Bezeichnungen folgendermaßen wiedergeben läßt.

Es seien (x, y) und (x_1, y_1) zwei Punkte der Kurve, deren Tangente im Punkte (x, y) man sucht. Es wird angenommen, daß die Gleichung dieser Kurve in eine ganze rationale Form gebracht ist, sich also

$$\sum a x^m y^n = 0$$

schreiben läßt. Dann muß zugleich

$$\sum a {x_1}^m {y_1}^n = 0$$

sein. Daraus erhält man durch Subtraktion und Umordnung

$$\sum [a x^m (y^n - {y_1}^n) + a {y_1}^n (x^m - {x_1}^m)] = 0,$$

was, wenn wir mit $y - y_1$ kürzen und sodann

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad \frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{S_t}{y}$$

setzen,

$$\frac{S_t}{y} = \frac{\Sigma n a x^m y^{n-1}}{\Sigma m a y^n x^{m-1}}$$

ergibt.

Daß, wie so oft in damaliger Zeit, de Sluse selbst seinen Beweis nicht vollständig dargestellt hat, kommt daher, daß die Darstellung für ihn viel weitläufiger ausgefallen sein würde. So war der Begriff des Grenzwertes, den er benutzen mußte, damals noch nicht aufgestellt; er konnte also nicht sagen Lim. $\frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{S_t}{y}$, sondern mußte, wie aus seinem letzten Hilfssatze erhellt, $\frac{x - x_1}{y - y_1}$ mit dem $-\frac{S_t}{y}$ gleichen Werte $\frac{x - x_1}{y - y_2}$ vergleichen, den man erhält, wenn (x_1, y_2) ein Punkt der Tangente ist.

De Sluse findet Maximal- und Minimalwerte, indem er voraussetzt, daß die Tangente der Kurve, deren Ordinate die betreffende Funktion ist, der Abscissenachse parallel sei. Seine Wendepunktsbestimmungen haben wir schon erwähnt. Später hat Huygens dieselben Tangentenregeln unmittelbar aus den Tangentenbestimmungen Fermats hergeleitet. Er knüpft daran in seinen

Briefen eine richtige Erklärung des Vorzeichens, welches die Subtangente bei der Berechnung nach diesen Regeln erhält.

5. Die Cykloide; Huygens' mechanische Anwendung derselben; Evoluten.

Als ein Hauptgegenstand der allmählich und unter sehr verschiedenen Formen auftretenden infinitesimalen Methoden ist uns im vorhergehenden oft die Cykloide begegnet. Sie zog überall die Aufmerksamkeit auf sich, weil sie eine nicht algebraische Kurve war, auf die man oft sehr leicht die Methoden anwenden konnte, die man zunächst nur mit Rücksicht auf algebraische Kurven entwickelt hatte, ein Umstand, der sich heute leicht daraus erklären läßt, daß sie eine algebraische und zudem recht einfache Differentialgleichung hat. Diese Einfachheit und somit die Einfachheit der daraus hergeleiteten Eigenschaften und Ausdrücke ist sogar so groß, daß es in mehreren Punkten zweckmäßig war, ihre Untersuchung zum Ausgangspunkt zu wählen und nachher die dazu dienenden Methoden und Nebenresultate bei der Behandlung anderer Kurven anzuwenden.

Es hat daher seine gute Berechtigung, wenn wir hier die wichtigsten der die Cykloide betreffenden Bestimmungen zusammenstellen, die wir schon im vorhergehenden genannt haben, und einzelne von ihnen etwas genauer erörtern, bevor wir zu Huygens' wichtigster Anwendung dieser Kurve und den allgemeinen geometrischen Fortschritten übergehen, die er daran anknüpft.

Galilei hatte die Aufmerksamkeit auf die Kurve hingeleitet, die von einem Punkt einer Kreisperipherie beschrieben wird, welche in einer Ebene auf einer Geraden rollt; diese Kurve erhielt den Namen Cykloide. Von seinen Schülern soll zuerst Viviani ihre Tangente gefunden haben, die Torricelli sodann durch seine kinematische Methode bestimmte, wie er auch ihren Inhalt ausfindig machte. Gewiß unabhängig von diesen gleichzeitigen Untersuchungen fing man 1634 in Frankreich an, sich mit derselben Kurve, die hier den Namen Roulette oder Trochoide erhielt, zu beschäftigen. In dem genannten Jahre fand Roberval, daß die von der Cykloide und ihrer Grundlinie begrenzte Fläche das Dreifache des rollenden Kreises ist, wofür darnach Descartes und Fermat, ohne seine Beweisführung zu kennen, neue Beweise lieferten. Roberval und Descartes benutzten in ihren Beweisen die Gleichheit verschiedener Strecken, die auf den Parallelen zur Grundlinie abgeschnitten werden. Roberval veranschaulicht dieses Verhältnis durch die Einführung einer Hilfskurve, die er die Gefährtin der Cykloide nannte,

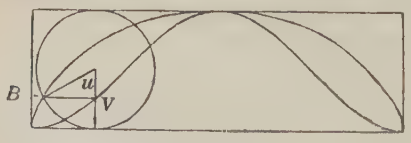

Fig. 26.

und die (Fig. 26) der geometrische Ort der Projektion V des Punktes B der Cykloide auf den senkrechten Durchmesser in der entsprechenden Stellung des rollenden Kreises ist. Diese Kurve ist in moderner Bezeichnung eine Sinusoide, da einer ihrer Punkte in einem Koordinatensystem mit dem Ort des Mittelpunktes des rollenden Kreises als Abscissenachse und dem senkrechten Durchmesser in der Anfangslage des rollenden Kreises als Ordinatenachse die Koordinaten au und $a \cos u$ erhält, wenn a der Halbmesser des Kreises und u der Winkel ist, um welchen der Kreis sich gedreht hat. Diese Kurve teilt das um die Cykloide umschriebene Rechteck $2a\, 2a\pi$ in zwei Teile, die der Symmetrie wegen einander gleich sein müssen. Außerdem ist die Strecke BV, die auf einer Parallelen zur Grundlinie zwischen den beiden Kurven abgeschnitten wird, gleich einer halben Sehne des rollenden Kreises. Die von diesen Linienstrecken erfüllten Flächen zu beiden Seiten der Mittellinie der Cykloide sind also zusammen gleich dem rollenden Kreise πa^2. Dadurch wird die ganze Fläche zwischen der Cykloide und ihrer Grundlinie

$$\tfrac{1}{2}\, 2a \cdot 2a\pi + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Man versteht, daß Roberval bei seiner Kenntnis der verschiedenen Strecken der Parallelen zur Grundlinie und durch die Quadraturen, die man schon zu damaliger Zeit nach und nach gefunden hatte, auch die Berechnung der Rauminhalte möglich war, die von der Cykloide durch Umdrehung um ihre Grund- oder Mittellinie als Achse gebildet werden.

Pascal ging noch weiter, indem er die Flächen und die entsprechenden Umdrehungskörper berechnete, die in derselben Weise gebildet werden, wenn die Grundlinie der Cykloide mit einer beliebigen zu ihr parallelen Linie vertauscht wird; ferner berechnete er die Schwerpunkte dieser Flächen und Körper, sowie die Schwerpunkte der halben Körper, die von einer Ebene durch die Umdrehungsachse abgeschnitten werden. Er stellte Juni 1658 diese Bestimmungen als Preisaufgabe; da aber vor Ablauf der ziemlich kurzen Frist (bis Oktober desselben Jahres) keine direkten und vom Beurteilungsausschuß gutgeheißenen Beantwortungen dieser Fragen, wenn auch mehrere wertvolle Beiträge zur Theorie der Cykloide, eingereicht waren, veröffentlichte er (unter dem Pseudonym Amos Dettonville) nicht nur seine eigene Lösung der gestellten Aufgaben, sondern zugleich die zusammenhängende Reihe von Methoden für die Quadratur- und Schwerpunktsbestimmungen, die wir schon erörtert haben (S. 273f.), und deren Anwendbarkeit sich keineswegs auf die Cykloide beschränkt. Leider verband er hiermit eine geschichtliche Darlegung, die namentlich zu Gunsten seines Freundes Roberval gegen Torricelli sehr ungerecht war.

Die Tangente der Cykloide wurde, wie wir gesehen haben, von Descartes (S. 325), Fermat (S. 333) und Roberval (S. 323) in ganz verschiedener Weise bestimmt. Zeitlich war die Lösung Descartes' die erste; sie zeichnet sich zugleich durch ihre Einfachheit und allgemeine Anwendbarkeit auf Rollkurven (Rouletten) aus. In formaler Beziehung entsprach sie indes nicht ganz den Anforderungen damaliger Zeit und nach Descartes' Äußerungen darüber auch nicht seinen eigenen Ansprüchen an ihre Exaktheit. Diesem Mangel half später Huygens ab, der in dem Hauptwerke, das wir bald zu besprechen haben, Descartes' Bestimmungen von einem ebenso allgemeinen Gesichtspunkte aus wie dieser selbst in einer Form beweist, die ganz den antiken Forderungen entspricht.

Wir haben bereits (S. 295) von den Anregungen gesprochen, sich mit Rektifikationen im allgemeinen und somit auch mit der Rektifikation anderer Kurven zu beschäftigen, die schon von der bloßen Mitteilung über Wrens Rektifikation herrührten (1658 anläßlich der Pascalschen Preisaufgaben). Sein Beweis, den Wallis später mitteilte, beruht auf der Eigenschaft der Tangente, daß sie durch den Punkt des rollenden Kreises geht, der dem Berührungspunkt mit der Grundlinie diametral entgegengesetzt ist, oder daß sie der entsprechend bestimmten Sehne eines festen Kreises parallel ist. Dadurch wird unter den die nötige Sicherheit gewährenden Formen des Exhaustionsbeweises dargetan, daß, wie wir heute sagen würden, ein Bogenelement doppelt so groß ist wie das Differential der bewußten Sehne. In dem geometrischen Beweise hierfür betrachtet Wren eine Folge von Sehnen, die eine geometrische Reihe bilden; aber diese Übereinstimmung mit Fermats Quadraturen von Parabeln und Hyperbeln (S. 266) ist gewiß rein zufällig. Wren verbindet mit dieser Rektifikation einen Beweis dafür, daß die Bogen der verlängerten und verkürzten Cykloide gewissen Ellipsenbogen gleich seien (vgl. S. 298).

Von sonstigen Begründungen des von Wren gefundenen Resultates ist anzuführen, daß Roberval auch hierzu seine kinematische Betrachtungsweise verwertet. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf einer Cykloide bewegt, ist aus den Geschwindigkeiten zusammengesetzt, mit denen sich einerseits das Zentrum des rollenden Kreises bewegt, andrerseits ein Punkt des rollenden Kreises um das Zentrum dreht. Daraus schließt man, daß sie der Strecke der Normale proportional ist, die zwischen der Kurve und der Grundlinie abgeschnitten wird. Die Rektifikation wird auf die Quadratur zurückgeführt, die wir heutzutage durch $\int 2a \sin \frac{1}{2} u\, du$ darstellen können.

Nach so vielseitigen und eingehenden Untersuchungen über die Cykloide war man mit dieser Kurve in dem Maße vertraut geworden, daß Huygens

auf den Gedanken verfallen konnte, den er dann auch vollständig bewies, die Cykloide sei gerade die Kurve, deren er bedurfte, um seine Uhr zu regulieren, eine solche nämlich, auf der ein schwerer Punkt „tautochrone" Schwingungen, d. h. Schwingungen ausführe, deren Dauer von der Größe der Ausschläge unabhängig sei. Die Cykloide ist in einer senkrechten Ebene so zu stellen, daß die Grundlinie wagerecht ist, aber oberhalb des rollenden Kreises liegt. Um den Gedankengang seines Beweises in aller Kürze wiederzugeben und namentlich um zu zeigen, welche Eigenschaften der Cykloide er benutzt, wollen wir von allem absehen, was nur dazu dient, seinen Beweis zu einem vollständigen Exhaustionsbeweise auszubilden. Ferner wollen wir, indem wir für die Schwere die Bezeichnung g gebrauchen, in moderner Weise Proportionen und unwesentliche Vergleiche mit einer gewissen Bewegung, die bei Huygens das fehlende Zeichen eben für diese Konstante ersetzen müssen, vermeiden.

Es sei (Fig. 27) AB die Achse der Cykloide; der Kreis über AB als Durchmesser stellt sodann eine Lage des rollenden Kreises dar, dessen Durchmesser wir $2a$ nennen. C ist der Punkt, in welchem der Fall auf der Cykloide anfängt, N eine beliebige Lage des fallenden Punktes. Durch beide legen wir die Wagerechten CD und NL, welche die Achse in D und L schneiden. Außerdem muß man einen Kreis über AD als Durchmesser haben. Diesen Durchmesser, die Höhe von C über dem niedrigsten Punkt der Cykloide, nennen wir h. Außerdem sind M und P Durchschnittspunkte von LN mit den beiden Kreisen. Es ist sodann bekannt, daß der fallende Punkt in N die Geschwindigkeit $\sqrt{2g \cdot DL}$, oder, da $DP = \sqrt{h \cdot DL}$ ist, die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot DP$ hat. Da nun die Tangente der Cykloide in N mit AM parallel ist, wird die senkrechte Komponente dieser Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot DP \cdot \frac{AL}{AM}$.

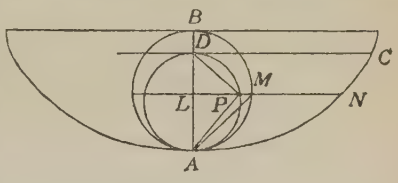

Fig. 27.

Aus der Figur ersieht man nun, daß

$$\frac{AL}{AM} = \frac{AM}{2a} = \sqrt{\frac{AL}{2a}} = \frac{AP}{\sqrt{2a \cdot h}} = \frac{LP}{DP}\sqrt{\frac{h}{2a}}.$$

Die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit wird also $\sqrt{\frac{g}{a}}\ LP$. Da nun die Tangente des Kreises DPA im Punkt P mit dem Durchmesser DA einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\frac{LP}{\frac{1}{2}h}$ ist, wird ein Punkt, der den Kreis

DPA mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$ durchläuft, P mit einer Geschwindigkeit passieren, deren senkrechte Komponente gleichfalls $\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot LP$ ist. Dadurch ist auch die Bewegung von N bestimmt. N wird sich stets in derselben Höhe wie P befinden, wird zu derselben Zeit im niedrigsten Punkt A der Cykloide anlangen und in demselben Moment, in welchem P die ganze Kreisperipherie $2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \pi$ durchlaufen hat, also nach Verlauf der Zeit $\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ die Höhe des Ausgangspunktes P erreicht haben. Diese Zeitdauer einer Schwingung ist unabhängig von h oder der Lage des Punktes der Cykloide, von dem die Bewegung ausging.

Dieser wichtige Satz vom „Tautochronismus“ der Cykloide wird auf die hier angedeutete Weise in Huygens' *Horologium oscillatorium* bewiesen, das 1665 geschrieben wurde, aber erst 1673 herauskam. Der Satz selbst war jedoch schon vor 1673 bekannt geworden und wurde sodann auch noch von anderen bewiesen.

In derselben Schrift veranlaßte die Frage, durch welche Vorrichtung man die hier vorausgesetzte Bewegung auf einer Cykloide bewerkstelligen könne, bei Huygens einen neuen Fortschritt wesentlich geometrischer Art, die Einführung und das Studium der Evolute einer Kurve. Es fiel ihm leicht zu entdecken, daß die Normalen einer gegebenen Cykloide Tangenten einer parallel verschobenen Cykloide seien. Sodann führte er einen strengen Beweis dafür, daß die erste von zwei Kurven, die miteinander in einer derartigen Verbindung stehen, von einem gewissen Punkt eines Fadens beschrieben wird, welcher um die andere Kurve herum- oder von ihr abgewickelt wird, weshalb letztere eben den Namen Evolute erhielt. Das schwere Teilchen, das sich auf einer Cykloide bewegen soll, braucht also nur an einem Faden von passender Länge $(4a)$ aufgehängt zu sein, welcher im Rückkehrpunkte der Evolutencykloide befestigt ist und sich während der Bewegung um diese Kurve herumwickelt.

Dadurch hatte Huygens zwar erreicht, was ihm augenblicklich vonnöten war; aber das geometrische Interesse, welches auch die Bestimmung der Evoluten anderer Kurven darbieten würde, entging seiner Aufmerksamkeit nicht. Aus der Abwickelung folgt, daß die Länge eines Bogens der Evolute der Länge des von ihr abgewickelten Fadenstückes gleich ist. Indem sich nun die Evoluten algebraischer Kurven als wiederum algebraisch erweisen, gewann man dadurch ein Mittel, um algebraische Kurven zu finden, die sich algebraisch rektifizieren lassen. Erstens zeigte er, daß die Normalen einer gewöhnlichen Parabel Tangenten einer gewissen

semikubischen Parabel sind, und erzielte dadurch die Darstellung dieser Kurve, deren Rektifikation so viel Aufsehen erregt hatte (S. 295), als einer Evolute. Indem er sodann ein allgemeines Verfahren zur Auffindung der Evolute einer gegebenen Kurve aufstellte, wurde es ihm möglich, eine unbegrenzte Anzahl algebraisch rektifizierbarer Kurven zu finden. — In seiner Untersuchung über die Zentrifugalkraft (S. 248) bringt er umgekehrt die Evolvente des Kreises in Anwendung. Er beweist, daß sie in dem Punkt, den sie mit dem Kreise gemein hat, auf diesem senkrecht ist, was zur Bestimmung der Richtung gebraucht wird, in welcher die Zentrifugalkraft wirkt.

In seiner Darstellung der Evolutenbestimmung entledigt Huygens sich ganz der strengen Formen des Exhaustionsbeweises und begnügt sich mit den kürzeren infinitesimalen Betrachtungs- und Ausdrucksweisen. Da es sich dabei zeigt, daß er diese durchaus beherrscht, so legten wir ihm nichts Fremdes bei, als wir sie vorhin zur Abkürzung seiner anderen Beweise benutzten. Er behauptet, daß ein Punkt O (Fig. 28), in dem eine Normale MN der gegebenen Kurve eine unendlich naheliegende Normale $M'N'$ schneidet, mit dem Punkte zusammenfalle, in welchem die Normale die Evolute berühre. Der Abstand von M bis zum Berührungspunkt der Normale und der Evolute beruht also auf der Länge MN der Strecke, welche die Abscissenachse auf der Normale abschneidet, und auf dem Verhältnis zwischen der Strecke NN', die auf der Achse zwischen den Normalen abgeschnitten wird, und der Strecke ML, die diese auf einer durch M gehenden Parallelen zur Achse abschneiden. Wenn nun MQ und $M'Q'$ senkrecht auf die Achse gefällt werden und die Ordinate $M'Q'$ von M' die Gerade ML in R, die Gerade MM' aber die Achse in P schneidet, so ist

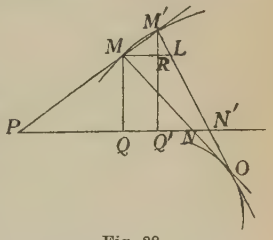

Fig. 28.

$$\frac{ML}{NN'} = \frac{ML}{MR} \cdot \frac{MR}{NN'} = \frac{PN'}{PQ'} \cdot \frac{QQ'}{NN'}.$$

Das erste Verhältnis $\frac{PN'}{PQ'}$ erhält, wenn M' mit M zusammenfällt, den Grenzwert $\frac{S_n + S_t}{S_t}$, indem wir die Subnormale als S_n, die Subtangente als S_t bezeichnen. Es gilt also nur, den Grenzwert zu finden, dem sich das letzte Verhältnis nähert, wenn M und M' zusammenfallen; diese Bestimmung muß unter irgend einer Form dasselbe ergeben wie eine Differentiation. Mit Differentiationszeichen ist nämlich $NN' = dx \pm dS_n$, wo x die Abscisse von M bezeichnet und das doppelte Vorzeichen von den verschiedenen Lagen herrührt, welche möglich sind, und die man zu Huygens' Zeiten noch

nicht durch das Vorzeichen der Subnormale bezeichnete. Das von Huygens angegebene Berechnungsverfahren läßt sich, wenn wir uns an das der Fig. 28 entsprechende obere Vorzeichen halten, in aller Kürze durch folgenden Ausdruck für den Krümmungsradius (ϱ) wiedergeben, eine Benennung, die er allerdings noch nicht benutzt:

$$\varrho = MN \cdot \frac{\frac{S_t + S_n}{S_t}}{\frac{S_t + S_n}{S_t} - \left(1 + \frac{dS_n}{dx}\right)}.$$

Durch Einsetzung von $MN = y\sqrt{1+y'^2}$, $S_t = \frac{y}{y'}$, $S_n = y \cdot y'$, erhält man den heute gebräuchlichen Ausdruck des Krümmungsradius.

Die Größe, die wir hier $\frac{dS_n}{dx}$ genannt haben, findet Huygens, indem er die Tangente einer Hilfskurve sucht, deren Punkte dadurch bestimmt werden, daß in jedem Punkt Q eine Ordinate $y = S_n$ errichtet wird. Unser Differentialquotient ist dann das Verhältnis zwischen der Ordinate und Subtangente dieser neuen Kurve. Die Operation, die in unserer Wiedergabe als eine Anwendung der Differentiation erscheint, führte Huygens also auf eine andere Operation derselben Art zurück, deren Resultat bereits aus Descartes' und Fermats Tangentenmethode bekannt war. Huygens bezieht sich auf die des ersteren. Er wendet demnächst die Methode an, um die Evolute eines Kegelschnittes, in welchem Falle die Hilfskurve, wie er bemerkt, eine Gerade wird, und die Evoluten der verallgemeinerten Parabeln und Hyperbeln Fermats zu bestimmen.

Teils durch Huygens' Untersuchungen über Evoluten, teils durch die eingehenden optischen Arbeiten damaliger Zeit wurde man dazu veranlaßt, auch gewisse in optischer Beziehung interessante Kurven zu untersuchen, die sich wie die Evolute als Umhüllungskurven von Geraden darstellen, die Katakaustik und Diakaustik einer gegebenen Kurve. Erstere ist die Umhüllungskurve der Geraden, die in den Punkten einer gegebenen Kurve mit der Normale denselben Winkel bilden wie eine Reihe von einem gegebenen Punkt ausgehender Geraden, bezw. eine Reihe von Parallelen, und die also durch Zurückwerfung der nach den letztgenannten Geraden gerichteten Strahlen entstehen; letztere umhüllt die durch die Brechung solcher Lichtstrahlen bestimmten Strahlen. Die Namen rühren von den Brüdern Bernoulli her, die auf diese Kurven Leibnizens Differentialrechnung anwendeten. Indem wir uns hier an die älteren Behandlungsweisen halten, haben wir zu erwähnen, daß Tschirnhaus in einer der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung (1682) eine einfache Rektifikation einer solchen

Katakaustik fand, die durch Zurückwerfung paralleler Strahlen durch eine beliebige Kurve entsteht. Huygens hat in seinem *Traité de la lumière* den entsprechenden Satz von der Diakaustik bewiesen; er tritt bei ihm als eine einfache Anwendung des Umstandes hervor, daß die Diakaustik eine Evolute ist, und zwar der rechtwinkligen Trajektorien der gebrochenen Strahlen, die wiederum Kurven sind, welche das Licht in demselben Augenblicke erreicht.

Indem wir uns wieder der Cykloide zuwenden, wollen wir daran erinnern, daß Descartes' allgemeine Konstruktion (S. 325) von Tangenten zu Rollkurven auch auf Epicykloiden und Hypocykloiden anwendbar ist. Dieser Kurven bedurfte man schon in dem ptolemäischen System, das die Planetenbahnen zu Epicykloiden oder noch zusammengesetzteren Kurven machte. Einzelnen geometrischen Örtern, die sich speziell zu den hier angeführten Kurven rechnen lassen, hatte man auch zu verschiedenen Zeiten geometrisches Interesse gewidmet. So hatten schon Naṣîr Eddîn, Koppernikus und Ferrari, und zwar ganz unabhängig voneinander bemerkt, daß ein Punkt eines Kreises, der auf der inneren Seite eines Kreises mit doppelt so großem Halbmesser rollt, sich auf einem Durchmesser dieses festen Kreises bewegt. Unter den von Albrecht Dürer aufgestellten Kurven ist eine mit einer verlängerten oder verkürzten Epicykloide identisch, deren rollender Kreis dem festen gleich ist. Ein größeres Interesse erhielten die Epicykloiden in der uns hier zunächst beschäftigenden Zeit, als der praktische Römer (und vor ihm in einem einzelnen Falle vielleicht Desargues) dartat, daß sich diese Kurven ihrer schon erwähnten Tangentenbestimmung wegen ganz besonders zu Profilen der Zähne eines Zahnrads eignen.

Später hat Newton Bogenlängen dieser Kurven bestimmt und gezeigt, daß ihre Evoluten Kurven derselben Art sind, sowie Huygens' Resultate über den Tautochronismus (oder, wie er sagt, Isochronismus) der Bewegung eines schweren Punktes auf der Cykloide folgendermaßen verallgemeinert: Wenn die Cykloide mit einer Hypocykloide und die Schwere mit einer dem Abstand proportionalen Anziehung an den Mittelpunkt des festen Kreises vertauscht wird, werden die Schwingungen stets tautochron (oder, mit Newtons Ausdruck, isochron) sein.

6. Die umgekehrte Tangentenaufgabe; Barrows Umkehrungssatz.

In der Zeit, in der wir die wichtigen Quadratur- und Tangentenmethoden entstehen sahen, die uns bisher beschäftigt haben, zog noch eine andere Klasse von Aufgaben die Aufmerksamkeit auf sich, die sog. um-

gekehrten Tangentenaufgaben. Sie zielen auf die Bestimmung von Kurven ab, deren Tangenten alle eine gegebene Eigenschaft besitzen sollen. Unter den Aufgaben, die diesen Namen tragen, finden wir jedoch nur solche, in denen die betreffende Eigenschaft der Tangente in gewisser Weise von der Lage des Berührungspunktes abhängig ist, aber keine solchen, in denen die Eigenschaft als davon unabhängig angegeben wird, also — mit modernem Ausdruck — die Umhüllungskurve von Geraden in Frage steht. Von Aufgaben letzterer Art wollen wir daher jetzt nicht weiter reden, sondern nur daran erinnern, daß man Kegelschnitte als solche Umhüllungskurven sowohl bei Apollonius (Zeuthen, Altertum und Mittelalter, S. 210), als später z. B. bei Viviani (S. 318) bestimmt findet. Der Unterschied, der tatsächlich zwischen diesen Aufgaben und solchen besteht, bei denen die Eigenschaft der Tangente von der Lage des Berührungspunktes abhängig ist, ist in der heutigen Mathematik daran zu erkennen, daß nur letztere den vollständigen und den darin einbegriffenen partikularen Integralen von Differentialgleichungen entsprechen. Eine umgekehrte Tangentenaufgabe wird somit eine solche sein, die sich durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit 2 Variabeln x und y darstellen läßt; ihre vollständige Lösung wird dasselbe sein wie die vollständige Integration einer solchen Gleichung.

Namentlich Descartes hat die Aufmerksamkeit auf Aufgaben dieser Art hingelenkt. Er war ja eben selbst bei seinen optischen Untersuchungen auf eine derartige bedeutungsvolle Aufgabe gestoßen, die wir bereits erwähnt haben (S. 323), auf die Bestimmung einer Kurve, deren Normalen in einem beliebigen Punkt P mit den Verbindungslinien von P mit zwei festen Polen Winkel bilden, deren Sinus in einem gegebenen Verhältnis stehen; wir werden es e nennen und, um die verschiedenen Fälle zusammenfassen zu können, annehmen, daß es mit Vorzeichen gerechnet sei. Wollten wir dann die genannte Aufgabe in einem bipolaren Koordinatensystem mit den gegebenen Polen ausdrücken, so würde dies durch die Differentialgleichung

$$dr + e dr_1 = 0$$

geschehen müssen, die durch die Gleichung

$$r + e r_1 = c$$

integriert wird. Diese Gleichung drückt gerade die Eigenschaft der Punkte der gesuchten Kurve aus, die Descartes fand, ohne uns aber von seinem Verfahren etwas mitzuteilen; denn die Tangentenbestimmung in seiner Geometrie (S. 326) hat nicht zur Auffindung der Kurve dienen können.

Bevor wir Descartes' weitere Untersuchungen über unsere Tangentenaufgaben näher besprechen, wollen wir indes noch einige andere Aufgaben derselben Art erwähnen, denen wir allerdings schon in anderer Gestalt be-

gegnet sind, deren Lösung aber mit der Integration einer Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln zusammenfällt. Zwar erkannte man nicht von Anfang an die Übereinstimmung zwischen diesen Aufgaben und den umgekehrten Tangentenaufgaben, die heute durch die gleichförmige analytische Behandlung hervortritt; je mehr aber diese Übereinstimmung allmählich einleuchtete, um so mehr gelang es auch, die Aufgaben, die ausdrücklich als umgekehrte Tangentenaufgaben gestellt wurden, in ergiebiger Weise zu behandeln.

Von besonderer Wichtigkeit war es, daß es allmählich gelang, sie mit den Aufgaben in Verbindung zu bringen, die zu praktischen Zwecken Neper und Galilei behandelt hatten. Neper hatte (S. 134) zur Definition seiner Logarithmen unmittelbar die Differentialgleichung

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{y}{r},$$

und zwar in der Gestalt gebraucht, in der man zu damaliger Zeit eine solche Gleichung darstellen mußte; eben aus dieser Gleichung leitete er die Eigenschaften und die Berechnungsweise der Logarithmen her — die einzig mögliche Integration einer Differentialgleichung, die zu bislang unbekannten Funktionen führte, die also gerade deshalb durch die Differentialgleichung definiert werden dürfen. Galilei führte (S. 243) die Bestimmung der unter gleichförmiger Beschleunigung zurückgelegten Fallstrecke auf die Quadratur eines Dreiecks zurück und integrierte auf diese Weise

$$\frac{dx}{dt} = ct \text{ durch } x = \tfrac{1}{2} ct^2.$$

Auch Huygens' Behandlung des Falles auf der Cykloide (S. 341) würde, da er davon ausgeht, daß das Quadrat der Geschwindigkeit zu der Tiefe unter dem Ausgangspunkt proportional sei, in der Sprache der modernen Analyse mit der Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung zusammenfallen. Was seine Lösung betrifft, so interessiert uns hier namentlich, daß der Umstand, daß das Integral circulare oder trigonometrische Funktionen enthalten würde, bei ihm darin hervortritt, daß die Bewegung mit einer gleichförmigen Bewegung auf einem Kreise vertauscht wird, was wir auch Newton in seiner einfacheren Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben werden benutzen sehen. Auch eine Untersuchung, zu der Huygens schon als 18jähriger durch Galileis Annahme veranlaßt wurde, die Gleichgewichtsfigur eines schweren homogenen Fadens sei eine Parabel, beruht in der modernen Mathematik auf der Integration einer Differentialgleichung. Huygens beweist, daß die Annahme unrichtig sei, daß aber eine Parabel entstehe, wenn die Belastung jeder Fadenstrecke zu ihrer wagerechten Projektion proportional ist. Er tut dies dar, indem er einen elementaren geo-

metrischen Beweis dafür liefert, daß die Ecken eines zu gleich großen parallelen Kräften mit gleichen Entfernungen gehörigen Seilvielecks auf einer Parabel liegen. Er löst also diese Aufgaben nicht von einem so allgemeinen Gesichtspunkt aus, wie es durch Integration von Differentialgleichungen geschieht; indem wir sie aber hier in Verbindung mit diesen Gleichungen besprechen, haben wir doch die Natur der Schwierigkeiten angedeutet, die er zu überwinden oder zu umgehen verstand.

Aus weit älterer Zeit liegt jedoch schon eine eigentliche umgekehrte Tangentenaufgabe, noch dazu auf der Kugel vor. Zur Zeit der großen geographischen Entdeckungen stellte der Portugiese Pedro Nuñez (Nonius) die für die Seefahrt wichtige Kurve auf, deren Tangenten die Meridiane durch die Berührungspunkte unter einem konstanten Winkel schneiden. Diese Kurve, die später Snellius — gleichfalls ein Angehöriger einer seefahrenden Nation — behandelt und Loxodrome genannt hat, und die in der Kartenprojektion des Geographen Mercator (1512—94) als eine Gerade dargestellt wird, konnte man doch nur mittelst der Tangenteneigenschaften selbst untersuchen und annäherungsweise konstruieren. Etwas weiter brachten es Descartes, Torricelli und Wallis in der Untersuchung einer ebenen Kurve, die als ein Spezialfall der hier genannten betrachtet werden kann, derjenigen nämlich, deren Tangenten mit den Verbindungslinien der Berührungspunkte mit einem festen Punkt in der Ebene einen konstanten Winkel bilden (siehe S. 293). Aus diesen wesentlich gleichartigen Behandlungen dieser Kurve, die wir heute die logarithmische Spirale nennen, führen wir an, daß Wallis findet, die Kurve lasse sich als diejenige definieren, die von einem Punkt beschrieben wird, der sich, während sich eine Gerade mit gleichförmiger Geschwindigkeit um einen festen Punkt O dreht, mit einer dem Abstande proportionalen Geschwindigkeit auf dieser Geraden von dem Punkt O entfernt. Diese Definition fällt ganz mit dem zusammen, was wir heute durch die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r}{k}$$

ausdrücken. Daß die so definierte Kurve zugleich die angeführte Tangenteneigenschaft besitze, war leicht nachweisbar; eine Integration der Differentialgleichung scheint aber zu fehlen. Die Übereinstimmung mit Nepers Logarithmendefinition zeigt indes, daß der Zusammenhang zwischen r und ϑ — mit modernem Ausdruck — gerade

$$r = a e^{\frac{\vartheta}{k}} \text{ oder } \vartheta = k \log \frac{r}{a}$$

ist. Daß man diese Gleichungen nicht aufstellte, kam daher, daß der

Funktionsbegriff und somit auch die exponentielle und logarithmische Funktion noch unbekannt waren. Solche Begriffe ersetzte man ja eben gewöhnlich durch die graphische Darstellung durch Kurven. Daß man aber die durch diese Gleichungen ausgedrückte Übereinstimmung bemerkte, scheint daraus hervorzugehen, daß man gerade solche Eigenschaften der Kurve hervortreten ließ, die sich unmittelbar den bekannten Eigenschaften der Logarithmen anschließen.

Allgemeinere Betrachtungen über die vorliegenden Mittel zur Lösung umgekehrter Tangentenaufgaben verband Descartes mit einigen Aufgaben, die von de Beaune den französischen Mathematikern gestellt wurden. In diesen Betrachtungen, die sich in einem Briefe aus dem Jahre 1637 finden (gedruckt 1667), bemerkt er zuerst, daß seine eigenen und Fermats Tangentenmethoden sich kaum einfach umkehren lassen. Indem er besonders bemüht ist, algebraische Kurven zu finden, ersinnt er nun ein indirektes Verfahren. Er stellt eine geordnete Reihe algebraischer Kurven auf und versucht, indem er nachher ihre Tangenten bestimmt, der Reihe nach, ob sie die aufgegebene Eigenschaft besitzen. So sagt er, daß er, um die von de Beaune in Frage gestellte Kurve zu finden, solche Versuche mit Kurven, deren Gleichungen rücksichtlich der einen Variabeln 2. Grades seien, rücksichtlich der zweiten aber bis auf den 1000. Grad stiegen, vielleicht also mit Kurven wie $y^n = ax^2 + bx + c$ angestellt habe. Es wird allerdings weitläufig sein, diese Methode anzuwenden, besonders wenn man nach und nach prüfen will, ob verschiedene Formen möglich seien; sie zeigt aber doch die rechte Richtung, insofern, wie wir heute sagen, durch die Differentiation der Untersuchung, wieweit eine Integration durch Funktionen bekannter Formen möglich sei, der Weg gebahnt wird.

Da diese Versuche in dem vorliegenden Falle zu keinem Resultate führten, ließ er sich auf eine direkte Untersuchung ein, wobei er namentlich den Umstand benutzte, daß der Berührungspunkt einer Tangente die Grenzlage des Durchschnittspunktes zwischen zwei zusammenfallenden Tangenten ist. Wir werden nun sehen, was er unter Anwendung dieser Betrachtungsweise der Aufgabe de Beaunes gegenüber erreichte, auf die er besonders sein Augenmerk gerichtet hatte.

De Beaune hatte nach der Quadratur der Kurve gefragt, welche die Gleichung

$$\frac{y}{S_t} = \frac{x-y}{a}$$

befriedigt, wo S_t die dem Punkt (x, y) entsprechende Subtangente ist. Descartes will sich nicht mit der verlangten Quadratur begnügen, sondern zielt zugleich auf eine andere geometrische Bestimmung dieser Kurve ab.

Er bemerkt nun, daß die Strecke, die auf der Geraden $y = x - a$ zwischen der Tangente und einer parallel zu der y-Achse durch den Berührungspunkt gezogenen Geraden abgeschnitten wird, also die Subtangente eines schiefwinkeligen Koordinatensystems, in welchem die x-Achse mit dieser Geraden vertauscht ist, konstant $(= a\sqrt{2})$ ist; dies Resultat wird in der Sprache der Differentialrechnung dadurch ausgedrückt, daß die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a} \tag{1}$$

durch die Substitution $y_1 = y + a - x$ in

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_1}{a} \tag{2}$$

oder, wenn wir, um einen vollständigen Koordinatenübergang zu bewerkstelligen, zugleich $x_1 = x\sqrt{2}$ setzen, in

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{a\sqrt{2}} \tag{3}$$

umgestaltet wird.

Was wir durch die Differentialgleichung (2) ausdrücken, stellt Descartes in kinematischer Form dar, indem er sagt, daß ein Punkt der Kurve als Schnittpunkt zweier beweglichen Geraden $x = \alpha$ und $y_1 = \beta$ bestimmt werde, von denen erstere, die zu $x = 0$ parallel ist, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewege, während letztere, die zu $y_1 = 0$ oder $y = x - a$ parallel ist, eine dem Abstand von dieser Geraden proportionale Geschwindigkeit habe. Über diese Gerade bemerkt er, daß sie die Asymptote der Kurve werde.

An das so gewonnene Resultat knüpft Descartes die Bemerkung an, die beiden Bewegungen seien derart inkommensurabel, daß die Kurve eine derjenigen sein müsse, die er in seiner Geometrie verworfen habe, d. h. daß sie nicht algebraisch sei, weshalb er sie natürlicherweise durch die soeben erwähnte Versuchsmethode nicht zu finden vermochte. Mit dieser negativen Antwort begnügte er sich, da er eben eine algebraische Kurve mit der verlangten Eigenschaft suchte. Er hat jedoch tatsächlich mehr erreicht, indem er, wie Wallis bei den logarithmischen Spiralen, die Aufgabe auf die Differentialgleichung zurückgeführt hat, die Neper zur Definition seiner Logarithmen gebraucht, und die Annahme liegt nicht fern, daß Descartes dies selbst bemerkt habe.

Insofern ist auch diese Aufgabe gelöst, als die Integration einer Differentialgleichung, also auch die Lösung einer umgekehrten Tangentenaufgabe gerade darin besteht, sie auf eine andere zurückzuführen, deren Lösung durch einfachere Funktionen bekannt ist, oder die gewisse Funktionen de-

finiert, zu deren Untersuchung man sich schon früher veranlaßt gefühlt hat. Da man sich in der hier behandelten Zeit so viel mit Quadraturen beschäftigt hatte, so wäre es ein besonders glückliches Ziel für die Umgestaltung, die Aufgabe auf eine Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ zurückzuführen, die unmittelbar durch eine Quadratur integriert wird. Von solchen Zurückführungen findet man ein Beispiel in Gregorys 1668 erschienener *Geometriae pars universalis*. Für die Kurve, deren Bogenlänge s durch

$$as = \int f(x)\, dx$$

bestimmt ist, findet er die Gleichung

$$ay = \int \sqrt{(f(x))^2 - a^2}\, dx,$$

wo unser $f(x)$ als Ordinate einer Kurve dargestellt ist, und wir — wie oft früher — die von Gregory angewendeten Flächenräume durch Integrale darstellen. Ein anderer Satz, den wir, wenn S_t die Subtangente bedeutet, kurz durch

$$\int S_t\, dy = \int y\, dx$$

wiedergeben können, weist, da $\frac{y}{S_t} = \frac{dy}{dx}$ ist, noch direkter auf das gegensätzliche Verhältnis zwischen der Operation (Differentiation), durch die namentlich Fermat seine Tangentenbestimmungen ausführte, und der Quadratur hin. Damit man sich die Zurückführung auf eine Quadratur, die Gregory also in einzelnen Fällen erreichte, als bestimmtes Ziel stecken und, wo es möglich wäre, dies Ziel auch erreichen könnte, war eine klare Darstellung und Begründung dieses gegensätzlichen Verhältnisses vonnöten. Eine solche gibt, wie wir nun sehen werden, Barrow in seinen *Lectiones geometricae* (1669—70; 2. Ausg. 1674).

Es gelang Wallis (S. 348), eine umgekehrte Tangentenaufgabe, indem er ihr eine kinematische Form verlieh, in einer Weise auszudrücken, die sich dem Ausdruck durch eine Differentialgleichung nähert. Eine solche Form hatten schon Torricelli und Roberval den direkten Tangentenaufgaben gegeben. Ersterer hatte (S. 321) jedenfalls hinsichtlich der Parabel die Tangentenbestimmung an die von Galilei untersuchte Bewegung mit gleichmäßig beschleunigter Geschwindigkeit angeknüpft, und für eine solche war der durchlaufene Weg, wie wir soeben erwähnten, gerade durch eine Quadratur gefunden worden. Barrow, der wie sein Landsmann Wallis den geometrischen Arbeiten Torricellis eine anerkennendere Aufmerksamkeit angedeihen ließ als die französischen Mathematiker, knüpft denn auch ausdrücklich seine erste Begründung des gedachten gegensätz-

lichen Verhältnisses an Torricellis Bestimmung der Parabeltangente an und dehnt sie sodann auf andere Kurven aus.

Barrows allgemeiner Umkehrungssatz wird Fig. 29 dargestellt, wo auf den beiden Kurven $VIFI$ und $VGEG$ die einander entsprechenden Punkte F und E dieselbe Abscisse VD haben, während die Ordinate DF des einen, mit einer konstanten Größe R vervielfacht, der Fläche VDE gleich ist, die von der anderen Kurve, der Abscissenachse und der entsprechenden Ordinate DE begrenzt wird. Die Kurven stehen also miteinander in der Verbindung, die man heute, wenn x die Abscisse und y und v die Ordinaten bezeichnen, durch

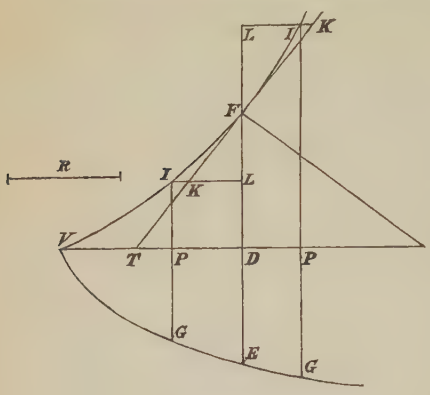

Fig. 29.

$$(1) \qquad R \cdot y = \int_0^x v\,dx$$

ausdrücken würde. Er sagt, daß dann die Subtangente $DT = R \cdot \frac{DF}{DE}$ oder (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens von S_t) $S_t = \frac{R \cdot y}{v}$ ist, was, wenn wir $\frac{y}{S_t}$ mit dem heute gebräuchlichen $\frac{dy}{dx}$ vertauschen,

$$(2) \qquad R\frac{dy}{dx} = v$$

ergibt.

Erst beweist Barrow, wie er erwähnt, in unmittelbarem Anschluß an Torricelli diese gegenseitige Abhängigkeit zwischen den durch die Gleichungen (1) und (2) ausgedrückten Eigenschaften kinematisch und gebraucht dazu zwei gesonderte Figuren. Übertragen wir den Beweis auf obige Figur, so ist die Kurve $VIFI$ die Bahn eines beweglichen Punktes F. Von der Projektion D auf die Achse wird angenommen, daß sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewege, die wir $= R$ setzen können, während die Ordinate y mit einer Geschwindigkeit wächst, die durch die Ordinate v der anderen Kurve dargestellt wird. Dies können wir, wenn wir die Zeit t nennen, mit modernen Bezeichnungen durch

$$\frac{dx}{dt} = R, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

ausdrücken. Zufolge der Tangentenmethode Torricellis stellt sich sodann die Tangente als Diagonale des durch die beiden Geschwindigkeiten

bestimmten Rechtecks dar, was gerade obige Bestimmung (2) der Subtangente $\left(\text{oder } \frac{dy}{dx}\right)$ veranlaßt. Die Quadratur, durch die Galilei den mit gleichmäßig beschleunigter Geschwindigkeit durchlaufenen Weg gefunden hatte, ergibt zugleich obigen Zusammenhang (1) zwischen y und dem Flächeninhalt $\int_0^x v\,dx$.

Zuvörderst wendet Barrow seinen Satz auf die von Galilei und Torricelli behandelte Wurfbewegung an. Für diese sind die beiden Kurven die Parabel $y = \frac{g}{2R^2}x^2$ und die Gerade $v = \frac{g}{R}x$.

Barrow bleibt jedoch nicht bei diesem kinematischen Beweis stehen, der ja auch mehr auf der Torricelli und Galilei entlehnten Vorstellung von Bewegung als auf solchen exakten Grenzübergängen beruht, die man damals noch forderte und immer in geometrischer Form darstellte. Zu seinem geometrischen Beweis gebraucht er gerade Fig. 29. Es kam darauf an zu zeigen, daß die Gerade von F bis zu dem durch $DT = R \cdot \frac{DF}{DE}$ bestimmten Punkt T eine Tangente ist, oder daß die Punkte I der Kurve, die auf je einer Seite des Punktes F liegen, auf derselben Seite der Geraden FT gelegen sind.

Dies ist ersichtlich, wenn man durch einen solchen Punkt I die der Abscissenachse Parallele IK zieht. K ist ihr Durchschnittspunkt mit FT, L der mit der Ordinate DF. Den angegebenen Eigenschaften der Kurven zufolge wird dann der Flächeninhalt von $PDEG$ gleich $R \cdot LF$ sein. Übrigens zeigt die Figur, daß

$$\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE},$$

woraus folgt

$$LK \cdot DE = R \cdot LF = PDEG.$$

Nun ist, wie Fig. 29 zeigt, $PDEG \lessgtr IL \cdot DE$, je nachdem I links oder rechts von F gelegen ist. Unter denselben Voraussetzungen wird dann auch $KL \lessgtr IL$, woraus folgt, daß die Kurve $VIFI$ zu beiden Seiten von F auf derselben Seite von TF liegen bleibt. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Ordinate v der Kurve $VGEG$, wie in der Figur, mit der Abscisse x wächst. Wenn sie abnähme, würde auf dieselbe Weise TF auf der entgegengesetzten Seite der Kurve $VIFI$ liegen bleiben, also auch ihre Tangente in F sein. Man sieht, daß der Beweis zugleich eine Erörterung der Richtung der Konkavität und ihrer Abhängigkeit von der Zunahme oder Abnahme von v oder $\frac{dy}{dt}$ enthält.

Es muß die Allgemeinheit von Barrows Satz und Beweisführung hervorgehoben werden. Es handelt sich nicht um die Tangente einer einzelnen bestimmten Kurve (nämlich derjenigen, deren Ordinate wir y genannt haben) oder den Inhalt einer anderen (nämlich derjenigen, deren Ordinate wir v genannt haben); vielmehr kann entweder die eine oder die andere eine ganz beliebige Kurve sein und so die Darstellung einer beliebigen, aber gegebenen Funktion liefern, wie sie zu damaliger Zeit natürlich war, als noch kein von der Geometrie unabhängiger Funktionsbegriff aufgestellt war. Dadurch gewinnt Barrow den Vorteil, seine Sätze für alle Funktionen, oder doch — wie man jetzt sagen muß, nachdem man in neuester Zeit Funktionen entdeckt hat, die sich nicht differentiieren lassen — wenigstens für alle diejenigen Funktionen, welche diese Behandlungsweise gestatten, aufstellen und mit eins beweisen zu können. Auf diesem Gebiete hat er also, wenn auch nur in geometrischer Form, etwas Ähnliches erreicht wie Vieta, der durch die Einführung eines Zeichens für eine gegebene, aber beliebige Größe in den Stand gesetzt wurde, allgemeine algebraische Formeln aufzustellen. Wir müssen indes schnell daran erinnern, daß Pascal bereits früher die von Fermat und ihm selbst benutzte teilweise Integration in derselben allgemeinen Weise ausgesprochen hatte, und daß wir soeben auch Gregory einigen weniger weit reichenden Resultaten diese allgemeine Form verleihen sahen.

Was Barrow hier untersucht, ist also, wenn wir den der Homogeneität wegen eingeführten Faktor $R = 1$ setzen, der Zusammenhang zwischen einer beliebigen Funktion y und $v = \frac{dy}{dx}$, welcher Zusammenhang, wie er zeigt, auch durch die Quadratur ausgedrückt werden kann, die wir als $y = \int v\,dx$ schreiben. In der geometrischen Darstellung ist allerdings das hier als Differentialquotient Bezeichnete nur der Richtungskoeffizient $\left(\frac{y}{S_t}\right)$ einer Tangente; daß aber der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Anwendungen der Differentiation bekannt war, folgt zur Genüge aus dem, was wir Abschn. 4 hervorgehoben haben, und aus Barrows eigenem Werk. Der Mangel an einem dem Differentialquotienten entsprechenden allgemeinen Begriff tut sich indes darin kund, daß er teilweise dasjenige, was wir heute schon in seinem Umkehrungssatze selbst liegen sehen, z. B. Sätze, die für polare Koordinaten demjenigen entsprechen, was der angeführte Umkehrungssatz von Kurven aussagt, die in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt sind, als besondere Sätze aufstellen und beweisen muß. Auch derart gebildete, analoge Sätze werden als Verbindungen zwischen zwei Kurven aufgestellt, bei denen die rechtwinklige oder polare Koordinate, die der unabhängigen Variablen entspricht, gemeinsam ist. So werden in

dem unmittelbar folgenden Satz zwei Kurven betrachtet, die, wenn die der gemeinsamen Abscisse x entsprechenden Ordinaten y und v genannt werden, derart verbunden sind, daß $y^2 = \int v\,dx$; dann wird die Subnormale der ersteren $\frac{1}{2}\,v$.

Barrows Umkehrungssatz ermöglicht es, wenn man das Resultat einer Differentiation oder Integration gefunden hat, daraus das Ergebnis der auf das zuerst gefundene Resultat angewendeten umgekehrten Operation zu finden. Zu seiner Zeit kannte man von den genannten Operationen noch am besten die Integration, nämlich in der Gestalt von Quadraturen. Er war deshalb eher veranlaßt, Tangentenbestimmungen aus bekannten Quadraturen herzuleiten als umgekehrt. Wenn er z. B. in einem seiner Sätze für eine beliebige Kurve

$$\int \frac{q}{y^2}\,dx = \frac{x}{y}$$

findet, wo q die Ordinate des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Ordinatenachse, also $y - x\,\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, so wird dieser Satz in Verbindung mit seinem Umkehrungssatz der Angabe gleichkommen, daß $\frac{q}{y^2}$ der Differentialquotient von $\frac{x}{y}$ sei.

Sein Hauptzweck ist es jedoch nicht, seine Methode zur Lösung solcher direkten Tangentenaufgaben anzuwenden, vielmehr, wie er selbst bemerkt, ein Mittel zur Lösung umgekehrter Tangentenaufgaben zu finden. Bei der Anwendung dieses Mittels muß man die Aufgaben wo möglich auf Quadraturen zurückführen. Auf diese Weise löst er eine recht bedeutende Anzahl von Aufgaben, von denen einige unmittelbar als umgekehrte Tangentenaufgaben, andere, z. B. die die Bogenlängen betreffenden, in solchen Gestalten auftreten, welche die moderne Mathematik ebenso als Differentialgleichungen wiedergeben würde. So setzt ihn sein Umkehrungssatz unmittelbar in den Stand, die Kurve, deren Tangente die Bedingung

$$\frac{y}{S_t} = \frac{f(x)}{x - a}$$

erfüllt, durch die Quadratur

$$y = \int_a^x \frac{f(x)}{x - a}\,dx$$

zu finden. Er wendet dieses Verfahren auf den Spezialfall an, in welchem $f(x) = \sqrt{bx - x^2}$, was er als Ordinate eines Kreises darstellt, und $a = 0$ ist. Er findet dann, daß die gesuchte Kurve eine Cykloide ist.

Weder hier noch in den meisten anderen Fällen fällt es Barrow ein,

eine willkürliche Konstante einzuführen, die übrigens in den meisten seiner Aufgaben nur einer Verschiebung des Koordinatensystems und zwar längs der Achse entsprechen würde. Eine Aufgabe bildet jedoch in dieser Beziehung eine Ausnahme, nämlich die Bestimmung einer Kurve, deren Subtangente $S_t = f(x)$, also eine gegebene Funktion von x ist. Sie wird durch die Gleichung

$$\int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \int_c^y \frac{dy}{y}$$

dargestellt, wo das zweite Integral als die von einer gleichseitigen Hyperbel, der Ordinatenachse und den durch $y = c$ und $y = y$ bestimmten Geraden begrenzte Fläche auftritt, und wo c ausdrücklich als eine willkürlich gewählte Größe bezeichnet wird. Die Veranlassung, diese Größe einzuführen, lag indessen wohl zuvörderst darin, daß durch den Wert 0, dessen Wahl am nächsten läge, die Fläche unendlich und somit unbrauchbar würde. Speziell wendet er das Resultat auf den Fall an, in dem die Subtangente konstant ist; die Aufgabe ist dann dieselbe, auf die Descartes die Aufgabe de Beaunes zurückführte (S. 350). Ebenso hat er die logarithmische Spirale ausführlich behandelt und bemerkt hierbei ausdrücklich, daß der den Polarwinkel messende Kreisbogen der Logarithmus des Leitstrahls wird, was in Wallis' Behandlung der Aufgabe (S. 348) nur indirekt ausgedrückt war.

Die Zurückführung auf die Quadratur geschieht in den behandelten Aufgaben durch Trennung der Veränderlichen; erst in einem Anhang bemerkt er den allgemeinen Charakter dieses Verfahrens. Hier bestimmt er die Kurve, deren Tangente die Bedingung

$$\frac{S_t}{y} = \frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

erfüllt, durch die Gleichung

$$\int \varphi(x)\, dx = \int f(y)\, dy$$

und bereut, die Lösung dieser Aufgabe nicht schon früher aufgestellt zu haben, da sie so viele der vorhergehenden unter sich befaßt haben würde. Auf dieselbe Weise findet er die Kurve, die in polaren Koordinaten r und ϑ durch

$$\frac{S_t}{r} = \frac{r \cdot f(r)}{\varphi(\vartheta)}$$

bestimmt ist. Analog bietet er die Bestimmung einer durch $\frac{dx}{ds} = \frac{f(s)}{\varphi(x)}$ bestimmten Kurve, wo s die Bogenlänge ist und der Differentialquotient als das Verhältnis zwischen Subtangente und Tangente (vom Berührungspunkt

bis zur Achse gerechnet) dargestellt wird. Die schwierigste von ihm gelöste Aufgabe findet sich in einem Anhang zur 2. Ausgabe. Sie betrifft die Bestimmung einer Kurve, deren Bogenlänge gleich $f(x) - y$ ist. Wie man sieht, läßt sich auch die ihr entsprechende Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen integrieren.

7. Newtons Verhältnis zu Barrow; seine Anwendung von Barrows Umkehrungssatz.

Barrows an und für sich so interessante Untersuchungen und die darauf beruhenden wichtigen Fortschritte erhielten eine noch höhere Bedeutung dadurch, daß er von 1663 an in Cambridge Newtons Universitätslehrer wurde. Dieser hatte jedoch seine Universitätsstudien schon 2 Jahre vorher begonnen und wurde gewiß bald ebenso Barrows Mitarbeiter wie sein Schüler. Jedenfalls sagt Barrow selbst, daß die Ratschläge Newtons auf die Ausarbeitung seines soeben erwähnten Werkes von Einfluß gewesen seien; er fühlte sich in dem Grade von der Überlegenheit Newtons überzeugt, daß er sich in einem Alter von nur 39 Jahren zu Gunsten seines großen Schülers von der Universitätstätigkeit zurückzog.

Wie großen Einfluß Newton auch auf die Darstellung der Einzelheiten gehabt haben mag, so sind die von uns bereits besprochenen Theorien doch an und für sich als Barrows Eigentum zu betrachten, wenn er sie auch schon früh mit Newton erörtert haben mag. Dies kann man u. a. auch daraus schließen, daß er, während er sonst gedruckte wie ungedruckte Quellen mit großer Loyalität anführt, hier schweigt und nur bei anderen Gelegenheiten, die wir bald besprechen werden, auf seinen Freund und Schüler verweist. Wenn Newton also ähnliche Gedanken vorträgt, darf man daher annehmen, daß dies im Anschluß an Barrow geschehe. Er führt sie aber demnächst selbst viel weiter fort als dieser.

Ein solcher Anschluß fand rücksichtlich der sehr allgemeinen Auffassung des Zusammenhanges zwischen den gleichzeitigen Variationen verschiedener Größen statt. Diese Auffassung erreicht Barrow teils durch kinematische Betrachtungen, teils durch geometrische Darstellung mittelst beliebiger Kurven. Obgleich es, wie wir gesehen haben, die letztere ist, durch die seine Untersuchungen die der damaligen Mathematik entsprechende exakte Form gewinnen, begnügt er sich doch auch in den kinematischen Beweisen nicht mit Entlehnungen von der intuitiven Vorstellung der Bewegung, sondern ist bemüht, diese Vorstellung durch ein begriffliches Studium der Zeit ins klare zu bringen, also durch das Studium der Größe, die sich in der Kinematik den geometrischen oder geometrisch dargestellten Größen anschließt. Das Hauptergebnis dieser Untersuchung ist, daß man nur die

zeitliche Aufeinanderfolge der Erscheinungen oder ihre Gleichzeitigkeit erkennen kann, aber, um die Zeit zu messen, kein anderes Mittel hat, als irgend eine Bewegung als gegeben zu betrachten; dies ist also derselbe Gedanke, den ein moderner Physiker dadurch ausdrückt, daß er, was die Uhr zeigt, als die Zeit festsetzt.

Bei einer so klaren Begrenzung des Zeitbegriffes setzt man sich, wenn man sich in einer Darstellung der Lehre von den variablen Größen der Zeit bedient, nicht leicht der Gefahr aus, dabei der bloßen Vorstellung von der Bewegung unberechtigterweise etwas zu entlehnen, und die Darstellung wird ebenso exakt als die bisher angewendete geometrische. Eine solche Behandlung legt Newton seinen infinitesimalen Untersuchungen zu Grunde. Eine Gesamtdarstellung dieser Untersuchungen findet sich in seiner *Methodus fluxionum*, die zwar erst weit später gedruckt, aber ungefähr zu der Zeit ausgearbeitet wurde, als Barrows Schrift erschien; die nämlichen Betrachtungen liegen im wesentlichen auch schon seinen noch älteren Arbeiten zu Grunde. Newton betrachtet ein System von (n) Größen, *Fluenten*, $x, y, z, \cdots$, die gleichzeitig variieren, indem sie eine solche Anzahl $(n - 1)$ Gleichungen befriedigen, die genügen, um die gleichzeitige Variation zu sichern. Die Zeit ist ihm also nur die unabhängige Variable, von der alle diese Fluenten Funktionen sind. Die Geschwindigkeiten, mit denen diese Größen variieren, nennt er ihre *Fluxionen* und bezeichnet sie durch $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \cdots$. Er weiß sich auch, wo es ihm bequem ist, der soeben erwähnten Freiheit in der Bestimmung der Zeit zu bedienen, um vorauszusetzen, daß eine oder die andere dieser Größen gleichförmig variiere, oder daß ihre Fluxion gleich 1 sei. Daß er in der Regel diese Wahl der unabhängigen Variablen vorläufig dahingestellt sein läßt, gewährt, wie bekannt, oft analytische Vorteile.

Die Einführung der Geschwindigkeit wäre jedoch eine unberechtigte Entlehnung aus der Kinematik gewesen, wenn er nicht genauen Bescheid darüber gegeben hätte, wie die Fluxionen gebildet werden; indem er dies aber tat und so eine von der natürlichen Bewegung unabhängige Begründung dieses Begriffes erhielt, entlehnte er der Kinematik nur eine treffliche allgemeine Bezeichnung für eine Größe, die man zwar auch früher schon zu bilden verstand und deren Anwendung in verschiedenen Untersuchungen (von Tangenten, Maximis und Minimis) man bereits kannte, für die man aber noch keine von allen diesen Anwendungen unabhängige Bezeichnung hatte. *Fluxion* ist somit ein älterer Name für dieselbe Größe, die wir jetzt den Differentialquotienten nennen, nämlich für die Fluente mit Bezug auf die unabhängige Variable, die Zeit.

Auf die Bestimmung dieser Größe und auf die dazu dienenden ein-

fachen und gleichförmigen Regeln legt Newton eben besonderes Gewicht. Sein Interesse für diese Bestimmung tritt — allerdings noch ohne Fluxionsnamen oder -zeichen — schon an der Stelle in Barrows Buch hervor, von der dieser selbst sagt, daß er sie auf Newtons Anregung hin mit aufgenommen habe, und die klare Regeln für die Bestimmung der Tangente einer gegebenen Kurve enthält. Barrow selbst war dagegen der Ansicht, es liege, nachdem so viele Verfahren zu Tangentenbestimmungen aufgekommen seien, kein Grund vor, noch eine neue zu bringen. Er mag dabei besonders an Fermats Tangentenmethode gedacht haben, mit der seine eigene so eng verwandt ist. Namentlich wird der Unterschied in der praktischen Ausführung darin bestehen, daß Fermat nur für den einen Zuwachs, nämlich den der unabhängigen Variablen eine besondere Bezeichnung E, Barrow aber für beide Zuwüchse, nämlich sowohl den der unabhängigen, als den der abhängigen Variablen, die Bezeichnungen e und a einführt. Der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{a}{e}$ zwischen diesen, wenn sie beide bis auf Null schwinden, — also das von Leibniz später $\frac{dy}{dx}$ genannte Verhältnis — ist das auch von Barrow Gesuchte; er setzt es dem Verhältnis zwischen Ordinate und Subtangente gleich. Dies Grenzverhältnis findet man, wenn man aus der Gleichung in a und e, die man aus der Gleichung der Kurve herleiten kann (in der alle Glieder a oder e enthalten müssen), die Glieder tilgt, welche höheren als des ersten Grades sind; Fermat erreichte das Gleiche, indem er erst überall mit e (oder E) dividierte und es sodann gleich Null setzte.

Diese Fortschritte spielten tatsächlich bei solchen einfachen Tangentenbestimmungen, wie denjenigen, die Barrow gleich als Beispiele anführt, keine besonders große Rolle; seine Schüchternheit den Anregungen Newtons gegenüber ist daher nicht unverständlich; wenn man aber wie Newton viel weitergehende Anwendungen der beschriebenen allgemeinen Differentiation vor Augen hatte, ist es verständlich, daß er den ausführlicheren Regeln eine größere Bedeutung beilegt. Ohne kleinliche Furcht, Barrow möge ihm zuvorkommen, obgleich er dieselben Regeln damals schon selbst, wenn auch unter anderen Formen, besaß und in seinen Manuskripten von ihnen weitgehende Anwendungen gemacht hatte, ja, vielleicht aus Neugierde, um zu sehen, wie solche Regeln, die er selbst zu veröffentlichen sich noch scheute, aufgenommen würden, treibt er daher Barrow, wie dieser selbst sagt, an, sie vorzuführen. Daß übrigens die Regeln, wie sie hier vorliegen, Barrows Eigentum sind, geht teils daraus hervor, daß er nicht das Gegenteil sagt, teils aus ihrer formellen Verschiedenheit von denjenigen, die Newton damals benutzt hatte, und von denen wir bald zu reden haben.

Von weitergehenden Differentiationsanwendungen geben schon Barrows

Lectiones einige Beispiele, wiederum aber nur in einem Abschnitt, der wie die soeben erwähnten Differentiationsregeln nur als Anhang auftritt, und indem er erklärt, Newton habe ihm dazu geraten. Im Anhang zur 12. Lektion beweist er eine Reihe von Quadraturen, von denen wir beispielsweise eine anführen, die sich in unserer mathematischen Sprache, wenn wir die Kreiskoordinaten mit trigonometrischen Bezeichnungen vertauschen und die Reduktion auf eine hyperbolische Fläche durch *log* (den natürlichen Logarithmus) bezeichnen, als

$$\tfrac{1}{2}\left[\log(1+\sin\varphi)-\log(1-\sin\varphi)\right]=\int_0^{\varphi}\sec^2\varphi\, d\sin\varphi=\int_0^{\varphi}\sec\varphi\, d\varphi$$

schreiben läßt.

Der prinzipielle Fortschritt, der auf der Herleitung dieses und mehrerer ähnlichen Resultate beruht, ist eine Fermat noch unbekannte (S. 269) Anwendung der Operationen, die bei Tangentenbestimmungen oder Differentiationen gebraucht werden, zu Umformungen von Quadraturen. So wird das infinitesimale Dreieck zu solchen Umformungen angewendet, die wir durch $d\sin\varphi=\cos\varphi d\varphi$ oder $d\cos\varphi=(-)\sin\varphi d\varphi$ bezeichnen würden. Indessen müssen wir hier daran erinnern, daß auch Pascal es in seinen Quadraturen besonders verstanden hatte, ebendieselbe infinitesimale Umformung zu benutzen (S. 276), jedoch ohne sie mit den Regeln für Tangentenbestimmungen in Verbindung zu bringen. Die besonders hervorgehobene Quadratur enthält ferner das erste uns bekannte Beispiel von der Zerlegung eines Bruches

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+\sin\varphi}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\sin\varphi}$$

zur Umformung einer Quadratur.

Die durchgreifende Bedeutung, welche sorgfältig entwickelte Differentiationsregeln in Newtons eigenen Arbeiten erhielten, beruht indes vor allem auf der ganz neuen Anwendung, die er zuerst von dem von Barrow formulierten Gegensatz zwischen Differentiation und Integration machte. Barrow sah darin nur ein Mittel, um umgekehrte Tangentenaufgaben durch die damals bekanntere Quadratur zu lösen. Für Newton dagegen ist die Differentiation die einfache Operation, die sich im allgemeinen nach bestimmten Regeln ausführen läßt, und die so gewonnenen Resultate ergeben sogleich eine große Reihe von Quadraturen, die sowohl die bereits bekannten, als eine Menge neue befaßt.

Dies hat Newton schon mit Bestimmtheit zu Ende seiner *Analysis per aequationes infinitas* hervorgehoben, die, seit 1669 bei Collins deponiert, gewissermaßen der Öffentlichkeit zugänglich war. Hier lernen wir auch

die von der Barrowschen etwas abweichende Form kennen, unter der er seine Differentiation ausführt, die er diesmal auf die Fläche z anwendet, die von einer Kurve durch den Anfangspunkt nebst der Abscisse x und der Ordinate y eines Punktes auf ihr begrenzt wird: Er vertauscht gleichzeitig x und z mit $x + o$ und $z + ov$; dann wird der gesuchte Wert von y der Wert von v sein, der dem Falle $o = 0$ entspricht. Dies ist, wie man sieht, genau dasselbe, wie wenn man sagt: $y = \frac{dz}{dx}$ oder, wie Newton es damals schon selbst in seinen eigenen persönlichen Untersuchungen ausdrückte: y ist das Verhältnis zwischen den Fluxionen von z und x. Dies hatte er auch damals schon angefangen, durch $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ oder, wenn man x sich gleichförmig ändern (d. h. unabhängige Variable sein) läßt, durch $\dot{z}$ zu bezeichnen, indem dann $\dot{x} = 1$ ist. Diese Fluxionsbezeichnungen würden freilich uns, die wir die Differentialrechnung kennen, den Überblick erleichtern; damals aber würde ihre Erläuterung die Darstellung weitläufiger gemacht haben, woraus man sich erklären kann, daß sie in der nur als Anhang zu der erwähnten Schrift auftretenden Abhandlung nicht mit herangezogen sind. Dieselbe Differentiationsform, die hier auf eine Flächenbestimmung abzielt, wendet Newton in der *Methodus fluxionum* zu Tangentenbestimmungen an. Letztere fallen, abgesehen davon, daß die Zeichen a und e für die Zuwüchse von x und y mit o und ov vertauscht sind und der Grenzwert von v durch $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ bezeichnet wird, mit denen Barrows zusammen.

Wir haben übrigens zu bemerken, daß auch Gregory in seiner 1668 erschienenen *Geometriae pars universalis* dieselbe Form der Differentiation und dasselbe Zeichen o für die Größe anwendet, die im Grenzfalle bis auf 0 schwinden soll. Dies verrät eine Verbindung mit Newton, die gewiß durch Collins vermittelt wurde; übrigens scheint Gregory in der Auffassung der Verbindung zwischen den beiden infinitesimalen Grundoperationen mit Barrow ungefähr auf derselben Höhe gestanden zu haben.

Newton wendet am angeführten Orte die Differentiation namentlich auf den Flächeninhalt $z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$ an und findet dadurch einen neuen Beweis dafür, daß dieser Flächeninhalt der Parabel $y = a x^{\frac{m}{n}}$ zugehört; er hebt aber zugleich hervor, daß die Methode es ihm ermöglicht, beliebig viele Kurven mit bekanntem Flächeninhalt zu finden. Er führt als Beispiel an, daß $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ das Resultat $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ergebe, wodurch er zugleich zeigt, daß ihm schon zu damaliger Zeit die Differentiation von Wurzelgrößen völlig bekannt war.

In wie großem Umfang Newton es verstand, seine neue Quadraturmethode anzuwenden, die darauf beruht, daß diese Operation die Umkehrung der Differentiation ist, — geht u. a. aus den vielen Resultaten hervor, die er 1676 Leibniz brieflich mitteilen konnte, und zeigt sich in reichem Maße in seiner Schrift *De quadratura curvarum*, die zwar erst 1704 erschien, deren Redaktion nach einer noch älteren Arbeit aber, von einigen späteren Zusätzen abgesehen, schon 1676 stattfand. Seine Methode wurde jedoch mit einer anderen kombiniert, die bei Kurven erforderlich war, deren durch die Abscissen ausgedrückte Ordinaten nicht durch Differentiation bekannter Ausdrücke entstanden sind oder dies nicht sofort zu erkennen geben. Die andere Methode bestand in einer Entwickelung in unendliche Reihen und ihrer gliedweisen Integration. Mit Newtons gründlicher Behandlung dieses Problems müssen wir uns daher beschäftigen, bevor wir über die Resultate seiner Quadraturen berichten können.

8. Newtons Reihenentwickelungen; erweiterter Gebrauch der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Newton teilt selbst in seinen Briefen an Leibniz mit, wie er auf den Gebrauch von Reihen und namentlich auf die Aufstellung seiner auch für gebrochene und negative Exponenten geltenden Binomialformel gekommen sei. Hierbei ist noch zu bemerken, daß er der erste ist, der auch solche als Exponenten schreibt (vgl. Wallis S. 282) und mit einem einzelnen Buchstaben bezeichnet, der also sowohl eine negative wie eine positive Größe darstellen kann. Diese Darstellung von Größen, die auch negativ sein können, hatte jedoch schon Hudde in anderen Fällen benutzt (S. 206).

Die Erweiterung der Binomialformel geschieht im Anschluß an Wallis' sogenannte Interpolation, die er namentlich bei seiner Berechnung von π angewendet hatte (S. 282). Wie Wallis strebte Newton zunächst nur nach einer solchen Erweiterung der durch gewisse bekannte Quadraturen erhaltenen Ausdrücke, die sie auch auf neue unbestimmte Quadraturen anwendbar machen würde. So kann man leicht $\int (1 - x^2)^{\frac{p}{2}} dx$ bilden, wenn p eine gerade Zahl ist. Dies Integral wird durch eine endliche Potenzreihe dargestellt; überträgt man aber das Gesetz von der Herstellung der Glieder dieser Reihe auf ungerade Werte von p, so erhält man eine unendliche Reihe, von der man annehmen darf, daß sie in diesem Falle das Integral darstelle. Bei seinem Streben, für alle Exponenten gültige Resultate zu erreichen, mußte Newton jedoch bald einsehen, daß er das einfachste Gesetz für die Herstellung der Reihenglieder erhalte, wenn er nicht unmittelbar die Reihe suche, die das Integral, sondern diejenige, welche die zu integrierende Funktion darstellen soll. Er

wurde dadurch veranlaßt, teils, wie vor ihm schon Fermat und Pascal (S. 167—8), die multiplikative Bildung der Koeffizienten der Reihe zu bemerken, die für ganze und positive Werte von m die Größe $(1 + x)^m$ darstellt, teils auch zu erkennen, daß sie sich auch anwenden lasse, wenn der Exponent m gebrochen oder negativ ist; dies führte zur Aufstellung der allgemeinen Binomialformel.

Mit bloßen Induktionen solcher Art hatte Wallis vorliebgenommen; dazu war aber Newton ein viel zu treuer Anhänger der vom Altertum ererbten strengen Gesetze der exakten Mathematik. Zwar waren die vorliegenden algebraischen Hilfsmittel nicht so entwickelt, daß er mittelst ihrer die formelle Aufstellung eines allgemeinen Beweises des allgemeinen Satzes hätte durchführen können; dieser Beweis hätte dann auch die Angabe der Grenzen enthalten müssen, innerhalb derer die für die Gültigkeit des Satzes notwendige Konvergenz wirklich vorliegt. Dies hat erst im 19. Jahrhundert Abel zu stande gebracht, der damit einen der wichtigsten Brüche mit dem unexakten Gebrauch unendlicher Reihen vollzog, der im 18. Jahrhundert herrschte. Newton, der es ja in diesem Punkt genauer nahm, als man es später tat, mußte sich damit begnügen, Methoden anzugeben, durch welche sich die Gültigkeit der Reihe in den einzelnen vorliegenden Fällen untersuchen läßt. Dies ließ sich erstens dadurch bewerkstelligen, daß man die Reihen, welche eine Wurzel darstellen sollten, potenzierte und so die Wurzelausziehung prüfte. Außerdem aber leitete er noch eine Methode her, die sich direkt zur Reihenentwickelung einer Wurzel anwenden läßt. Diese Methode, die teils die allmähliche Bildung der Reihenglieder, teils die Mittel zur Prüfung der Konvergenz befaßt, ergab sich indes nicht nur als anwendbar auf Reihen, die in der Binomialformel enthalten sind, sondern überhaupt auf Reihen, die dazu dienen, eine Wurzel y einer algebraischen Gleichung durch eine unabhängige Variable auszudrücken, die in ihren Koeffizienten enthalten ist.

Was nun erstens die allmähliche Bildung der Koeffizienten der Reihe betrifft, so bediente sich Newton dazu der Methode der unbestimmten Koeffizienten in viel weitergehender Weise als Descartes, der in seiner Geometrie gewisse Größen durch Identifizierung endlicher Ausdrücke bestimmt hatte (siehe S. 326). Ist $f(x, y) = 0$ die in ganze rationale Form gebrachte vorgelegte Gleichung (mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern), so setzt Newton erst $y = Ax^\alpha + p$, wo zunächst α derart bestimmt wird, daß wenigstens zwei Glieder desselben niedrigeren Grades sind als die übrigen, dann aber A derart, daß diese Glieder zusammengefaßt identisch verschwinden. Dann wird $p = Bx^\beta + q$ gesetzt, wo β und B auf dieselbe Weise bestimmt werden, und so kann man beliebig weit fortfahren.

Obgleich Newton, der für Untersuchungen dieser Art noch keine Vorarbeiten zur Verfügung hatte, sein Augenmerk vorzugsweise auf einfache Fälle richten mußte, in denen die Exponenten α, β u. s. w. sich leicht bestimmen lassen, ja, gewöhnlich die successiven oder alternierenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bilden, fand er sich doch schon veranlaßt, die graphische Methode aufzustellen, die wir als Newtons Parallelogramm bezeichnen, und die namentlich zur Unterscheidung der verschiedenen Reihen dienen kann, welche die verschiedenen Zweige (Cykel, wie man sie jetzt oft nennt) der durch $f(x, y) = 0$ bestimmten Kurve darstellen. Sie findet sich sowohl in seinem 2. Brief an Leibniz (1776), als in der *Methodus fluxionum.* Man nimmt bei der Bestimmung eines Exponenten (α) in der Reihe die Exponenten (m und n) von y und x in jedem einzelnen Glied der Gleichung $f(x, y) = 0$ als Abscisse und Ordinate eines Punktes in einem rechtwinkligen Koordinatensystem an und legt eine Gerade durch zwei oder mehr der dadurch bestimmten Punkte, so daß alle anderen auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes liegen. Dann wird in einer der möglichen Reihen α der Richtungskoeffizient dieser Geraden mit entgegengesetztem Vorzeichen sein; denn für die Punkte, durch die sie geht, hat $\alpha m + n$ einen und denselben Wert und zwar einen kleineren Wert, als die Einsetzung der Koordinaten der anderen Punkte ergeben würde.

Newton sah zugleich ein, daß seine Methode nicht nur anwendbar sei, wenn eine algebraische Gleichung zwischen x und y statthat, sondern auch dann, wenn x schon durch eine unendliche Reihe ausgedrückt ist, die nach steigenden Potenzen von y entwickelt ist, daß sie also zur sogenannten Umkehrung einer solchen Reihe dienen kann. Bei der praktischen Ausführung konnte es auch seiner Aufmerksamkeit nicht entgehen, daß in diesen Fällen die Rechnung dadurch erleichtert wird, daß Glieder höheren Grades in x und Glieder, die sowohl x als y enthalten, fehlen. Dieser Umstand wird, je nachdem die Rechnung vorwärts schreitet, die gleichzeitige Bestimmung von immer mehr Gliedern ermöglichen.

So kann Newton in seiner *Analysis per aequationes infinitas* durch Umkehrung der (logarithmischen) Reihe (S. 314)

$$z = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots,$$

nachdem er erst

$$x = z + \tfrac{1}{2}z^2 + q$$

gefunden hat, auf einmal 3 Glieder in q bestimmen. Dies geschieht, indem er in der durch Einsetzung entstandenen Gleichung

$$-\tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{8}z^4 - \tfrac{1}{20}z^5 + \cdots + (1 - z + \tfrac{1}{2}z^2 - \cdots)\,q + \cdots = 0$$

nicht mit den zwei Gliedern

$$-\tfrac{1}{6}z^3 + q = 0$$

vorliebnimmt, die seiner gewöhnlichen Regel nach das nächste Glied in der Reihe ergeben würden. Er erkennt dagegen, daß alle die Glieder, die wir aufgeschrieben haben, niedrigeren Grades als alle übrigen werden, indem die Glieder von q alle 3. oder höheren Grades, alle fehlenden Glieder der Gleichung also 6. oder höheren Grades werden. Bei der Division

$$q = \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5 \cdots}{1 - z + \frac{1}{2}z^2 \cdots}$$

darf man also im ganzen 3 Glieder des Quotienten mitnehmen, indem ihre Bestimmung von den Gliedern der Gleichung, die z^6, qz^3, q^2, $\cdots$ enthalten, vollkommen unabhängig wird. Man findet dann

$$q = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + r,$$

wo r wenigstens 6. Grades ist. Newton gebraucht jedoch diesen Kunstgriff nicht mit voller Konsequenz; er hätte nämlich schon, als er $x = z + p$ setzte, auf diese Weise 2 Glieder von p, nämlich $p = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, und dann 4 Glieder von q auf einmal finden können.

Wie Newton bemerkt und an einem Beispiel dartut, läßt sich ein ganz entsprechendes Verfahren zur Entwickelung nach fallenden Potenzen anwenden. Dann werden die Glieder, die keinen negativen Exponenten haben, wenn die Variablen (x und y) zu laufenden Koordinaten einer Kurve gemacht werden, eine Asymptotenkurve oder, wenn sie höchstens 1. Grades sind, eine geradlinige Asymptote bestimmen. Bei der Integration (Quadrierung) einer solchen Reihe wird ausdrücklich hervorgehoben, daß das Glied $\frac{ma^2}{x}$ ein hyperbolisches Flächenstück ergibt, das Newton als $\boxed{\frac{ma^2}{x}}$ darstellt; daß ein solches Flächenstück ein logarithmisches Glied der Reihe darstellt, war wohl bekannt.

Wenn die Reihe, die durch die hier angegebene allmähliche Bildung von Gliedern entsteht, irgendwie eine Bedeutung haben soll, muß sie notwendigerweise konvergent sein. Newton kann zwar hierfür keine allgemeine Regel aufstellen; er sieht aber die Notwendigkeit ein und gibt zu erkennen, wie man in den einzelnen vorliegenden Fällen, indem man x hinlänglich kleine Werte beilegt, erreichen kann, daß das Restglied, $p, q, r, \cdots$, das nach und nach durch Gleichungen bestimmt wird, unter jede vorgegebene Grenze hinabsinkt. Er weist nämlich darauf hin, daß in der Gleichung, die zur Bestimmung einer dieser Größen, z. B. r, dient, das von r unabhängige Glied stets eine höhere Potenz von x als Faktor enthalte. Auf diese Weise kann er sich allerdings eine solche Bestimmung von x sichern, daß die Benutzung einer gewissen endlichen Anzahl von Gliedern das Restglied unter jegliche im voraus gegebene Grenze bringt. Damit

dies aber durch eine Vermehrung der Gliederzahl ins Unendliche erreicht werden kann, ohne daß sich x gleichzeitig mit der vorgegebenen Grenze dem Grenzwert 0 zu nähern braucht, muß man nicht nur wie Newton eine Regel für die allmähliche Bildung der Glieder, sondern auch eine darauf gegründete allgemeine Bestimmung des Restes besitzen, der auf ein beliebiges Glied folgt. Solche Bestimmungen aber vermißte man eben.

Es bestanden somit zwar technische Schwierigkeiten, die Newton an einer allgemeinen Aufstellung der notwendigen Konvergenzbedingungen hinderten; man sieht aber, daß sie bei ihm nicht unberücksichtigt bleiben wie im folgenden Jahrhundert. Sein Ausgangspunkt ist wie in den antiken Untersuchungen die von Euklid X, 1 (S. 302) aufgestellte Forderung; er sucht also noch auf den neuen, ausgedehnten Gebieten, die er betritt, an der antiken Exaktheit festzuhalten.

Newtons unendliche Reihen sind zwar zunächst als Mittel zu Quadraturen gebildet, indem die zu integrierende Größe durch sie eine integrierbare Form erhält; er erreicht aber zugleich etwas anderes. Die Abhängigkeit zwischen zwei variabeln Größen war bisher als die Abhängigkeit zwischen der Abscisse und der Ordinate einer Kurve mit bekannten Eigenschaften dargestellt worden. Dies war der Fall, seitdem Menächmus die gegenseitigen Abhängigkeiten der beiden mittleren Proportionalen durch Parabeln und Hyperbeln dargestellt hatte. Der Zusammenhang dieser antiken Darstellung mit solchen Darstellungen, die man jetzt durch die auf der Arithmetik beruhende Algebra auszudrücken begonnen hatte, trat durch Descartes' analytische Geometrie klar und deutlich hervor. Sogar solche Funktionen, die durch eine Integration entstehen, wußte man durch Flächeninhalte darzustellen, z. B. — wie wir soeben gesehen — Logarithmen durch hyperbolische Flächenstücke und Kreisfunktionen durch Kreisflächenstücke. Zwar gewährte die Trigonometrie eine ausdrückliche Darstellung der zu den letztgenannten gehörigen umgekehrten Funktionen; einen allgemeinen Begriff der zu einer logarithmischen gehörigen umgekehrten Funktion vermißte man aber noch ganz.

Ohne ausdrücklich den Begriff einer Funktion aufzustellen, half Newton im wesentlichen diesen Mängeln tatsächlich ab, indem er in seinen unendlichen Reihen eine explicite arithmetisch-algebraische Darstellung aller solcher Funktionen wie der hier erwähnten gab. Die eine algebraische Funktion darstellende Reihe wurde aus der sie bestimmenden algebraischen Gleichung hergeleitet; Reihen für circulare und logarithmische Funktionen werden hieraus durch Quadratur, und nachher Reihen für trigonometrische und exponentielle Funktionen durch Umkehrung dieser Reihen hergeleitet.

Wir werden im nächsten Abschnitt einige der so gewonnenen Resultate

erwähnen; hier haben wir nur noch Folgendes zu bemerken. Hauptzweck der Reihen war die auf sie begründete numerische Berechnung, deren Genauigkeitsgrad durch die soeben besprochenen Konvergenzuntersuchungen sicher gestellt war. Das zur Reihenentwickelung angewendete Verfahren kann indessen auch direkt zur numerischen Berechnung einer Wurzel y der Zahlengleichung $f(y) = 0$ angewendet werden. Wenn man durch Versuche einen Näherungswert b gefunden hat, setzt man $y = b + p$ ein und bestimmt aus der Gleichung, die man durch Wegwerfung aller Potenzen von p erhält, deren Exponent größer als 1 ist, einen genaueren Näherungswert von p. Wird der so gefundene genauere Wert von y als c bezeichnet, so setzt man $y = c + q$, und auf diese Weise erhält man allmählich eine immer größere Genauigkeit. Dies Verfahren, das gewöhnlich das Newtonsche genannt wird, war übrigens früher schon von mehreren Forschern sogar in sehr systematischer Weise (so namentlich von Vieta, siehe S. 125) angewendet worden. In Newtons *Analysis per aequationes infinitas* geht es der Entwickelung solcher Reihen voraus, mittelst deren er die Wurzel einer Gleichung durch eine in ihren Koeffizienten enthaltene unabhängige Variable ausdrückt.

9. Ergebnisse der Reihenentwickelung und der Integrationen Newtons.

Wenn wir nun einige der wichtigsten Ergebnisse hervorheben wollen, zu denen Newton es mit den hier beschriebenen Methoden brachte, so haben wir zwischen denjenigen, die mittelst der bei Collins hinterlegten *Analysis per aequationes infinitas* und der durch Oldenburg an Leibniz geschickten Briefe früh zu einer allgemeineren Kenntnis gelangten, und denjenigen zu sondern, die erst im nächsten Jahrhundert in der *Quadratura curvarum* veröffentlicht wurden. Der Zusammenhang zwischen beiden Klassen, von denen letztere einen etwas allgemeineren Charakter hat, verrät übrigens, daß er diese im wesentlichen ebenso früh gewonnen hat wie jene.

In der *Analysis* findet sich nicht nur die zuerst von Mercator (S. 314) veröffentlichte Reihe für ein hyperbolisches Flächenstück $z = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$, nämlich

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

sondern auch ihre Umkehrung

$$x = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4 + \tfrac{1}{120}z^5 + \cdots.$$

Newton bemerkt ausdrücklich das Gesetz von der Bildung der Koeffizienten. Da es nun zugleich bekannt war, daß die genannte Fläche dem Logarithmus von $1 + x$ proportional ist, so ist $1 + x$ dasselbe, wie unser e^z, und Newton hat diese Funktion also durch die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

dargestellt.

Da er nicht näher begründet, daß sich diese Bildung der Glieder bei der weiteren Entwickelung der Reihe fortsetzt, so scheint er dies Resultat nur durch Induktion gewonnen zu haben. Doch mag mit seiner Kenntnis des Kunstgriffes, durch den er auf einmal mehrere Glieder dieser Reihe bestimmte (S. 364), ein etwas weitergehendes Verständnis dafür verbunden gewesen sein, daß die Glieder eben dem hier angegebenen Gesetze gemäß gebildet werden mußten. Er hat jedenfalls kaum unterlassen, das Gesetz an mehreren Gliedern zu versuchen. Von einem Beweise, daß die gefundene Reihe für alle Werte von z gelte, ist keine Rede.

Eine andere Darstellung hyperbolischer Flächen gewinnt er, indem er eine Reihe für $\int_0^x \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ entwickelt. Ähnlich erhält er Reihenentwickelungen für die Kreisflächenstücke $\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ und $\int_0^x \sqrt{x\,(1 - x)}\, dx$.

Unmittelbarer anzuwenden als diese sind die Reihenentwickelungen für Längen von Kreisbogen. So drückt er eine Bogenlänge s eines Kreises mit dem Durchmesser 1 durch seine Projektion x auf den Durchmesser nach einem Endpunkt aus (also $x = \frac{1}{2}$ sin vers $2s$) und findet dann

$$s = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{3}{40}x^2 + \tfrac{5}{112}x^3 + \tfrac{33}{1152}x^4 + \tfrac{63}{2816}x^5 + \cdots\right).$$

Ebenso findet er für die Länge z eines Bogens, dessen Sinus (in einem Kreise mit dem Halbmesser 1) x ist (also $z = \arcsin x$), die Reihe

$$z = x + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots$$

und durch Umkehrung

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots.$$

Hieraus leitet er wiederum

$$\cos z = \sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

her. Auch in diesen Resultaten gibt Newton ausdrücklich die Bildungsweise der Koeffizienten an.

Er teilt noch mit, wie man eine Reihe für $\int_0^x \frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}}\, dx$ bilden kann, durch welche Quadratur, wie er sagt, die Länge eines Ellipsenbogens dargestellt werde. Ferner findet er Reihenentwickelungen für Flächen, welche

von einem Bogen einer Cykloide oder einer Quadratrix und einer Geraden begrenzt werden, und verweist dabei ausdrücklich auf die allgemeine Erweiterung der Analyse, die durch seine Reihen gewonnen wird, und die wir bereits besprochen haben (S. 366).

Weitere Aufschlüsse finden sich in den durch Oldenburg vermittelten Briefen an Leibniz. Der erste von ihnen ist eine Antwort auf eine Anfrage von Leibniz, welche die Reihen betrifft, die Newton, wie er gehört habe, besitze. Newton gibt einen im ganzen recht ausführlichen Bescheid hierüber. Zwar stellt er die Binomialformel ohne jede Begründung auf, gibt aber deutliche Beispiele von solchen Anwendungen, bei denen der Exponent gebrochen oder negativ ist. Seine eigene Begründung ist ja übrigens in seiner Entwickelung von Reihen für Größen mit einbegriffen, die durch algebraische Gleichungen bestimmt werden, und diese wie auch die entsprechende Auflösung numerischer Gleichungen zeigt er je an einem Beispiel. Demnächst gibt er Aufschluß über mehrere seiner Resultate, wie über die Reihen für arc sin x und sin x, eine Reihenentwickelung, durch die Keplers Aufgabe gelöst wird, u. s. w.

Er fügt noch mehrere Aufschlüsse über die Anwendung der Reihen hinzu. Indem erst $x = \text{arc sin } z$ entwickelt und dann in die Reihenentwickelung für sin nx eingesetzt wird, wird dieser Sinus durch sin x oder, wie Newton hier sagt, die Sehne von nx durch die Sehne von x ausgedrückt. Er bemerkt, daß die dadurch gebildete Reihe für ungerade n von selbst aufhört und den bereits bekannten Ausdruck für die Sehne eines n-fachen Bogens ergibt.

Wenn man aus den Ausdrücken für sin z und sin $\frac{1}{2} z$ das Glied 3. Grades eliminiert, erhält man, von Gliedern 5. Grades abgesehen,

$$8 \sin \tfrac{1}{2} z - \sin z = 3 z,$$

was mit der von Huygens benutzten Annäherungsformel (siehe S. 307) übereinstimmt. Newton leitet ferner andere noch genauere Annäherungen aus der Reihe für arc sin vers x her.

In seinem Briefe läßt er sich zugleich etwas näher auf die numerische Bildung der Glieder der Reihe für die Länge eines Ellipsenbogens ein und zeigt, wie man durch Umkehrung die Reihe für die durch den Ellipsenbogen ausgedrückte Abscisse der Ellipse, also, mit modernem Ausdruck, die Reihe für eine gewisse elliptische Funktion bilden kann. Er erwähnt noch, daß dieselben Aufgaben für die Hyperbel gelöst werden können.

Leibniz bezeugte sein Interesse und sein Verständnis für diesen Brief, indem er gerade nach dem fragte, was man vermißte, nämlich nach der Begründung der Binomialformel und nach einer etwas ausführlicheren Er-

klärung des Verfahrens, das bei Reihenentwickelungen algebraischer Funktionen und namentlich bei Umkehrungen angewendet werden soll. Letzteres hatte er sich jedoch schon auf eigene Faust so zu eigen gemacht, daß er selbst es zu einem Ergebnis bringen konnte, das Newton zwar in der *Analysis*, aber nicht in dem Briefe aufgestellt hatte, nämlich zur Reihenentwickelung für e^x. Außerdem teilt er seine eigene, früher von Gregory (S. 306) gefundene Reihe für arc tg x und ihre Anwendung zur Berechnung von π mit, indem

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

Dies Interesse fand bei Newton Anklang und reizte ihn zu ferneren Mitteilungen. Leibnizens Fragen beantwortet er in seinem zweiten Briefe, der in Verbindung mit der *Analysis*, die Leibniz unterdessen kennen gelernt hatte, die von uns im vorigen Abschnitt besprochenen Aufschlüsse enthält, darunter auch, wie er auf die Binomialformel gekommen sei. Über die beiden Reihen für e^x und e^{-x}, die Leibniz je für sich gefunden hatte, teilt Newton hier ausdrücklich mit, wie er sie in eine und dieselbe Reihe vereinige, indem er x mit Vorzeichen nehme. Hinsichtlich Leibnizens Reihe für $\frac{\pi}{4}$ hob er hervor, daß 1000 Jahre vonnöten wären, um mit ihr 20 Decimalen zu berechnen, ein Zeugnis für den praktischen Zweck, der von ihm mit Reihenentwickelungen verfolgt wurde und ihn dazu veranlaßte, nicht nur eine Konvergenz, sondern eine starke Konvergenz zu fordern. Eben dadurch wurde die abstrakte Konvergenzfrage von weniger Interesse.

Zugleich benutzte er die Gelegenheit zu neuen, interessanten Mitteilungen namentlich über Quadraturen. Von diesen sind besonders die bekannten Regeln für die Integrierbarkeit eines binomischen Differentials hervorzuheben. Er sagt, daß die Kurve

$$y = az^{\vartheta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$$

in endlicher Form quadriert werden kann, wenn $\frac{\vartheta + 1}{\eta} = r$ eine ganze und positive Zahl ist; an eins seiner Beispiele hierfür fügt er die Transformation der genannten Gleichung in

$$y = az^{\vartheta + \lambda\eta}(ez^{-\eta} + f)^{\lambda},$$

woraus hervorgeht, daß die Integration auch ausführbar ist, wenn $\frac{\vartheta + 1}{\eta} + \lambda = r$ eine ganze und positive Zahl ist, und er offenbart seinen allgemeinen Überblick über die Frage, indem er hinzufügt, daß diese Fälle, soviel er sehen könne, die einzigen seien.

Die Beschränkung, r solle positiv sein, rührt davon her, daß Newton hier eine algebraische Integration fordert. Dabei übersieht er

jedoch nicht die Möglichkeit einer Integration in anderen Formen; er bezeichnet nämlich die Zurückführung auf logarithmische und circulare Integrale als eine Zurückführung auf Quadraturen von Kegelschnitten und gibt hierzu ein Beispiel.

Schließlich verweist er in seinem Briefe auf die näherungsweise Quadratur, die man erhalten kann, wenn man statt der zu quadrierenden Kurven einfachere nimmt. Auf diese Anwendung auf näherungsweise Quadraturen zielt er mit seiner anderswo mitgeteilten Interpolationsformel ab (S. 230).

Die an Leibniz mitgeteilten Quadraturen sind nur Beispiele aus der großen Menge, die Newton damals bereits besaß, und die schon seit 1666 sogar eine Zusammenstellung von einfachen Quadraturen in sich befaßte, auf die es zweckmäßig sein könnte, andere zurückzuführen. Ein anderes Beispiel, wie weit er es gebracht hatte, findet sich in einer gleichzeitigen Mitteilung an Collins, daß er, wenn eine Kurve durch eine trinomische Gleichung

$$ax^\lambda + bx^\mu y^\delta + cy^\tau = 0$$

dargestellt sei, in weniger als einer halben Viertelstunde sagen könne, ob sie (algebraisch) quadrierbar sei, im entgegengesetzten Falle aber die einfachste Figur, mit der sie sich vergleichen lasse, d. h. die einfachsten Integrale angeben könne, auf die sich ihre Quadratur zurückführen lasse.

Wie allgemein veranlagt die Theorie tatsächlich war, die allen diesen Resultaten zu Grunde liegt, ging aus seinem Werke *De quadratura curvarum* hervor, das 1704 erschien. Sie zielt auf nichts Geringeres ab, als Merkmale dafür aufzufinden, ob das Integral eines beliebigen algebraischen Differentials — wie wir mit Leibniz sagen wollen — algebraisch ausgedrückt werden kann, andernfalls aber die Anzahl einfacherer Integrale zu bestimmen, auf welche die allgemeinere Form, zu der es gehört, zurückgeführt werden kann. Bei algebraischen Funktionen darf man hier jedoch vorläufig nur an solche denken, deren Irrationalität (von gebrochenen Exponenten in den Potenzen z^η abgesehen) sich ohne Wurzelzeichen unter den Wurzelzeichen ausdrücken lassen.

Eine solche Funktion — $f(z)$ wollen wir sie nennen — kann gewöhnlich in die Form $Qz^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}$ oder doch wenigstens in die Form $Qz^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ umgeschrieben werden, wo Q, R und S Polynome in z^η sind, während die durch griechische Buchstaben bezeichneten Exponenten sowohl negativ als gebrochen sein können.

Soll $u = F(z)$ durch Quadratur aus $y = f(z)$ entstehen, so muß ihrerseits $F(z)$ die Form $Gz^\vartheta R^\lambda$ oder $Gz^\vartheta R^\lambda S^\mu$ haben, wo auch G ein Polynom in z^η ist. Newton sucht erst diejenigen Koeffizienten der Polynome Q der erstgenannten Formen zu bestimmen, die, wenn die Polynome R und S

gegeben sind, durch Differentiation aus den Ausdrücken $z^\vartheta R^\lambda$ oder $z^\vartheta R^\lambda S^\mu$ entstehen, welche Formen die einzelnen Glieder von $F(z)$ annehmen müssen. Mittelst der so gefundenen Ausdrücke für die Koeffizienten von Q kann er umgekehrt, wenn $f(z)$ gegeben ist, allmählich die Koeffizienten des Polynoms G in $F(z)$ bestimmen.

Gewöhnlich wird diese Bestimmung keinen Abschluß finden, sondern zu einer unendlichen Reihe für G führen. Eine endliche Integration des vorliegenden algebraischen Differentials erhält man nur, wenn diese Reihenentwickelung von selbst aufhört. Die Bedingungen hierfür werden dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine endliche algebraische Integration. Auf diese Weise müssen die Leibniz mitgeteilten Resultate über Integration algebraischer Differentiale gefunden worden sein. In seiner Schrift wendet Newton selbst seine Methode zur Ausführung folgender Integrationen an:

$$\int \frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4}\, dz = \frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}$$

und

$$\int \frac{3q^4 - q^3x + 9q^2x^2 - qx^3 - 6x^4}{(q^2 - x^2)(q^3 + q^2x - qx^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}}\, dx = \frac{3q^2x + 3x^3}{(q^3 + q^2x - qx^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Falls die Integration nicht in endlicher Form durchführbar ist, geschieht die Zurückführung auf gewisse einfachere Formen durch Aufstellung einer linearen Relation zwischen $\int z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}\, dz$, $\int z^{\vartheta+\eta-1} R^{\lambda-1}\, dz$, $\int z^{\vartheta+2\eta-1} R^{\lambda-1}\, dz$, $\cdots$ und entsprechender Relationen zwischen Integralen von der Form $\int z^\vartheta R^{\lambda-1} S^{\mu-1}\, dz$. Sie werden aus den Ausdrücken für die Differentiale von $z^\vartheta R^\lambda$ und $z^\vartheta R^\lambda S^\mu$ hergeleitet. Newton zeigt dann, daß Integrale von der Form

$$\int z^{\vartheta+\delta\eta} R^{\lambda+\tau}\, dz \text{ und } \int z^{\vartheta+\delta\eta} R^{\lambda+\tau} S^{\mu+\nu}\, dx,$$

wo δ, τ und ν beliebige ganze Zahlen, die übrigen aber gegebene Konstanten sind, durch algebraische Funktionen und eine gewisse Anzahl m von einfacheren Integralen derselben Form ausgedrückt werden können. m ist dann bezw. um 1 kleiner als die Anzahl der Glieder in R oder um 2 kleiner als die gesamte Anzahl der Glieder in R und S.

Man sieht, daß Newton zur Herleitung seiner Reduktionsformeln nicht, wie es jetzt gewöhnlich der Fall ist, die teilweise Integration, sondern nur algebraische Beziehungen zwischen den entsprechenden Differentialen benutzt; in der summarischen Angabe der Resultate läßt er solche Spezialfälle unberücksichtigt, in denen die Zurückführung unmöglich wird.

Andere Zurückführungen werden sodann mittelst der Umbildung von Integralen durch Substitution gewonnen, und Newton, der nicht nur

wie Fermat die Differentiation, sondern auch ihr gegensätzliches Verhältnis zur Quadratur kennt, ist im Stande, diese Operation vollständig auszuführen. Sein diesbezüglicher Satz läßt sich so wiedergeben: $\int y dz = \int v dx$, wenn $\frac{dz}{v} = \frac{dx}{y}$, was ja dasselbe ist wie

$$\int y\, dz = \int y \frac{dz}{dx}\, dx,$$

alles unter Voraussetzung entsprechender Grenzen der Integrale (oder der durch sie bestimmten Flächenräume).

Wir wollen uns nicht bei den Anwendungen aufhalten, die er davon macht, sondern nur bemerken, daß er seine Methoden im besonderen auf die Frage anwendet, über die er 1676 an Collins schrieb (S. 371). Er fügt noch die gewiß 1666 ausgearbeitete und von uns bereits erwähnte Tafel über die einfachsten Kurven hinzu, die sich mit Ellipsen und Hyperbeln vergleichen lassen, d. h. die einfachsten Integrale, die durch circulare und logarithmische Funktionen ausgedrückt werden können.

Newton bringt (wie soeben berührt) die teilweise Integration nicht weiter in Anwendung, als höchstens indirekt durch die Vertauschung von Abscisse und Ordinate, die schon Fermat und Pascal angewendet hatten (S. 269). Zuletzt führt er doch einige Resultate an, die sich allerdings leicht *a posteriori* durch Differentiation beweisen lassen, die aber ihrer Natur nach eher durch teilweise Integration gefunden zu sein scheinen.

Es sind, wenn wir fortwährend die Quadratur mit der Integration vertauschen, die Ausdrücke für mehrfache Integrale durch ein einfaches. Wir können das gewonnene Resultat durch

$$\int_0^t \int_0^{z^{(n)}} y dz^{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-z)^n y dz$$

wiedergeben.

Da die Integrationen in dem hier behandelten Werke in der Gestalt von Quadraturen auftreten und diese zunächst bestimmten Integralen entsprechen, hat Newton in den schon besprochenen Untersuchungen keiner willkürlichen Konstante bedurft. Seine Methode beruht indes, wie er selbst so kräftig hervorhebt, auf dem gegensätzlichen Verhältnis zwischen der Quadratur und der Herstellung der „Fluxion“ einer gegebenen „Fluente“, der Differentiation. Deshalb muß er auch auf die rein analytische Bedeutung der durch Quadratur ausgeführten Operation bedacht sein, d. h. auf die Herstellung der Fluente einer gegebenen Fluxion (der Funktion, die einen gegebenen Differentialquotienten hat). Daß die durch diese Operation gefundene Funktion ein Glied enthalten muß, das einen beliebigen konstanten

Wert haben kann, hebt Newton zu Ende seiner Schrift ausdrücklich hervor, wie auch, daß eine n-malige Wiederholung dieser Operation die Hinzufügung eines willkürlichen Polynoms vom Grade $n - 1$ nach sich zieht.

10. Newtons Fluxionsmethode.

In der Schrift *De quadratura curvarum* bringt Newton sowohl die Benennungen Fluxion und Fluente als seine Bezeichnung einer gegebenen Fluxion (S. 358), ja, sogar die der Fluxion einer Fluxion direkt in Anwendung. Diese Benennungen und Bezeichnungen sind jedoch bei den bisher besprochenen Untersuchungen von recht untergeordneter Bedeutung, da diese nur auf der Differentiation oder Bildung der Fluxion einer gegebenen Fluente beruhen, die Newton, ohne eben den Namen Fluxion zu benutzen, in der *Analysis per aequationes infinitas* klar dargelegt und mit der Bestimmung der Ordinate einer Kurve verknüpft hatte, die eine gegebene Fläche abschneidet. Man hätte daher in diesen Untersuchungen eher eines Integralzeichens bedurft, dessen wir uns, wie auch bei früheren Gelegenheiten, bedient haben, um die Übersicht zu erleichtern; statt dessen gebraucht Newton stets die alte geometrische Darstellung der Integration als einer Quadratur.

Nichtsdestoweniger hat er in der Einleitung zu der Schrift *De quadratura* die Gelegenheit benutzt, den Begriff der Fluxion, sowie den Gebrauch der einschlägigen Bezeichnung klar auseinanderzulegen, was er bisher nur in kurzen Andeutungen in einer Anmerkung der *Principia* und in 2 Briefen an Wallis getan hatte, die in dessen Werke aufgenommen wurden, und in denen Newton die Anagramme aus den Briefen an Leibniz (S. 56) auflöste. In den *Principia* findet man jedoch keine Fluxionszeichen, sondern nur das Wort Fluxionen als eine Benennung für endliche Größen, die mit den augenblicklichen oder unendlich kleinen Zuwüchsen proportional sind. Letztere nennt er Momente, eine Benennung, die übrigens in der *Analysis per aequationes infinitas* den Namen Fluxionen ersetzt hatte.

Der Wert der neuen Begriffe und Bezeichnungen zeigt sich, wenn man dieselbe analytische Operation verschiedentlich anwenden oder Gleichungen behandeln soll, die sowohl Fluenten als Fluxionen enthalten. Daß Newton eben auf solche inhaltreiche Anwendungen sein Augenmerk gerichtet hielt, und wie weit er selbst es in dieser Beziehung gebracht hatte, ersieht man am besten aus seiner *Methodus fluxionum*, die im wesentlichen schon 1671 ausgearbeitet war, aber erst nach seinem Tode veröffentlicht wurde. An dies Werk werden wir uns daher in unserer Erörterung seiner Fluxionsmethode und ihrer Anwendungen hauptsächlich halten.

Die genaue Definition der Fluxionen liegt (wie schon S. 358 bemerkt) in der Regel für ihre Bildung, und diese Regel ist dieselbe, die

Newton, ohne den Namen Fluxion und die dazu gehörige Bezeichnung anzuwenden, zu Ende der *Analysis per aequationes infinitas* angegeben hatte (S. 361). Im allgemeinen vertauscht er, wenn man n gleichzeitig variierende Größen, die Fluenten $x, y, z, \cdots$ hat, die $n - 1$ Gleichungen erfüllen und somit alle als Funktionen der einen von ihnen betrachtet werden können, in einer jeden solchen Gleichung $x, y, z, \cdots$ mit $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$, $z + \dot{z}o \cdots$. Dann werden sich die kein o enthaltenden Glieder gegenseitig heben. Wird der gemeinschaftliche Faktor o gekürzt und o sodann gleich 0 gesetzt, so erhält man eine homogene Gleichung in $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \cdots$. Diese Größen, die Fluxionen, lassen sich als die Geschwindigkeiten auffassen, mit denen $x, y, z, \cdots$ variieren, oder — da das Maß der Zeit ein beliebiges ist (S. 358) — als die Differentialquotienten von $x, y, z, \cdots$ in Bezug auf die Zeit ansehen. Das Verhältnis $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ bezeichnet seiner Bildung zufolge genau dasselbe wie der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und man darf Newtons Bestimmung der Fluxionen $\dot{x}, \dot{y}, \cdots$ selbst als eine klare und von dem undefinierten Begriff „unendlich klein“ unabhängige Definition der Differentiale $dx, dy, \cdots$ betrachten.

Die für die Fluxionsbildung angegebene Regel betrifft zunächst algebraische Gleichungen in ganzer und rationaler Form. Um eine solche Form zu gewinnen, werden gewöhnlich neue Zeichen, z u. s. w., für die irrationalen Ausdrücke der gegebenen Gleichung eingeführt, und auf diese Weise geschieht es, daß man schon in der Bestimmung des Verhältnisses zwischen den Fluxionen zweier Variablen mehrere Gleichungen in mehreren Unbekannten erhält. Um $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ zu finden, wenn $y = \sqrt{a^2 + x\sqrt{a^2 - x^2}}$ ist, wird $z = x\sqrt{a^2 - x^2}$ gesetzt, und

$$y^2 - a^2 - z = 0 \text{ und } a^2 x^2 - x^4 - z^2 = 0$$

sind somit die zu differentiierenden Gleichungen. Dadurch erreicht Newton teils eine klare Bestimmung, wie in den mehrdeutigen Ausdrücken die einzelnen Werte der Fluxionen den einzelnen Werten der Fluente entsprechen, teils eine wirkliche Beweisführung. Es wäre dagegen ungereimt, aus dieser allgemeinen Darstellungsform schließen zu wollen, der Erfinder der allgemeinen Binomialformel wisse nicht, wie der Ausdruck der Fluxion einer Wurzelgröße unmittelbar zu schreiben sei. Daß er dies tatsächlich weiß, zeigt er zu wiederholten Malen in der Schrift *De quadratura*. — Eine ähnliche Substitution benutzt er, wie wir gleich sehen werden, wenn er, nach dem modernen Ausdruck, höherer Differentialquotienten bedarf.

In solchen Fällen versteht er übrigens auch den Umstand zu benutzen,

daß noch keine unabhängige Variable gewählt ist. Nimmt man z. B. an, daß die Größe x sich gleichmäßig ändert, so wird $\dot{x}$ konstant und kann $= 1$ gesetzt werden, was dasselbe ist, wie wenn er x die unabhängige Variable sein läßt. Das Gleiche hatte schon Neper (S. 134) getan, indem er einen der beiden gleichzeitig bewegten Punkte sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen ließ, so daß sich die von diesem Punkte begrenzte variable Strecke gleichmäßig veränderte.

Wie eben bemerkt, bedient sich Newton dieses Umstandes, wenn er Fluxionen von Fluxionen sucht. Wenn in der angeführten Weise x zur unabhängigen Variablen gemacht wird, wird $\dot{x} = 1$, also $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$. Diese Größe setzt er $= z$ und bezeichnet ihre Fluxion durch $\dot{z}$. Noch deutlicher wird aber die Bezeichnung $\ddot{y}$. Sie wird, wenn man $\dot{x} = 1$ gesetzt hat, dasselbe bezeichnen, als wenn man nach Leibniz $\frac{d^2y}{dx^2}$ schreibt, ebenso wie $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$ unserem $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ entsprechen. Die hier angeführten Bezeichnungen höherer Fluxionen verwendet Newton jedoch nicht in der *Methodus fluxionum*, sondern er erwähnt sie in den Briefen an Wallis 1692 und gebraucht sie in der gewiß erst später geschriebenen Einleitung zur Schrift *De quadratura*, also nachdem Leibniz' entsprechende Bezeichnungen bekannt geworden waren. In seinen privaten Untersuchungen hatte er jedoch schon 1666 nicht nur einen Punkt zur Bezeichnung der Fluxion gebraucht, sondern ab und zu auch zwei Punkte, um die 2. Fluxion zu bezeichnen.

Die durch Ansetzung von $\dot{x} = 1$, was dann $\ddot{x} = 0$ mit sich führt, eingebüßte Homogeneität der Gleichungen kann Newton wiedergewinnen, indem er in die verschiedenen Glieder passende Anzahlen von Faktoren $\dot{x}$ einführt, was ja für $\dot{x} = 1$ erlaubt ist.

Man sieht, daß der Begriff der unabhängigen Variablen — wenn dieser Ausdruck auch noch nicht gebraucht wird — völlig so klar und einfach wie in manchem modernen Lehrbuch hervortritt.

Die aufgestellte allgemeine Regel kann — auch ohne daß man aus ihr besondere Regeln für die Bildung der Fluxion eines Produktes, eines Quotienten u. s. w. herleitet und aufstellt — angewendet werden, um aus dem Ausdruck einer Fluente durch eine andere Fluente das Verhältnis zwischen ihren Fluxionen, oder um aus einem System von Gleichungen zwischen Fluenten ebensoviele Gleichungen zwischen den Fluenten und ihren Fluxionen herzuleiten. Ferner gehört es, wie schon öfters bemerkt, zu den Hauptverdiensten Newtons, daß er (schon in der *Analysis*) hervorhob, man habe mit dieser einfacheren Operation eine systematische Behandlung auch der Quadraturen zu beginnen. Diese waren von der umgekehrten Operation,

dem Auffinden der Fluenten einer gegebenen Fluxion, abhängig. Diese Frage beschäftigt Newton in der Schrift *De quadratura*; in der *Methodus fluxionum* ist sie in der allgemeineren, welche die Herleitung der Gleichung zwischen Fluenten betrifft, die durch eine gegebene Fluxionsgleichung bestimmt werden, mit einbegriffen.

Newton untersucht nun zuerst, wie man, wenn eine Gleichung

$$M\dot{x} + N\dot{y} = 0$$

unmittelbar durch seine Fluxionsbildung (Differentiation), die linke Seite also aus einem Ausdruck in x und y entstanden ist, diesen Ausdruck selbst finden kann. Hierbei hält er sich jedoch nur an solche Fälle, in denen M und N ganze und rationale Funktionen von x und y sind. Er berücksichtigt dann von

$$\int M dx + \int N dy$$

nur einmal die Glieder, die in beiden Integralen vorkommen. Dann wird man, wie er sagt, wenn $M\dot{x} + N\dot{y}$ wirklich durch Differentiation eines Ausdrucks in x und y gebildet ist, diesen selbst finden; er versäumt aber nicht hervorzuheben, daß ein solcher Ausdruck nicht immer existiere, und daß man daher stets das gefundene Resultat zu prüfen habe.

Wenn sich ein so einfaches Verfahren nicht anwenden läßt, nimmt Newton wie bei den einfachen Quadraturen zu einer Reihenentwickelung seine Zuflucht. Er löst erst die vorliegende Fluxionsgleichung in Bezug auf $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ oder $\dot{y}$; letzteres kann man, wie oben erwähnt, immer erhalten, indem $\dot{x} = 1$ gesetzt wird. Wenn der so gewonnene Ausdruck in Bezug auf x und y nicht ganz und rational ist, gewinnt man gewöhnlich einen solchen Ausdruck in unendlicher Form durch eine Reihenentwickelung nach Potenzen von x und y mit positiven und steigenden Exponenten. Ist dies wie in der Gleichung

$$\dot{y} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{x^2}$$

nicht unmittelbar möglich, so gewinnt man die Reihe durch Änderung der Variabeln, hier durch Vertauschung von x und y mit $1 - x$ und $1 - y$. Daß diese Umformung nur eine Einführung neuer Variabeln ist, geht in der darauf folgenden Beweisführung aus Newtons Bemerkung hervor, daß er nur der Bequemlichkeit halber fortfahre, für die geänderten Variabeln dieselben Bezeichnungen wie für die ursprünglichen zu gebrauchen.

Wenn man nun, nachdem die Gleichung auf diese Weise bequemer geworden, eine Reihenentwickelung für y nach steigenden Potenzen von x haben will, kann man den Umstand benutzen, daß $\dot{y}$ um einen Grad niedriger

wird als y. Die Glieder des Ausdruckes für $\dot{y}$, die y enthalten, bekommen daher keinen Einfluß auf das Glied niedrigsten Grades in $\dot{y}$. Dies Glied ist also dasselbe wie dasjenige, das in Bezug auf x niedrigsten Grades ist, und durch Integration dieses Gliedes erhält man das erste Glied von y. Wird nun dies Glied für y in die Gleichung eingesetzt, so läßt sich das nächste Glied in derselben Weise bestimmen u. s. w. Die allgemeinen Grundzüge dieser Methode sind schon 1692 in den Briefen an Wallis dargelegt und durch ein Beispiel erläutert. Die Form, in der Newton in der *Methodus fluxionum* die Rechnung schreibt, ist aus folgendem Beispiel ersichtlich:

$$\dot{y} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

	$+ 1 - 3x + x^2$
$+ y$	$* + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots$
$+ xy$	$* \quad * + x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots$
Summe	$+ 1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5 + \cdots$
$y =$	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \cdots$

Das erste Glied 1 der „Summe“, die $\dot{y}$ darstellt, ist unmittelbar gegeben, und daraus ergibt sich durch Integration das erste Glied x von y. Sodann kann man durch Einsetzung dieses Gliedes in die gegebene Gleichung das zweite Glied der Summe und durch Integration das zweite Glied von y finden u. s. w.

Wo es einfacher ist, sucht man Reihenentwickelungen nach steigenden Potenzen nicht von x, sondern von $\frac{1}{x}$, z. B. in der Gleichung

$$\dot{y} = -y + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

oder man sucht statt y selbst eine Funktion von y durch eine Reihe auszudrücken. So wird in der Gleichung

$$\dot{y} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$$

$y^{\frac{1}{3}} = z$ gesetzt.

Wo die Reihenentwickelung von selbst aufhört, führt Newtons Methode zur Integration in endlicher Form. So ergibt die vorletzte Gleichung $y = \frac{1}{x}$, und aus der Gleichung

$$\dot{y} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \tfrac{1}{2}x^2$$

findet man

$$y = 2x - \tfrac{4}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^3.$$

Diese Gleichung dient übrigens als Beispiel dafür, daß man mitunterdurch Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Reihen

entwickelung für y finden kann, ohne erst den Ausdruck für $\dot{y}$ auf die vorausgesetzte ganze Form gebracht zu haben.

Die hier abgeleiteten Reihenentwickelungen ergeben, da keine willkürliche Konstante hinzugekommen ist, den partikulären Ausdruck für y, der für $x = 0$ gleichfalls 0 wird. Da Newton, wie wir vorhin gesehen, gelegentlich x und y mit $x - a$ und $y - b$ vertauscht, könnte man auf diesem Wege ein beliebiges partikuläres Integral finden, dessen Gültigkeit sich ebensoweit erstreckt wie die Konvergenzgrenzen der so gefundenen Reihen. Es ist Newton aber nur daran gelegen, ein Integral und nicht die allgemeinste Form des Integrals zu finden.

Er behandelt sodann auch Gleichungen mit mehr als 2 Variabeln. Da indes die ganze Fluxionslehre auf der Voraussetzung einer unabhängigen Variablen beruht, bemerkt er, daß in solchen Fällen, in denen nur eine Gleichung in mehr als zwei Variabeln und ihren Fluxionen gegeben ist, neue Relationen zwischen den Variabeln eingeführt werden können. Wenn z. B. die totale Fluxionsgleichung

$$2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$$

gegeben ist, so kann man durch Einführung einer neuen Relation, wie $x = y^2$, die Gleichung $4y\dot{y} - \dot{z} + y^2\dot{y} = 0$ gewinnen, die sodann durch

$$2y^2 - z + \tfrac{1}{3}y^3 = 0$$

integriert wird, eine Gleichung, welche, mit $x = y^2$ verbunden, eine Auflösung der Gleichung ergibt. Die Einsetzung von $x = y^2$ wird ausdrücklich als ein Beispiel bezeichnet, und dadurch wird in der Form, in der es damals möglich war, angedeutet, daß man statt x eine willkürliche Funktion von y einsetzen kann. Die Integration ist also die allgemeine, wenn wir von den Spezialfällen absehen, in denen die totale Differentialgleichung durch eine einzelne Gleichung integriert werden kann. Mit solchen Fällen beschäftigt sich Newton nicht.

Darauf folgen die Anwendungen der Fluxionsmethoden zur Bestimmung von Maximis und Minimis, ohne daß Newton jedoch (wie bald nachher Leibniz) die zweite Fluxion anwendet, um Maxima und Minima zu unterscheiden; dann zur Tangentenbestimmung für Kurven, die nicht nur in Parallel- und Polarkoordinaten, sondern auch in bipolaren Koordinaten oder sonstigen Koordinatensystemen dargestellt sein mögen; ferner zur Bestimmung der Krümmung von Kurven, zu Quadraturen und Rektifikationen. Hiermit wird noch die Bestimmung solcher Kurven verbunden, für welche sich die beiden letzten Operationen wirklich durchführen lassen. Man erhält sie bezw. durch Differentiation von Flächenausdrücken und Bestimmung von Evoluten gegebener Kurven. Letzteres Verfahren mag Newton schon

1771 durch kleinere Mitteilungen von Huygens zugänglich geworden sein, wenn auch das *Horologium oscillatorium* damals noch nicht erschienen war. Da dies indes lange vor dem Erscheinen der Schrift Newtons geschah, so ist die Methode wie auch die ganze Evolutentheorie jedenfalls als Huygens' Eigentum zu betrachten.

Durch den Gebrauch von Fluxionen und den dazu gehörigen Bezeichnungen wird jedoch Newtons ganze Krümmungslehre leichter faßlich als die Huygens' (S. 343). Wie dieser bestimmt er den Krümmungsmittelpunkt als den Durchschnittspunkt einer Normalen mit der konsekutiven Normalen. Sei C (Fig. 30) der dem Punkt D (x, y) der Kurve DA entsprechende Krümmungsmittelpunkt, die Gerade Cg der Ordinatenachse parallel und $= 1$, gd aber der Abscissenachse parallel.

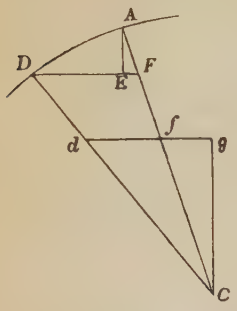

Fig. 30.

Da CdD eine Normale ist, wird $dg = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, eine Größe, welche $= z$ gesetzt wird. Beim Übergang zur konsekutiven Normalen, die die erstere gerade in C schneiden soll, bewegt sich d mit der Geschwindigkeit $\dot{z}$ oder kommt nach der unendlich kurzen Zeit o bis zum Punkt f, der durch $df = \dot{z}o$ bestimmt wird. Auf einer Parallelen zur Abscissenachse durch D wird die konsekutive Normale dagegen eine Strecke DF abschneiden, die (wegen des rechtwinkligen Dreiecks DAF mit dem auf der Hypotenuse senkrechten AE) $= \dot{x}o + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}}o$ ist. Da nun $\frac{DF}{df} = \frac{CD}{Cd}$, so wird, wenn man $\dot{x} = 1$, also $\dot{y} = \dot{z}$ setzt, wodurch $Cd = \sqrt{1 + z^2}$ wird, der Krümmungshalbmesser

$$CD = \frac{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}{\dot{z}}.$$

Dies ist, da $z = \frac{dy}{dx}$, $\dot{z} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, der heute gebräuchliche Ausdruck.

Hiermit verknüpft Newton eine Bestimmung der Wendepunkte durch $z = 0$, d. h. durch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, eine Bestimmung, die, wie wir (S. 334) gesehen, tatsächlich schon Fermat bekannt war. Newton nennt die dadurch bestimmten Punkte *Puncta rectitudinis* und bemerkt, daß sie wirklich im allgemeinen Wendepunkte sind. Sie brauchen es nicht zu sein, da die Tangente, wie wir heute sagen, mit der Kurve eine Berührung höherer Ordnung haben kann. Dieser Unsicherheit entgeht Newton durch eine andere Bestimmung der Wendepunkte, nämlich als solcher, deren Tangenten auf der Abscissenachse Strecken abschneiden, die, von einem festen Punkt aus gerechnet, Maxima oder Minima werden. Von den Schnittpunkten der Kurve mit der

Abscissenachse abgesehen, werden diese Punkte stets eigentliche Wendepunkte. Es dürfte übrigens diese Bestimmung dieselbe sein, die Huygens in einzelnen Fällen angewendet hat (S. 334).

Newton geht übrigens weiter und untersucht sogar die Variation der Krümmung, die er an dem Verhältnis zwischen den Fluxionen des Krümmungshalbmessers und des Bogens mißt. Namentlich bestimmt er die Punkte, wo diese Größe 0 oder unendlich wird. — Wir haben bereits berührt, daß er in den *Principia* Huygens' Bestimmung der Evolute der Cykloide auf Epicykloiden und Hypocykloiden ausdehnt (S. 345).

11. Newtons „Principia“.

Das Werk, das vor allen anderen die Grundlage für Newtons Ruhm abgibt, sind die 1686—87 herausgegebenen *Philosophiae naturalis Principia mathematica*. Ihr innerster Kern ist der mathematische Beweis dafür, daß die von Kepler gefundenen Gesetze den Planeten gerade eine solche Bewegung erteilen, wie sie durch eine mit dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehung nach dem Mittelpunkt der Sonne erzeugt wird, und daß die Bewegung des Mondes und die Schwere auf der Oberfläche der Erde eine ähnliche gemeinsame Erklärung in der Anziehung nach dem Mittelpunkt der Erde finden; außerdem enthalten sie wesentliche Beiträge zur Begründung der Auffassung, daß diese Anziehung von einer zwischen beliebigen Massenteilchen ausgeübten, gegenseitigen und in beiden Richtungen gleichen Anziehung herrühre, die dem Produkte der beiden Massen proportional und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional sei. In dieser Beziehung ist namentlich sein mathematischer Beweis dafür hervorzuheben, daß eine homogene Kugel, oder nur eine Kugel, deren Dichtigkeit allein von der Entfernung vom Mittelpunkt abhängt, dieselbe Anziehung auf ein beliebiges Massenteilchen ausübe, als ob die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Newton betonte selbst, es komme ihm nur auf eine vollständige Begründung dafür an, daß die beschriebenen Bewegungen dieselben seien wie die durch die hier besprochenen Kräfte erzeugten, und verwahrt sich ausdrücklich gegen den Vorwurf, als lege er auf metaphysischem Wege anderes oder mehr in diese Behauptung hinein, als was er streng zu begründen vermöge. Um diese Fragen einer mathematischen Behandlung unterziehen zu können, muß man indes in einer von jeglicher Undeutlichkeit befreiten und völlig allgemeinen Form Voraussetzungen besonders darüber machen, was man unter Anziehung und Kraft überhaupt zu verstehen habe. Indem Newton dies tat, schuf er nicht nur den Begriff der Kraft, dessen er selbst in den speziell vorliegenden Untersuchungen bedurfte, sondern über-

haupt einen Begriff, mit dem die rationelle Lehre von der Bewegung bis auf den heutigen Tag hat operieren können. Er selbst legt ihn in den *Principia* einer Menge anderer Untersuchungen zu Grunde, die sich nicht gerade auf das Anziehungsgesetz beschränken, das die Planetenbewegung regelt.

Die erste seiner Voraussetzungen, das Trägheitsgesetz, war schon bekannt (S. 243). Es besagt, daß stets eine besondere Kraft vonnöten ist, um die geradlinige und gleichmäßige Bewegung eines Körpers zu ändern oder ihn aus seiner Ruhe zu bringen. Es kommt bei der Bewegung eines einzelnen Teilchens darauf an, die beschleunigende Kraft zu kennen, die der durch sie in gegebener Zeit erzeugten Geschwindigkeit proportional ist; diese Geschwindigkeit wird mittelst eines Parallelogramms mit derjenigen zusammengesetzt, die das Teilchen bereits hat. Die bewegende Kraft ist das Produkt aus der beschleunigenden Kraft und der Masse des bewegten Teilchens und wird also — in Bezug auf Größe und Richtung — an der Bewegungsmenge gemessen, die sie in gegebener Zeit erzeugt.

Es ist klar, daß die Anwendung dieser Voraussetzungen notwendig auf Infinitesimaluntersuchungen beruht, wie sie Newton bereits in seiner Fluxionslehre systematisch an- und dargestellt hatte. Die Fluxion selbst wird ja von ihm als die Geschwindigkeit erklärt, mit der sich eine Größe ändert, also als die Geschwindigkeit, mit der sich der eine Endpunkt einer Strecke, die diese Größe darstellt, bewegt, während der andere festliegt; die exakte mathematische Bestimmung einer Fluxion wird daher unmittelbar die entsprechende Bestimmung der Geschwindigkeit ergeben. Da von stetig wirkenden Kräften die Rede ist, kommt es auf die dadurch in unendlich kurzen Zeiträumen erzeugten Geschwindigkeitsänderungen an, also auf Fluxionen der Geschwindigkeiten und ihrer Komponenten.

Newton sagt denn auch in einem Briefe selbst, daß er die wichtigsten Sätze seiner *Principia* durch die Fluxionsmethode gefunden habe. Dies ist jedoch nicht dahin zu verstehen, als hätte er an ihr und dem mit ihr verbundenen System von Bezeichnungen ein fertiges Hilfsmittel besessen, mit dem er nach im voraus festgesetzten Rechnungsregeln alle diese Sätze hätte herleiten können, wie wir es jetzt mittelst der Differential- und Integralrechnung in der Gestalt tun, die sie heutigentages nach und nach angenommen hat. Nein, umgekehrt ist vielmehr diese Gestalt allmählich der Herleitung zunächst der Hauptresultate, die Newton teilweise selbst schon gleichzeitig mit dem Entstehen der Fluxionsmethode gefunden hatte, sodann aber derjenigen vieler anderer Resultate angepaßt worden. So haben die *Principia* ebensosehr die weitere Entwickelung der Infinitesimalrechnung mächtig angeregt, wie sich selbst auf die Infinitesimalrechnung gestützt, soweit sie Newton

damals schon besaß und besonders in seiner *Methodus fluxionum* dargelegt hatte. Von ihr aus würde man jedenfalls nur durch vielfache Zwischenglieder zu der Herleitung der soeben hervorgehobenen Hauptsätze der *Principia* gelangen. Man bedarf ja auch in diesen Hauptsätzen keiner schwierigeren Differentiationen oder Integrationen, wohl aber einer durchaus sicheren Einsicht in die Grenzbestimmungen überhaupt, die geeignet ist, auch unter den besonderen neuen Verhältnissen, von denen hier die Rede ist, ihre Anwendung zu finden. Sobald dagegen diese Schwierigkeiten bei der Behandlung dieser bedeutungsvolleren, aber doch spezielleren Aufgaben einmal überwunden waren, mußte sich Newtons frühere rein analytische Behandlung der infinitesimalen Grundoperationen zur Verallgemeinerung seiner Untersuchungen dienlich erweisen, die von Anfang an nur an bestimmte Bewegungen angeknüpft hatten.

Es kann uns unter diesen Umständen nicht gerade wundern, daß Newton seinen *Principia* nicht seine damals fertige *Methodus fluxionum* an die Spitze stellte, um sodann auf ihr weiter zu bauen. Von den sonstigen Bedenken abgesehen, die er damals gehegt haben mag, die Fluxionslehre an die Öffentlichkeit zu bringen und die Beweise seiner neuen mechanischen Theorien auf Methoden zu stützen, deren Zuverlässigkeit vielleicht noch strittig sein mochte, würde es mindestens für die Hauptresultate, wenn auch nicht für das viele Andere, was das Werk sonst noch enthält, einen Umweg bedeutet haben. Wollte man die mechanischen Resultate auf die allgemeine Fluxionslehre bauen, so wäre von Newtons Seite erst noch die Ausarbeitung und von seiten des Lesers das Studium der allgemeinen Lehre von der Anwendung der Fluxionstheorie auf die Mechanik erforderlich gewesen. Newton gelangt viel schneller zu seinen Hauptresultaten; er vermag sie schon zu Anfang des Werkes darzustellen und vollständig zu beweisen, indem er sich vorderhand an die besondere Anwendung der infinitesimalen Prinzipien auf diese Aufgaben hält und in Verbindung damit in synthetischer Weise die geometrischen Eigenschaften der betreffenden Figuren verwertet, die ihm von Nutzen sein können. Was namentlich die Kegelschnitte betrifft, so bedient er sich weit ausgiebiger der umfassenden Kenntnis dieser Kurven, die sich aus Apollonius schöpfen läßt, als ihrer Darstellung in der Geometrie Descartes', einem Werke, das er indes in einem Briefe ausdrücklich als eine Vorschule der *Principia* empfohlen hat.

Gebraucht er also weder die Technik der Fluxionslehre noch die der analytischen Geometrie, so muß er doch, was erstere betrifft, damit anfangen, die allgemeinen infinitesimalen Voraussetzungen, auf die er baut, ausdrücklich festzustellen. Dies geschieht ohne Gebrauch des Namens der Fluxion, der

ja eine ausführlichere Erklärung erfordert hätte, durch eine klare Aufstellung des infinitesimalen Grenzbegriffes mit seinen wichtigsten Anwendungen auf Tangente, Flächeninhalt und Bogenlänge. Es wird z. B. ausgesprochen, daß das Verhältnis der Bogenlänge zu der entsprechenden Sehne oder der Strecke, welche die den Endpunkten entsprechenden Ordinaten von der Tangente in dem einen der Endpunkte abschneiden, den Grenzwert 1 hat. Der Grenzwert eines Verhältnisses wird als das letzte oder das erste Verhältnis bezeichnet, und die Annäherung einer variablen Größe an einen gewissen Grenzwert dadurch charakterisiert, daß ihre Abweichung von ihm kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann. Selbst wo er, wie im 2. Buch, eines Satzes aus der Fluxionstheorie bedarf, den er daher darstellen muß, bedient er sich nur ganz beiläufig des Namens der Fluxionen (S. 374), und gar nicht des Fluxionszeichens. Der betreffende Hilfssatz, den er also etwas umschreiben muß, besagt, daß die Fluxion von

$$x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot \cdots =$$
$$m x^{m-1} y^n z^p \dot{x} + n x^m y^{n-1} z^p \dot{y} + p x^m y^n z^{p-1} \dot{z} \cdots$$

ist, wo die Exponenten positiv oder negativ, ganzzahlig oder gebrochen sein können.

Hätte Newton diese Gelegenheit benutzt, von seiner Fluxionsmethode mehr mitzuteilen als nur das, was auch schon Leibniz, wie er aus der Korrespondenz mit ihm wußte, obgleich in anderer Gestalt, besaß, so hätte er sich seines großen Vorsprungs in derartigen Studien zu einer Gesamtdarstellung seiner Untersuchungen bedienen können, die ja weit mehr umfaßten, als was Leibniz, der 1684 in den *Acta Eruditorum* die erste Grundlage der Differentialrechnung veröffentlicht hatte, damals erreicht hatte. Dann hätten aber vielleicht die *Principia* noch auf sich warten lassen, und wir, die wir jetzt sowohl Newtons Fluxionsmethode wie Leibniz' Differentialrechnung kennen, verlieren nicht viel, da wir durch diese unsere Kenntnis das, was er mitteilt, teils vervollständigen, teils besser überblicken können. Ebenso setzt uns unsere Kenntnis dieser Methoden in den Stand, die Fortschritte zu bemerken, zu denen die *Principia* der Infinitesimalrechnung selbst verhalfen, z. B. durch die Lösung von Aufgaben, die für uns mit der Integration von Differentialgleichungen zusammenfällt und in Newtons eigener Behandlung die gleiche Bedeutung hat wie die Lösung von Fluxionsgleichungen. Am besten erhellt dies, wenn man seine Art der Behandlung in die Sprache der Differential- oder Fluxionsrechnung überträgt.

Sind wir also, um heutigentages die späteren Untersuchungen der *Principia* ohne allzu große Anstrengung zu bewältigen, auf eine solche Übertragung hingewiesen, so würde seinen Zeitgenossen eine vorhergehende

Darstellung der Fluxionslehre das Verständnis bedeutend erleichtert haben; wie schon hervorgehoben, betrifft dies aber nicht seine Herleitung der Hauptsätze der Mechanik des Himmels.

Der erste dieser Sätze besagt, daß, wenn sich ein Körper unter dem Einflusse einer Anziehung nach einem festen Punkt bewegt, einesteils die Bewegung in einer Ebene durch den festen Punkt stattfinden wird, andernteils die Flächen, welche die Leitstrahlen von dem festen bis zu dem bewegten Punkte beschreiben, den dazu verbrauchten Zeiten proportional sein werden. Hierfür liefert Newton Buch I, 1 denselben Beweis, der noch immer in unseren Lehrbüchern der Physik geliefert wird. Die unendlich kleinen Dreiecke, die in zwei aufeinander folgenden, gleichen, unendlich kleinen Zeitabschnitten beschrieben werden, sind gleich groß; denn, nimmt man den gemeinsamen Leitstrahl zur Grundlinie, so werden auch die Höhen gleich, da dann die durch die Anziehung hinzukommende Geschwindigkeit und somit auch der mit dieser Geschwindigkeit durchlaufene unendlich kleine Weg der Grundlinie parallel ist. Hieran knüpft sich I, 2 der Beweis, daß umgekehrt eine Bewegung, welche die genannten Bedingungen erfüllt, eine Zentralbewegung ist. I, 3 wird dieser Satz auf eine relative Bewegung ausgedehnt, bei der außer der Zentralkraft ein und dieselbe beschleunigende Kraft von beliebiger Größe sowohl auf den anziehenden als auf den angezogenen Körper wirkt.

I, 4 beweist Newton für Kreisbewegungen die Übereinstimmung zwischen dem 3. Keplerschen Gesetz mit der dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionalen Anziehung und fügt hinzu, daß diese Übereinstimmung auch schon von Wren, Hooke und Halley bemerkt worden und in Huygens' Bestimmung der Zentrifugalkraft enthalten sei. Auch die (I, 6) folgende Bestimmung der beschleunigenden Zentralkraft, welche die Bewegung eines Punktes in einer gegebenen Bahn bewirkt, beruht wie Huygens' Bestimmung der Zentrifugalkraft (S. 248) darauf, daß die Strecke, um die eine unveränderte beschleunigende Kraft (g) in der Zeit t einen Körper von seiner geradlinigen gleichmäßigen Bewegung abbringt, zu gt^2 proportional ist. Es sei nun (Fig. 31) S der anziehende und P der bewegte Punkt, PQ der in der unendlich kleinen Zeit t durchlaufene Bogen, RQ die auf dem Leitstrahl SQ zwischen Q und der Tangente in P abgeschnittene Strecke; dann wird die beschleunigende Kraft mit $\frac{RQ}{t^2}$ oder, dem Flächensatz zufolge, mit $\frac{RQ}{SP^2 \cdot QT^2}$ proportional, wo QT die Höhe des infinitesimalen Dreiecks SPQ ist.

Um sodann zu zeigen, daß die Zentralkraft, welche die Bewegung eines Teilchens auf einer Ellipse mit einem Brennpunkt in dem anziehenden

Punkt S bewirkt, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, gilt es nun nur zu beweisen, daß das Verhältnis $\frac{RQ}{QT^2}$ oder, wie wir, um darauf hinzuweisen, daß RQ und QT unendlich klein sein sollen, lieber schreiben werden, $lim.\frac{RQ}{QT^2}$ konstant ist.

In dem Beweise hierfür, I, 11, benutzt Newton noch folgende Hilfslinien: den Durchmesser GP durch den bewegten Punkt und dessen konjugierten Durchmesser DK; sie schneiden sich im Mittelpunkt C; der Leitstrahl SP schneidet DK in E; die Gerade PF ist in F senkrecht auf DK, und die Parallele Qv zu DK schneidet SP und CP in x und v. Der Bequemlichkeit halber setzen wir $CP = a_1$, $CD = b_1$ und bezeichnen die Halbachsen der Kurve als a und b.

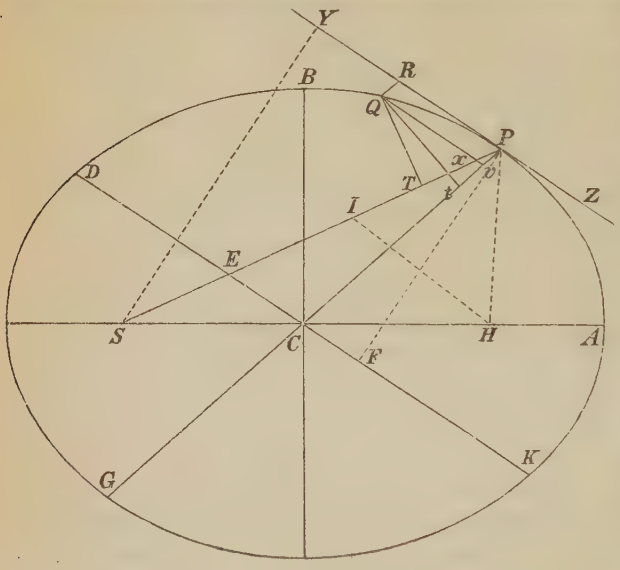

Fig. 31.

Da die Dreiecke xPv und EPC einander ähnlich sind und vQ eine dem Durchmesser GP entsprechende Ordinate ist, so ist

$$xP = \frac{EP}{CP} \cdot vP = \frac{EP}{a_1} \cdot \frac{a_1^2}{b_1^2} \cdot \frac{vQ^2}{Gv}$$

In dem betreffenden Grenzfalle kann man RQ statt xP, xQ statt vQ und $2a_1$ statt Gv setzen. Man findet dann

$$lim.\frac{RQ}{QT^2} = lim.\frac{EP}{2b_1^2} \cdot \frac{xQ^2}{QT^2} = \frac{EP^3}{2b_1^2 \cdot FP^2},$$

wo die letzte Umbildung auf der Ähnlichkeit der Dreiecke TQx und FPE beruht. Da der Inhalt $b_1 \cdot FP$ eines aus zwei konjugierten Halbmessern gebildeten Parallelogramms den konstanten Wert ab hat, so erhält man weiterhin:

$$lim.\frac{RQ}{QT^2} = \frac{EP^3}{2a^2b^2}.$$

Da wir hier den Umstand noch nicht berücksichtigt haben, daß S der

Brennpunkt ist, so gilt diese Bestimmung für alle Lagen dieses Punktes, und die Anziehung nach einem beliebigen Punkt S in der Ebene, durch welche die Bewegung von P auf der Ellipse bewirkt werden würde, ist also proportional zu $\frac{EP^3}{SP^2}$.

Es gilt also nur noch zu beweisen, daß EP konstant bleibt, wenn S ein Brennpunkt ist. Wenn man durch den anderen Brennpunkt H die Gerade HI parallel zu der Tangente in P zieht, sieht man, daß

$$EP = EI + IP = \tfrac{1}{2}(SI + IP + PH) = a$$

ist, was zu beweisen war.

Hätte man S in das Zentrum der Kurve fallen lassen, so würde der gefundene allgemeine Ausdruck für die Anziehung nach einem beliebig gewählten Punkt in der Ebene der Ellipse eine zur Entfernung proportionale Anziehung ergeben. Diese spezielle, an und für sich einfachere Bestimmung hat Newton indes schon I, 10 bewiesen, und darauf gründet er eine neue Herleitung der Anziehung nach einem beliebigen Punkt der Ebene, die eine Bewegung auf der Ellipse bewirken würde. Es geschieht dadurch, daß er erst den Zusammenhang zwischen den nach zwei Punkten gerichteten Anziehungen feststellt, welche Bewegungen auf einem Kreise bewirken würden. Indem er den Kreis den oskulierenden Kreis einer Kurve sein läßt, welche die Bahn für einen beweglichen, einer Zentralbewegung unterworfenen Punkt abgeben soll, kann er aus dem Anziehungsgesetz, das einem gegebenen Anziehungszentrum entspricht, das einem beliebigen anderen entsprechende herleiten. Diese Anwendung eines oskulierenden Kreises zeigt uns deutlich, in welcher Weise Newton damals infinitesimale geometrische Bestimmungen beherrschte.

An den gefundenen Ausdruck für die eine Bewegung auf einer gegebenen Bahn erzeugende Zentralkraft knüpft sich die umgekehrte Bestimmung der Bahn, wenn das Anziehungsgesetz gegeben ist. Dadurch wird dann bewiesen, daß eine dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionale Anziehung immer eine dem 1. Keplerschen Gesetze entsprechende Bewegung verursacht. Die Bewegung auf der Bahn selbst findet man sodann durch das in 1 und 2 begründete Keplersche Flächengesetz. Übrigens stellt Newton nicht nur die entsprechenden Untersuchungen über Bewegungen auf hyperbolischen und parabolischen Bahnen, so auch über die Wurfbewegung an, sondern zeigt auch, daß die Anziehung, wenn sich ein Teilchen auf einer logarithmischen Spirale unter Anziehung nach dessen Pol bewegt, umgekehrt proportional sei zur 3. Potenz der Entfernung.

Als Spezialfall der Bewegung eines nach einem festen Zentrum angezogenen Teilchens auf einer ebenen Kurve wird seine unter verschiedenen

Voraussetzungen stattfindende Bewegung auf einer Geraden durch das Zentrum behandelt, besonders in den Fällen, in welchen die Anziehung zu dem Quadrat der Entfernung umgekehrt oder zu der Entfernung selbst direkt proportional ist. In letzterem Falle ist die Bewegung speziell in einer Zentralbewegung auf einer (in diesem Falle unendlich flachen) Ellipse um deren Zentrum einbegriffen. Daraus ergibt sich, daß die Bewegung dieselbe ist, die von der Projektion eines Punktes ausgeführt wird, der mit gegebener Geschwindigkeit einen Kreis um den anziehenden Punkt als Mittelpunkt durchläuft. Dies ist die geometrische Form, in der die trigonometrische Funktion auftritt, welche das Integral $[x = a \cos \sqrt{\mu}\, t]$ der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0$$

enthalten muß. Weiter benutzt Newton den Umstand, daß sich dieselbe Bewegungsgleichung auf die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Cykloide in der von Huygens angenommenen Lage (S. 341) anwenden läßt, wenn x die von dem untersten Punkt an gerechnete Bogenlänge ist, und daß sie unter entsprechenden Voraussetzungen ebenso für die eines Punktes auf einer Hypocykloide gilt, der mit einer zur Entfernung proportionalen Kraft nach dem Mittelpunkt des entsprechenden festen Kreises hin angezogen wird. So erhält er die früher berührte Erweiterung des Huygensschen Satzes von der Bewegung auf einer Cykloide (S. 345).

Übrigens führt Newton ganz allgemein die Bestimmung der Bahn, die von einem freien Teilchen durchlaufen wird, welches von einem festen Punkt mit einer von der Entfernung in willkürlicher Weise abhängigen Kraft angezogen wird, auf Quadraturen zurück. Hierzu dient ihm außer dem Flächensatz noch folgender Satz:

Wenn ein Teilchen einer Zentralbewegung unterworfen, ein anderes derselben Anziehung ausgesetztes Teilchen sich aber auf einer geraden Linie durch das Anziehungszentrum bewegt, endlich beide Teilchen in einer und derselben Entfernung vom Anziehungszentrum dieselbe Geschwindigkeit haben, so werden sie in allen gleichen Entfernungen gleiche Geschwindigkeit haben. — Die Bestimmung der Geschwindigkeit ist indes für die geradlinige Bewegung schon zuvor auf die Quadratur zurückgeführt, die wir, wenn r die Entfernung, R die Anziehung und v die Geschwindigkeit bezeichnen, von Vorzeichen und Integrationskonstante abgesehen, als

$$v^2 = 2\int R dr$$

schreiben würden. Dies gilt also auch für die krummlinige Zentralbewegung. Bezeichnet ϑ den Polarwinkel des bewegten Punktes, so kann man durch die Gleichungen:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\int R dr,$$

wie wir sie heute schreiben, die Bestimmung von r und ϑ, wenn R eine gegebene Funktion von r ist, als Funktionen von t auf Quadraturen zurückführen.

Newton behandelt außerdem noch andere hierher gehörige Probleme, namentlich solche, in denen sich der angezogene Punkt auf einer festen Fläche oder Kurve bewegt, oder 2 Punkte sich gegenseitig anziehen.

Als einen der Hauptsätze der Mechanik des Himmels haben wir neben den hier erwähnten Bewegungssätzen denjenigen genannt, der besagt, daß die Anziehung, die eine Kugel, deren Dichtigkeit allein von der Entfernung vom Mittelpunkt abhängt, auf ein außerhalb befindliches Teilchen ausübt, dieselbe sei, als wäre die ganze Masse der Kugel in ihrem Zentrum vereinigt. Um die Anziehung einer solchen Kugel zu untersuchen, reicht es hin, eine einzelne unendlich dünne homogene Kugelschale in Betracht zu ziehen.

Daß die Anziehung 0 ist, wenn sich das Teilchen innerhalb der Kugelschale selbst befindet, wird I, 70 in einer auch heutigentages wohlbekannten Weise dadurch dargetan, daß sich die Anziehungen nach denjenigen Teilen der Kugelschale, die innerhalb der beiden Mäntel desselben unendlich dünnen Kegels mit dem Scheitelpunkt in dem angezogenen Punkt liegen, gegenseitig aufheben; wir wollen aber hier die Art und Weise hervorheben, in der in 71 bewiesen wird, daß die Anziehung in dem Falle, daß das angezogene Teilchen außerhalb der Kugelschale liegt, mit einer solchen vertauscht werden kann, die sich umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung des angezogenen Punktes von dem Mittelpunkt der Kugelschale.

Newton betrachtet zwei Figuren, von denen Fig. 32 die eine darstellt, in denen die Punkte P und p von den Mittelpunkten gleich großer Kugeln verschiedene Entfernungen haben. Diese Kugeln werden in den beiden Figuren durch diametrale Schnitte dargestellt, die zugleich die beiden angezogenen Punkte P und p enthalten. Jedem dieser Kreise werden Sehnen eingeschrieben, die verlängert durch Punkt P und p gehen und von denen diejenigen Sehnen der beiden Figuren, die vom Mittelpunkt die gleiche Entfernung haben, einander entsprechen. Entsprechende Punkte werden durch entsprechende große und kleine Buchstaben bezeichnet. Es seien nun HK und IL zwei solche unendlich nahe liegende Sehnen des einen Kreises; dann wird bewiesen, daß sich die Anziehung, die auf P von der Zone (IH) ausgeübt wird, die durch Drehung des Bogens IH um PS erzeugt wird, zu der Anziehung, welche die entsprechende Zone (ih) auf p ausübt, umgekehrt

wie PS^2 zu ps^2 verhalte. Da also die Kugelschalen für zwei Punkte P und p aus Zonen zusammengesetzt sind, von denen der Satz im einzelnen gilt, muß er auch von der ganzen Kugelschale gelten.

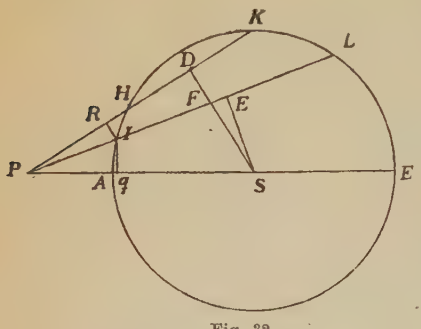

Fig. 32.

Zum Beweise wird der Umstand benutzt, daß einerseits die Strecke DF, die zwischen der Sehne HK und der unendlich nahe liegenden IL auf der vom Mittelpunkt des Kreises auf die erstere gefällten Senkrechten abgeschnitten wird, zu der entsprechenden Strecke df das Grenzverhältnis 1 haben wird, und daß andrerseits das unendlich kleine Dreieck HIR, in dem IR senkrecht auf PH ist, dem entsprechenden hir ähnlich ist. Wir werden das im folgenden dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir DF sowie die Entfernung SE des Mittelpunkts von der Sehne IL und das Verhältnis $\frac{HI}{RI}$ als von der Lage von P unabhängig betrachten; wir nennen diese Werte k, k' und k''. Da nun die unendlich schmale Zone (IH) den Inhalt $2\pi\, IH \cdot IQ$ hat, wo IQ die Entfernung der Zone von der Achse ist, so wird seine Anziehung, die wegen der Symmetrie in der Richtung PS wirkt, mit welcher PF einen Winkel bildet, dessen Kosinus gleich $lim.\ \frac{PF}{PS}$ ist, gleich

$$\text{Konst.}\frac{IH \cdot IQ}{PI^2} \cdot \frac{PF}{PS}.$$

Da hier

$$\frac{IH}{PI} = k''\frac{RI}{PI} = k''\frac{FD}{PF} = \frac{kk''}{PF}$$

und

$$\frac{IQ}{PI} = \frac{ES}{PS} = \frac{k'}{PS}$$

ist, wird die Anziehung $\frac{c}{PS^2}$, wo c eine von der Lage von P unabhängige Größe ist.

Newton führt demnächst ähnlicherweise die gegenseitige Anziehung zweier Kugeln auf die zweier Punkte zurück. Er führt übrigens auch die Anziehung einer homogenen Kugel nach einem willkürlichen Anziehungsgesetz auf eine Quadratur zurück und führt diese Quadratur unter der Annahme verschiedener Gesetze aus.

Nachdem wir hier Newtons Begründungen der von ihm gefundenen Hauptsätze der Mechanik des Himmels einigermaßen zusammenhängend erörtert haben, müssen wir uns mit einigen Proben des sonstigen, auch in mathematischer Beziehung reichen Inhalts der Principia begnügen. Einiges haben wir bereits in anderer Verbindung besprochen (S. 227 u. S. 230). Hier wollen wir dagegen zunächst dasjenige anführen, was auf Integration von Differentialgleichungen beruht, die allerdings in geometrischer Form aufgestellt und gelöst werden, zu deren Darstellung und Lösung aber Newton die Mittel in Gestalt der mit Differentialgleichungen durchaus übereinstimmenden Fluxionsgleichungen selbst besaß. In seinen privaten Untersuchungen hat er sicherlich diese Darstellungsmittel in größerem oder geringerem Umfange herangezogen.

Aus dem Anfang des 2. Buches heben wir die Untersuchung der Bewegung in einem Medium hervor, dessen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit des Mediums proportional ist. Hier findet sich (II, 8 u. 9) eine völlig durchgeführte Behandlung der nach unten oder oben gehenden geradlinigen Bewegung eines schweren Teilchens in einem Medium von gleichmäßiger Dichtigkeit. In moderner mathematischer Sprache wird bei der von Newton getroffenen Wahl von Einheiten die Gleichung, welche die von ihm aufgestellten Voraussetzungen ausdrückt,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \mp \frac{1}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

sein, wo t die Zeit, x die Entfernung des beweglichen Punktes von einem festen Punkt der Geraden, $\frac{dx}{dt} = v$ die Geschwindigkeit und $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{v\,dv}{dx}$ die beschleunigende Kraft (die Beschleunigung) ist. Es ergibt sich (wenn $x = 0$ den Punkt bestimmt, wo $v = 0$):

$$x = \mp\frac{g}{2}\log\left(1 \mp \frac{v^2}{g^2}\right),$$

wo Newton jedoch den Logarithmus durch ein hyperbolisches Flächenstück darstellt. Übrigens leitet er diese Gleichung aus jener durch eine wirkliche Integration her, indem er zeigt, daß jene tatsächlich aus dieser entsteht, wenn man gleichzeitig x und v um Größen vermehrt, die bis zu 0 schwinden, also durch Differentiation. Sodann drückt er t durch v aus:

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g \mp \frac{1}{g}v^2},$$

indem er beide Integrale als Flächeninhalte von Hyperbel- oder Kreisausschnitten, also durch die damalige Form für circulare und logarithmische Funktionen, ausdrückt.

Auch bei der Behandlung der Bewegung eines schweren Teilchens auf einer Cykloide berücksichtigt er einen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand. Diese Bewegung hängt, wenn wir die Bogenlänge s und die Zeit t nennen, von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} \mp a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + bs = 0$$

ab, die für $\frac{ds}{dt} = v$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d(v)^2}{ds} \mp av^2 + bs = 0$$

wird.

Newton leitet hieraus eine Bestimmung von v^2 oder des Widerstands als Funktion von s her, integriert also tatsächlich eine lineare Differentialgleichung. Daraus leitet er hinwiederum eine Relation zwischen den Größen zweier aufeinander folgenden Ausschläge her, welche die $v = 0$ entsprechenden Größen von s sind.

Newton wendet einmal die kompliziertere Differentialgleichung an, welche die Bahn eines schweren Körpers bestimmt, der sich in einem Medium bewegt, dessen Dichtigkeit eine beliebige Funktion der Koordinaten ist, und dessen Widerstand mit dem Produkt der Dichtigkeit in die n^{te} Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Diese Gleichung können wir als

$$\frac{\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{4-n}{2}}\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{n-1}} = f(x, y)$$

schreiben, wo $f(x, y)$ die mit einem konstanten Faktor multiplizierte Dichtigkeit bezeichnet.

Newton benutzt indes, wo wir Differentialquotienten geschrieben haben, nicht die Fluxionen, sondern vielmehr die Koeffizienten der Reihe $Qo + Ro^2 + So^3 + \cdots$, die man aus der Gleichung der Kurve zum Ausdruck des Zuwachses herleiten kann, den y erhält, wenn x mit $x + o$ vertauscht wird. Dann ist $\frac{dy}{dx} = Q$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2R$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6S$. Wenn wir statt Q, R, S die Differentialquotienten geschrieben haben, so hat das nur auf den in $f(x, y)$ eingehenden konstanten Faktor Einfluß.

Die Koeffizienten in der Reihenentwickelung sind, wie leicht zu erkennen ist, nur gebraucht, weil er nicht den Begriff der Fluxion eingeführt hatte. Man kann also die Gleichung als eine wirkliche Fluxions- oder Differentialgleichung auffassen, an deren Integration im allgemeinen er jedoch nicht denken kann. Indem er dagegen voraussetzt, die gefundene Bahn

solle eine bestimmte Kurve: ein Kreis, eine Parabel oder Hyperbel sein, bestimmt er teils den einer solchen Kurve entsprechenden Widerstand, teils bildet er, wenn man sich den für diese Kurve gefundenen Widerstand in $f(x, y)$ eingeführt denkt, Differentialgleichungen 3. Ordnung, die gerade zufolge ihrer Bildung durch Differentiation integrierbar sein müssen.

Wir benutzen die Gelegenheit zu bemerken, daß in einem anderen Falle die gleiche Vertauschung von Differentialquotienten oder Fluxionen mit Koeffizienten der eben benutzten Reihe Newton zu einer unklaren Ausdrucksweise verleitet hat, die namentlich bei den Anhängern Leibnizens Anstoß erregte. In der Schrift *De quadratura* sagt er einmal, in der Reihe

$$(z + o)^\eta = z^\eta + \eta o z^{\eta-1} + \frac{\eta(\eta-1)}{2} oo z^{\eta-2} + \cdots$$

sei $\frac{\eta(\eta-1)}{2} z^{\eta-2}$ das zweite *incrementum* oder die zweite *differentia*, $\frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{\eta-3}$ das dritte *incrementum* u. s. w., ein Ausdruck, welchen er später, auf den Fehler oder die Unklarheit aufmerksam gemacht, in einem Exemplar, das er verschenkte, durch Hinzufügung des Wortes *ut*, das heißt „proportional zu“, berichtigt hat. Daß übrigens nur eine Unklarheit im Gebrauche der nicht definierten Wörter *incrementum* und *differentia* vorliegt, ist daraus ersichtlich, daß er gleich nachher von ihnen sagt, sie seien den entsprechenden Fluxionen proportional; den Begriff der Fluxion hat er nämlich in gedachter Schrift ausdrücklich definiert. Ein wirklicher Irrtum in diesem Punkte wäre übrigens bei Newton unmöglich, da er nicht nur mit den höheren Fluxionen vertraut war, sondern auch in der *Methodus differentialis*, deren Hauptsatz sich in den *Principia* findet (S. 230), gezeigt hat, daß er die höheren endlichen Differenzen recht wohl zu verwenden verstand. Es scheint übrigens nur diese Vernachlässigung ausdrücklich angegebener Zahlenkoeffizienten zu sein, die Newton hinderte, die spätere Taylorsche Formel aufzustellen.

Die hier gegebenen Proben des Inhalts der Principia erläutern, was wir über das Fehlen der Fluxionslehre oder einer anderen allgemeinen Infinitesimalmethode als Grundlage gesagt haben. In den Beweisen für die ersten Hauptsätze hat er in Ermangelung einer solchen allgemeinen, ein für allemal begründeten Methode die einzelnen Fälle je für sich behandeln müssen; ebendadurch entsteht aber eine reiche und verschiedenartige Anwendung der infinitesimalen Prinzipien, die zu deren Entwickelung wesentlich beitragen mußte. In der Darstellung kommen unendlich kleine Linien, z. B. als Seiten unendlich kleiner Dreiecke, vor, die, um die Verhältnisse der Seiten zu bestimmen, mit ähnlichen endlichen Dreiecken vertauscht

werden. Solche unendlich kleine Größen bezeichnet Newton öfters als *quam minimae*, wodurch kurz angegeben wird, daß nur von Grenzwerten der betreffenden Verhältnisse oder der Summe solcher Größen die Rede ist. Die Grenzwerte selbst sind, wie gesagt, in den im voraus aufgestellten infinitesimalen Prinzipien exakt definiert.

Newtons Darstellung von anderen seiner Untersuchungen, in deren Wiedergabe wir die Sprache der Differential- und Integralrechnung angewendet haben, hätte sich dagegen vereinfachen lassen, wenn er die Sprache und die Hauptsätze der Fluxionsmethode hätte verwenden können. Aber er stellt, wie Barrow, eine Größe, die eine beliebige Funktion einer anderen sein soll, lieber durch Ordinaten einer Kurve, sowie eine Integration durch eine Quadratur dar, und die tatsächliche Differentiation, die in mehreren Fällen die Integration einer Gleichung begründen soll, muß, namentlich ehe zu Anfang des 2. Buches sein Lehnsatz aus der Fluxionslehre eingeführt ist, in jedem einzelnen Falle dadurch begründet werden, daß er den variablen Größen gleichzeitige Zuwüchse erteilt und diese Zuwüchse nach der erforderlichen Reduktion gleich Null setzt.

12. Leibniz bis zur Grundlegung der Differentialrechnung.

Wir haben Newtons infinitesimale Untersuchungen erörtern können, ohne wesentliche Rücksicht darauf zu nehmen, daß sie großenteils erst vor die Öffentlichkeit kamen, nachdem, ja, teilweise sogar erst lange, nachdem Leibniz' verwandte Behandlung derselben Fragen sowohl veröffentlicht als in reichem Maße von ihm selbst und seinen nächsten Nachfolgern in Anwendung gebracht worden war, und als sich seine Methoden bereits in weitere Kreise verbreitet hatten. Dies alles blieb ohne merkbaren Einfluß auf Newtons Werke. Seine schöpferische Tätigkeit auf diesem Gebiete fällt größtenteils in eine Zeit, in der von einer Beeinflussung von seiten Leibniz' keine Rede sein konnte; schon damals gelangte er in den vollen Besitz der Methoden und Betrachtungsweisen, die seinen später veröffentlichten Arbeiten zu Grunde liegen; einzelne Resultate, die verschiedentlich schon früh bekannt wurden, verraten, daß auch die Durchführung der meisten darin vorgenommenen einzelnen Untersuchungen früheren Epochen angehört. Jedenfalls läßt sich der Gebrauch kaum eines einzigen Hilfsmittels nachweisen, das er etwa Leibniz zu verdanken gehabt hätte. Was z. B. Leibnizens älteste Aufschlüsse in dem Briefwechsel mit Newton in den Jahren 1676—77 und besonders die deutliche Darstellung der Differentiationsprinzipien im 2. Briefe betrifft, die wir bald zu besprechen haben werden, so konnte es für Newton doch nichts Neues sein, wie man das Differential oder die Fluxion eines Produktes, eines Quotienten oder einer Wurzel un-

mittelbar hinschreiben könne. Alles das mußte ihm ja aus den vielen Fluxionsbestimmungen, die er selbst ausgeführt hatte, bereits hinlänglich bekannt sein. Besonders, was die unmittelbare Angabe der Fluxion oder des Differentials eines irrationalen Ausdrucks betrifft, so erwähnt er selbst in einem Briefe an Collins 1672 den Vorzug seiner Methode vor den älteren Tangentenbestimmungen, der eben darin besteht, daß sie auch auf Gleichungen anwendbar sei, in welchen Irrationalitäten vorkommen, und als Beweis dafür, daß er es tatsächlich lange vor Leibniz so weit gebracht hatte, können wir die Angabe der Fluxion von $\sqrt{a^2 + x^2}$ zu Ende der *Analysis per aequationes infinitas* anführen.

Was Leibniz' Hauptverdienst ausmacht, die ausdrückliche Aufstellung von Regeln für die einfachsten Operationen, aus denen sich die übrigen zusammensetzen, sowie ihre regelrechte Verbindung mit einem festen System von Bezeichnungen, war eben nicht besonders geeignet, Newton zu gute zu kommen. Er kannte diese Einzelheiten selbst, da ihm ja schon das aus ihnen sich ergebende Ganze völlig bekannt war, und besaß und benutzte ja selbst schon mit vollkommener Sicherheit eine an und für sich ebenso gute Zeichensprache. Leibniz' Mitteilungen konnten ihm nur zeigen, daß auch dieser jetzt dieselben Methoden kannte und anzuwenden wußte, die er selbst schon lange benutzt hatte. Daß diese Methode bei Leibniz im Begriff war, eine Gestalt anzunehmen, in der man sie sich bequem aneignen und sodann mechanisch handhaben konnte, wenn man sich nur an die bestimmten Regeln für die einfachen Operationen hielt, und sich in ihrem Gebrauche eine gewisse Übung erworben hatte, war freilich ein Vorteil für weniger Einsichtsvolle; aber ebendies brauchte Newton gar nicht einzufallen, der ja seine eigene entsprechende Methode besaß. Diese, wenn man will, pädagogische Seite der Angelegenheit ist ihm gewiß erst klar geworden, als er Leibniz' Schule machen sah und befürchten mußte, dessen Art der Behandlung werde die allein herrschende werden, seine eigenen Verdienste dagegen, die er versäumt hatte, beizeiten an die Öffentlichkeit zu bringen, könnten in Vergessenheit geraten. Aber auch jetzt bewirkte dies, wie wir wissen, noch nicht die baldige Herausgabe seiner infinitesimalen Arbeiten; auch fühlte er sich, als sie später erschienen, dadurch nicht veranlaßt, ihnen eine mehr pädagogische Gestalt zu geben. Zwar erscheinen sie Gelehrten gewiß klar und deutlich, sie waren aber allerdings nicht in dem Grade wie Leibniz' Arbeiten geeignet, die neuen Methoden schnell in Umlauf zu bringen.

Nur einmal scheint er durch Leibniz' Arbeiten dazu angeregt worden zu sein, auch sein System so darzustellen, daß seine allgemeine Verwendbarkeit ebenso deutlich hervortrete, und zwar in der Einleitung und im

1. Satze seiner Schrift *De quadratura curvarum*, welche er selbst ausdrücklich als viel jüngere Zusätze zu dieser schon früher abgefaßten Schrift bezeichnet. Hier werden, wie schon erwähnt, Zeichen für Fluxionen auch höherer Ordnungen $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \cdots$, ja sogar $'x, ''x, \cdots$ als Zeichen für die Größen eingeführt, die durch Quadraturen aus x gebildet werden, also Zeichen für Integrale und Integrale von Integralen. Die ersteren Zeichen benutzt er in genannter Schrift nur in einem Scholium, das vielleicht gleichfalls ein späterer Zusatz ist, die letzteren gar nicht. Er scheint daher diese Zeichen hier gewissermaßen nur als ein Gegenstück zu Leibniz' vollständiger Zeichensprache aufgestellt zu haben (siehe jedoch S. 376).

Viel schwerer ist es klarzulegen, welche Anregungen Leibniz unter der Entwickelung seiner Methoden von Newton empfangen haben mag. Wir wissen ja nicht, wie viele von Newtons Gedanken — in deren persönlicher Mitteilung er keineswegs so zurückhaltend gewesen zu sein scheint wie in ihrer Veröffentlichung durch den Druck — damals schon unter den englischen Mathematikern in Umlauf waren, mit denen Leibniz 1673 und 1676 in England persönlich verkehrte, und von welchen Tschirnhaus ihm 1675 mündlich berichten konnte. Daß man tatsächlich damals in Newtons Heimat mit seinen Arbeiten und ihrer Bedeutung nicht unbekannt war, zeigt sich darin, daß Gregory zu seinen eigenen Reihenentwickelungen (S. 306) durch die Nachricht von einer der Newtonschen angeregt wurde und daher unter Anerkennung dieses Tatbestandes wünschte, Newton möge erst die dazu dienende Methode veröffentlichen. Auch die von Gregory bei seinen Tangentenbestimmungen (S. 361) angewendeten Bezeichnungen verraten eine gewisse Beziehung zu Newton. Wenn auch Leibniz 1673 nicht dazu kam, Newtons *Analysis per aequationes infinitas* einsehen zu können, so zeigen doch Oldenburgs briefliche Berichte an Leibniz in den folgenden Jahren über einige der wichtigsten Resultate dieser Schrift, daß man sie auch in London zu schätzen wußte.

Noch weniger können wir von der Form der mündlichen Mitteilungen, die Leibniz erhalten haben mag, und von den Zeitpunkten wissen, in denen dies geschehen sein mag. Er war 1673 selbst kaum gereift genug, um gerade viel von dem, was er damals hörte, sogleich verwerten zu können; ebendeswegen wird es aber auch ihm selbst schwer gefallen sein, sich davon Rechenschaft abzulegen, was späterhin jenen Anregungen, die er damals empfing, entsprossen sein könnte. Umgekehrt kann sich später, als er es selbst weiter gebracht hatte, ein einzelnes Resultat, das ihm mitgeteilt wurde, derart mit seinem eigenen Gedankengang verschmolzen haben, daß es in ihm augenblicklich eine Frucht zeitigte, während es von anderen Mathematikern kaum verstanden worden wäre.

Dagegen wissen wir durch auf uns gekommene Briefe und Aufzeichnungen recht wohl Bescheid von dem Gang der eigenen Entwickelung Leibniz' und von den Formen, in denen seine neuen Gedanken allmählich entstanden. Hiervon werden wir jetzt eine kurze Schilderung geben; es wird sich dabei teilweise auch zeigen, von welchen Seiten er vornehmlich beeinflußt wurde.

Schon vor der Reise nach London 1673 hatte Huygens in Paris sein Interesse für Mathematik wieder angefacht. Früher hatte er sich mit Kombinationen und Permutationen als mathematischer Grundlage der Logik beschäftigt. Einige Berührung damit hatte eine Aufgabe, die ihm Huygens stellte, und zwar, die Summe der reziproken Werte der Dreieckszahlen zu finden. Diese Aufgabe war übrigens schon früher gelöst worden (S. 309, Formel (3)). Leibniz ging aber weiter und fand auch die Summe der reziproken Werte der Pyramidalzahlen u. s. w. und anderer Reihen ähnlicher Art. Solche Reihen hat er später 1682 in einem Aufsatz über die Zinsrechnung in den *Acta Eruditorum* benutzt, in welchem er Voraussetzungen macht, die teils zu unendlichen geometrischen Reihen mit wechselnden Vorzeichen und Quotienten, die kleiner als 1 sind, teils zu Reihen führen, die hieraus durch Multiplikation der Glieder mit den natürlichen Zahlen, den Dreieckszahlen, den Pyramidalzahlen u, s. w. gebildet werden. Die letztgenannten Reihen lassen sich aus geometrischen durch die Operationen bilden, welche Pascal die Bildung der Dreieckssumme, Pyramidalsumme u. s. w. nennt (S. 274). In seinen Summierungen benutzt Leibniz im Anschluß an Pascals arithmetisches Dreieck auch Differenzen höherer Ordnung. So benutzt er bei der Summierung einer endlichen Anzahl von Gliedern einer Reihe von derselben Potenz oder derselben ganzen Funktion der natürlichen Zahlen den Umstand, daß die Differenzen einer gewissen Ordnung einen konstanten Wert erhalten. Diese Anfangsgründe zu der späteren Rechnung mit endlichen Differenzen betrachtete Leibniz später selbst als Vorbereitung zu seiner Erfindung der Differentialrechnung.

Nach solchen Studien mußte es Leibniz in London sehr interessieren, zu erfahren, daß Mercator (S. 314), um Logarithmen auszudrücken, eine Reihe angewendet habe, die mit denjenigen eine gewisse Ähnlichkeit habe, die er selbst bereits in endlicher Form summiert hatte. So zu Versuchen in ähnlicher Richtung angeregt, mußte er das Bedürfnis gründlicherer Studien der vorliegenden Infinitesimaluntersuchungen fühlen. Solcher bedurfte er auch, um Huygens' *Horologium*, das dieser ihm geschenkt hatte, verstehen zu können. Er griff nach seiner Rückkehr nach Paris dies Studium eifrig an und studierte namentlich Cavalieri, Gregorius und Pascal. Daß er sich die Betrachtungen dieser seiner Lehrmeister schnell zu eigen machte, so

daß er sie selbständig anwenden konnte, offenbarte er bald durch eine neue infinitesimale Transformation, aus der die meisten bisher bekannten Quadraturen hervorgehen. Sie fällt im wesentlichen mit dem zusammen, was man heute aus dem Ausdrucke $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ für einen von zwei Leitstrahlen und einem unendlich kleinen Bogen begrenzten Ausschnitt herleiten würde. Diesen Differentialausdruck benutzte Leibniz später selbst, als er seine Differentialrechnung begründet hatte. In seinen ältesten Manuskripten und Briefen mußte er dagegen den Satz in derselben geometrischen Form ausdrücken, in der seine Vorgänger ähnliche Transformationen ausgedrückt hatten. Wenn (Fig. 33) die Tangente EC an die Kurve AC (die auch er in seiner Figur durch den Anfangspunkt gehen läßt) auf der Ordinatenachse die Strecke AE abschneidet, und diese Strecke zur Ordinate BF eines Punktes F mit derselben Abscisse wie C gemacht wird, so wird die Fläche, die von dem geometrischen Ort dieses Punktes, der Abscissenachse und zwei Ordinaten begrenzt wird, zweimal so groß sein wie der Ausschnitt, der von dem entsprechenden Bogen der gegebenen Kurve AC und den Leitstrahlen von A nach ihren Endpunkten begrenzt wird. Betrachtet man nämlich unendlich kleine beziehungsweise rechteckige und dreieckige Teile dieser Figuren, so wird durch Anwendung ähnlicher Dreiecke ersichtlich, daß sich Grundlinie und Höhe eines unendlich kleinen Rechtecks umgekehrt verhalten wie diejenigen des entsprechenden unendlich kleinen Dreiecks.

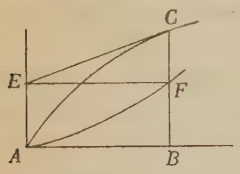

Fig. 33.

Indem Leibniz nun nach Fermats Tangentenmethode die Tangenten von dessen allgemeinen Parabeln und Hyperbeln bestimmte, fand er, daß die ihnen entsprechende Hilfskurve wiederum eine Parabel oder Hyperbel mit demselben Exponenten, aber mit einem neuen Parameter sei. Dieser Satz führte dann zu einer Gleichung, aus der sich die Quadratur der Kurven herleiten ließ.

Soll der Flächeninhalt der Cykloide auf diesem Wege bestimmt werden, so muß AE Tangente im Scheitelpunkt sein. Leibniz fand so, daß ein gewisser Abschnitt der Cykloide ohne Anwendung von π und von circularen Funktionen ausgedrückt werden kann; es war dies derjenige, der von einer Sehne durch den Scheitelpunkt und den Schnittpunkt der Cykloide mit der Mittellinie zwischen der Tangente im Scheitel und der Grundlinie abgeschnitten wird.

Indem er seine Methode auf die Quadratur des Kreises anwendete, führte er diese auf die Quadratur $\int \frac{z^{\square}}{1+z^2}\,dz$ zurück (vgl. übrigens Fermat S. 272) und gewann dadurch ein Mittel zu einer Reihenentwickelung

derselben Art wie der von Mercator auf Hyperbelflächen angewendeten (S. 314). So fand er dieselbe Reihenentwickelung für arc tg x, die Gregory schon früher gefunden hatte (S. 306). Sie liefert im besondern den Wert

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

Newton hat gegen die praktische Anwendbarkeit dieser Reihe einen begründeten Einwand erhoben (S. 370); Leibniz selbst aber hat mit dieser Reihenentwickelung eine theoretische Untersuchung von bedeutendem Interesse verknüpft. Es mußte sich nämlich die Frage erheben, ob sich nicht die Reihen, wie die schon früher von ihm untersuchten, in endlicher Form summieren ließen. Eine sichere Begründung dafür, daß dies nicht der Fall sei, konnte man zu damaliger Zeit für die Reihe für π selbst noch nicht geben. Denn obgleich Leibniz Huygens' Widerspruch gegen Gregorys Beweis, daß circulare Funktionen nicht algebraisch seien, nicht anerkannte, sah er doch, wie schon bemerkt (S. 305), sehr wohl ein, daß sich dieser Beweis nicht auf π selbst anwenden lasse. Ein wirkliches Beispiel dafür, daß ein durch eine Quadratur (Integration) entstehender Ausdruck zwar im allgemeinen transcendent, aber doch für spezielle Werte der Grenzen algebraisch sein kann, besaß er schon an seinem soeben besprochenen Cykloidenabschnitt. Ein zweites teilt er 1684 in den *Acta Eruditorum* mit. Es ist die Kurve

$$y^4 - 6h^2y^2 + 4y^2x^2 + h^4 = 0,$$

deren Quadratur im allgemeinen zu transcendenten Funktionen führt, während doch für einen der durch diese Gleichung bestimmten Ausdrücke für y

$$\int_0^h y\,dx = \int_0^h \sqrt{2h^2 - x^2}\,dx - \int_0^h \sqrt{h^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}h^2$$

wird. Dies erkennt man, wenn man die beiden Integrale als circulare Flächenstücke auffaßt.

Übrigens ersann Leibniz auch selbst einen Beweis dafür, daß die circularen und trigonometrischen Funktionen, wie wir es jetzt nennen, transcendent sind. Hätte nämlich zwischen x und sin x eine algebraische Gleichung statt, die sich Leibniz übrigens durch eine Kurve dargestellt denkt, so mußte sie sicher einen bestimmten Grad haben. Denkt man sich nun diese Gleichung erst zur Bestimmung von x, also auch von $\frac{x}{m}$ durch sin x und sodann zur Bestimmung von sin $\frac{x}{m}$ durch $\frac{x}{m}$ angewendet, so würde die Gleichung, mittels der sin $\frac{x}{m}$ durch sin x ausgedrückt wird, ebenso einen gewissen endlichen Grad r erhalten. Nun weiß man aber, daß diese Gleichung,

für ungerade Werte von m, m Wurzeln haben muß, was für $m > r$ unmöglich wird.

Daß $\sin \frac{x}{m}$ eine Anzahl von m Werten erhält, beruht, wie bekannt, auf der Periodizität der trigonometrischen Funktionen. Hieraus schließt Newton in den *Principia*, ohne Leibniz' Manuskript zu kennen, unmittelbar, daß die circularen Funktionen nicht algebraisch sein können. Seine Behauptung und sein Beweis betreffen jedoch nicht nur diese Funktionen, sondern alle diejenigen, die den Inhalt eines Ausschnittes eines geschlossenen und endlichen Zweiges einer algebraischen Kurve ausdrücken. Newton bezeichnet einen solchen Zweig kurz als ein Oval, wobei man voraussetzen muß, daß es nicht durch einen Doppelpunkt mit einem anderen Zweige verbunden ist. Die Periodizität wird graphisch durch eine Kurve veranschaulicht, was zu damaliger Zeit notwendig war, da der Begriff der Funktion noch nicht ausdrücklich aufgestellt war. Diese Kurve ist in dem Falle, daß die Transcendenz der circularen Funktionen bewiesen werden soll, eine archimedische Spirale. Daß Leibniz in seinem Beweise gerade den Zusammenhang zwischen x und $\sin x$ benutzt, kann vielleicht mit einer Anwendung der Reihe für $\sin x$ in Verbindung stehen, die Newton ihm kurz vorher mitgeteilt hatte (S. 369); dies betrifft aber nicht den eigentlichen Zweck des Beweises, der also ganz Leibniz angehört.

Leibniz' Beschäftigung mit unendlichen Reihen mit wechselnden Vorzeichen führte ihn auch auf die allgemeine Frage nach der Konvergenz solcher Reihen. Man verdankt ihm den Satz, daß eine unendliche Reihe von Gliedern mit wechselnden Vorzeichen eine endliche Summe hat, wenn der absolute Wert der Glieder abnimmt und den Grenzwert 0 hat. Deutlich tritt er allerdings erst in einem weit späteren Brief an Johann Bernoulli hervor; in weniger bestimmten Ausdrücken aber findet er sich schon in einem Manuskript *Compendium quadraturae arithmeticae*, das nicht viel jünger ist als die hier besprochene Zeit und eine Angabe der in Frage stehenden Untersuchungen enthält, die zwar etwas kurz, aber doch viel vollständiger ist, als was er später in den *Acta Eruditorum* darüber mitteilt.

Anders als durch den Gebrauch von Reihen war Leibniz auch auf einige der Hauptgedanken verfallen, die Newton schon längst seiner neuen Behandlung der infinitesimalen Mathematik zu Grunde gelegt hatte. Diesen Gedanken begegnen wir in einer Aufzeichnung vom Jahre 1673. Hier findet er zunächst die Tangente einer beliebigen Kurve durch das sogenannte charakteristische Dreieck, das aus den Differenzen zwischen Abscissen und Ordinaten zweier unendlich nahe liegenden Punkte und aus dem da-

zwischenliegenden Bogen, also aus den Größen gebildet wird, die er später dx, dy, ds nennt. Dies Dreieck ist demjenigen ähnlich, das aus Subtangente, Ordinate und Tangente gebildet wird, und das er bisweilen ebenso benennt. Im Anschluß an Pascals ganz spezielle Anwendung desselben Dreiecks (S. 276), auf die Leibniz selbst hinweist, benutzt er öfters auch den Umstand, daß das charakteristische Dreieck demjenigen ähnlich ist, das aus Ordinate, Subnormale und Normale gebildet wird. Bei der Berechnung der Verhältnisse dieser Größen macht er geltend, daß man nur die Glieder ersten Grades in Bezug auf die unendlich kleinen Größen zu berücksichtigen brauche, also diejenigen höheren Grades weglassen kann. Er hebt aber mit Recht die Vorsicht hervor, die man anwenden muß, weil sich die Glieder ersten Grades möglicherweise gegeneinander heben. Mit diesem Gebrauch des genannten unendlich kleinen und der ihnen ähnlichen endlichen Dreiecke waren übrigens alle vertraut, die sich damals mit infinitesimalen Untersuchungen beschäftigten, und Leibniz' so gewonnene weitere Ausführung der Tangentenbestimmung Fermats ist im wesentlichen dieselbe wie die Barrows (S. 359) und Gregorys (S. 361). Leibniz gab das auch zu, als er diese kennen lernte. Mit seiner selbständigen Aufstellung der Methode und ihrem Anschluß an Untersuchungen von Pascal, der dieselbe Figur in einer Aufgabe der Integralrechnung benutzte, waren indes noch andere Beobachtungen als bei den erwähnten Forschern verbunden. Da man in der hier angeführten Tangentenbestimmung die Differenzen (dy) zwischen Ordinaten gebraucht, die gleich großen Differenzen (dx) zwischen den Abscissen entsprechen, wird umgekehrt eine Ordinate y zur Summe solcher Differenzen (dy). Da nun die Bestimmung einer solchen Summe mit einer Quadratur zusammenfällt, meint er, fast die ganze Lehre von umgekehrten Tangentenaufgaben lasse sich auf Quadraturen zurückführen. Er hat also das gegensätzliche Verhältnis zwischen den Operationen, die er später Differentiation und Integration nannte, in anderer Gestalt gewonnen als Barrow und Gregory (S. 351 f.). Hierbei hat er wie Barrow zunächst die Anwendung der Quadratur zur Lösung der umgekehrten Tangentenaufgabe vor Augen. Andererseits sieht er schon hier ein, daß der Weg, auf dem sich beiderlei Aufgaben lösen lassen, über die Herstellung von Verzeichnissen, „*Canones*", der Resultate von Tangentenbestimmungen (Differentiationen) gehe, was Descartes schon früher angedeutet (S. 349) und Newton damals bereits in seinen privaten Arbeiten vielfach benutzt hatte.

Leibniz mußte bemüht sein, volle Klarheit über das zu gewinnen, was er 1673 nur undeutlich erkannt hatte, und die Durchführung dieser Gedanken kostete ihn in den zunächst folgenden Jahren fortgesetzte Arbeit. Daß er bei dieser Arbeit ganz augenscheinlich nicht bemerkte, daß auch

Barrow, den er doch einmal selbst anführt, umgekehrte Tangentenaufgaben auf Quadraturen zurückführte, verschaffte ihm die große Aufmunterung, die nach und nach gefundenen Lösungen solcher Aufgaben selbst als neu zu betrachten, und hatte dabei noch eine viel bedeutungsvollere Folge; hätte er freilich die Erleichterungen bemerkt, welche Barrows Darstellungsform darbot, so hätte er kaum Gelegenheit bekommen, die bedeutungsvollen Hilfsmittel zu schaffen, welche seine eigene Darstellungsform erforderte. Barrow stellte nämlich wie Fermat (S. 264) alles geometrisch dar, so daß bei ihm die Größe, die wir heute als $\int y dx$ bezeichnen, immer als Fläche zwischen der Abscissenachse, der Kurve selbst und zwei festen Ordinaten auftritt; dann ist es gleichgültig, ob die Zwischenräume (dx) zwischen den Ordinaten y gleich groß sind oder nicht. Leibniz hielt sich dagegen an Cavalieris, von Pascal genauer bestimmte Darstellung von $\int y dx$ als einer [mit dem unendlich kleinen Faktor dx multiplizierten] Summe von unendlich vielen y, „allen“ y, wie sich Leibniz damals noch ausdrückte, oder $\int y$, wie er bald schrieb. Bei dieser Erklärung war aber vorausgesetzt, daß die Zwischenräume zwischen den Ordinaten y gleich groß sind (S. 257 und 273). Unter diesen Umständen kann er daraus, daß, wie ihm wohl bekannt war, $\int x$ — oder das spätere $\int x dx$ — gleich $\frac{1}{2} x^2$ ist (wenn die untere Grenze $= 0$ gesetzt wird), nicht schließen, daß auch sein $\int y dy$, was dasselbe wie heutzutage bedeutet, gleich $\frac{1}{2} y^2$ ist, wenn x unabhängige Variable ist, die Größen dy also nicht gleich groß sind. Er muß dies noch besonders beweisen.

Unter dieser somit notwendigen Arbeit entstand nach und nach seine infinitesimale Zeichensprache, der „*Algorithmus*“, wie er selbst sagt, mittelst dessen sich die Untersuchungen in ein nach bestimmten, von ihm aufgestellten Regeln ausgeführtes Rechnen verwandeln, das wir heute noch gebrauchen. Seine vorhergehenden Untersuchungen werden nicht überall dadurch erleichtert, daß er gleichzeitig von der Ausarbeitung dieses Werkzeuges, das er allmählich verbessert, in Anspruch genommen war; er hat aber dadurch vielfache Gelegenheit, sein Hilfsmittel an sehr verschiedenartigen Aufgaben, sowohl neuen wie solchen, deren Resultate er bei älteren Forschern fand, zu erproben. Dadurch war, als es schließlich an die Öffentlichkeit trat, was zudem länger währte als notwenig gewesen wäre, nicht nur seine Anwendbarkeit, sondern auch seine Zuverlässigkeit gesichert.

Eine der ersten Anwendungen, die Leibniz von den 1673 gewonnenen Einsichten machte, war eine 1675 ersonnene allgemeine Methode, um ausfindig zu machen, ob eine algebraische Kurve [$f(x, v) = 0$, wo v die Ordinate ist] algebraisch quadrierbar sei, und, wenn dies der Fall ist, die Gleichung [$F(x, y)) = 0$] ihrer Quadratrix, d. h. der Kurve zu finden, deren Ordinaten y die entsprechenden Flächenräume jener ausdrücken. Er fängt mit der

Aufstellung einer Gleichung für letztere Kurve mit unbestimmten Koeffizienten an, die mit dem konstanten Gliede und den Gliedern niedrigsten Grades beginnen. Daraus bestimmt er nach de Sluses Regel (S. 337) die Subtangente t und setzt dann $\frac{t}{y}$ (indem er noch keine neue Bezeichnung für diese Größe anwendete, die bald zu $\frac{dx}{dy}$ wurde) $= \frac{a}{v}$. Die Gleichung in x und v, die er nun durch Elimination von y erhält, soll dann mit der Gleichung $[f(x, v) = 0]$ für die gegebene Kurve identisch sein. Dies muß zur Bestimmung der Koeffizienten der Quadratrix $[F(x, y) = 0]$ oder, wenn sich dies als unmöglich herausstellt, zu dem Beweise dienen, daß sich die gegebene Kurve nicht algebraisch quadrieren lasse. Die Anwendung der Methode wird im allgemeinen sehr weitläufig sein; Leibniz gebraucht sie aber doch in der bereits angeführten Arbeit in den *Acta Eruditorum* 1684, um zu beweisen, daß die Kurve

$$y^4 - 6h^2y^2 + 4y^2x^2 + h^4 = 0,$$

deren Gleichung er indes erst etwas umgestaltet, im allgemeinen nicht algebraisch quadrierbar sei, obgleich es wahrscheinlich ist, daß er dies zuerst durch die S. 399 benutzte Auflösung in Bezug auf y gefunden haben muß, die uns zugleich zeigte, daß die Quadratur zwischen den Grenzen 0 und h zu einem algebraischen Ausdruck führt. In seinen Aufzeichnungen von 1675 bemerkt er zugleich, daß die Methode, wenn sie keine algebraische Quadratrix ergibt, zu einer Reihenentwickelung führen wird. Dieser Entwurf kann also als ein kurzer und allgemeiner Hinweis auf das nämliche Verfahren gelten, das Newtons Quadraturen und Reihenentwickelungen zu Grunde liegt und in der Schrift *De quadratura* vollständig entwickelt auftritt. Es muß deshalb hervorgehoben werden, daß Leibniz damals kaum auch nur die Bemerkungen und Beispiele zu Ende der *Analysis per aequationes infinitas* (S. 361) kannte, welche dartun, daß, wie wir heute sagen, Integrationsresultate durch Differentiation bewiesen werden; denn hierüber äußert Oldenburg nichts in den diesem Buche entnommenen Aufschlüssen, die er bereits damals Leibniz mitgeteilt hatte, und die sich diesem als ganz neu erwiesen. Denkbar ist es gleichwohl, daß Tschirnhaus, der gerade aus London gekommen war, und mit dem Leibniz namentlich das hier in Frage stehende Thema besprach, solche Anregungen mitbrachte; wir haben indes gesehen, daß sich der zu Grunde liegende Gedanke bei Leibniz schon 1673 regte.

Trotz seines offenen Blickes für diese wichtige und äußerst allgemeine Anwendung von „Differentiationsresultaten“ zur Herleitung von „Integrationsresultaten“ mußte doch die ältere Geschichte der Infinitesimaluntersuchungen,

in denen die Quadraturen viel kräftiger hervortraten als die Tangentenbestimmungen, Leibniz veranlassen, seine Ausgangspunkte noch immer unter Anwendungen von Integrationen oder Quadraturen zu suchen. Wie frühere Schriftsteller und nicht zum wenigsten sein besonderes Vorbild, Pascal, bemüht er sich unter anderem, solche Resultate zu verallgemeinern, die aus Schwerpunktsbestimmungen hergeleitet waren. So bewies er in dieser Weise das soeben erwähnte Resultat $\int y dy = \frac{1}{2} y^2$. Die hier von uns durch ein Integral dargestellte Summe ist nämlich die Summe von Momenten von den Differenzen dy in Bezug auf die Abscissenachse. Ein solches Moment ist wiederum die Differenz zwischen den Momenten

$$\tfrac{1}{2}(y + dy)(y + dy) - \tfrac{1}{2} y \cdot y$$

zweier aufeinander folgenden Ordinaten. Addiert man alle diese Differenzen, indem man annimmt, daß die erste Ordinate gleich Null ist, und nennt man die letzte y, so erhält man $\frac{1}{2} y^2$.

Er benutzt den Momentensatz auch zur Herleitung verschiedener Formen von teilweiser Integration, u. a. derjenigen, die wir heute (vgl. Pascal S. 274)

$$\int_0^b xy dx = b \int_0^b y dx - \int_0^b (dx \int_0^x y dx)$$

schreiben würden. Die linke Seite ist nämlich das Moment des Flächeninhaltes $\int y dx$ in Bezug auf die y-Achse, das letzte Integral ist das Moment in Bezug auf die Gerade $x = b$; ihre Summe ist also das b-fache des Flächeninhaltes. Indem Leibniz hier $xy = a$ setzt, berechnet er $\int \log x dx$ durch teilweise Integration.

Wir haben hier die Integral- und Differentialzeichen nur gebraucht, um Leibniz' Operationen in einer bekannten Sprache wiederzugeben; er selbst bedient sich des Integralzeichens zum ersten Male in der zuletzt angeführten Gleichung. Nachdem er erst die Gleichung (mit l statt, wie oben, y) als

$$omn \cdot \overline{xl} = x \cdot \overline{omn \cdot l} - \overline{omn \cdot omn \cdot l}$$

geschrieben hat, wo wir nur wie im folgenden = statt des von ihm angewendeten Zeichens $\overline{\ \ }$ gebrauchen, sagt er, daß es nützlich ist, statt omn („alle“) $\int$, also

$$\int xl = x \int l - \int \int l$$

zu schreiben. Für den Augenblick ist es zunächst nur eine leichter zu überblickende Schreibweise; dies eben ermöglicht es aber, daran feste Regeln für die damit verbundenen einfachsten Operationen anzuknüpfen, aus denen sich die übrigen zusammensetzen lassen. So stellt Leibniz gleich die bekannten Regeln $\int x = \frac{x^2}{2}$, $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$ und $\int \frac{a}{b} x = \frac{a}{b} \int x$ auf und verwendet

gleichfalls sofort die Transformation, die als $\int(u+v) = \int u + \int v$ geschrieben werden mußte. Durch solche feste Regeln gelingt es ihm wirklich, wie er selbst hervorhebt, die Ausführung seiner Operationen zu einer Art neuer Rechnung zu gestalten.

Aus den Regeln für diese Rechnung leitet er dann Regeln für das Rechnen mit Größen her, welche der umgekehrten Operation unterliegen. Ist $\int l = ya$, so setzt er $l = \frac{ya}{d}$, wo, wie er sagt, d ebenso Differenz bedeutet wie $\int$ Summe. Statt dieses Differentiationszeichen d als Nenner zu setzen, findet er es in den folgenden Untersuchungen einmal bequem, es der zu differentiierenden Größe vorangehen zu lassen, zunächst vielleicht, weil es an dem betreffenden Ort, wo sich die zu differentiierende Größe x selbst im Nenner befindet, leichter ist, $\frac{y}{dx}$ als $\frac{y}{\frac{x}{d}}$ zu schreiben; im folgenden gebraucht er dann stets die geänderte Bezeichnung dx.

Dieser Operationssprache bedient er sich demnächst in seinen folgenden Untersuchungen, u. a. in seiner Behandlung von verschiedenen umgekehrten Tangentenaufgaben, die ihn ganz besonders interessierten. Erst behandelt er die Aufgabe, eine Kurve zu finden, deren Subnormalen, die er w nennt, zu den Ordinaten y umgekehrt proportional sind, so daß

$$w = \frac{b}{y}$$

wird. Da er hier das Differentiationszeichen d ebensowenig, wie wenn er $\int l$ schreibt, auf die Abscisse oder die unabhängige Variable selbst anwendet, nennt er ihre Differenzen nicht dx, sondern z. Früher hat er aber gefunden, daß $\int wz = \frac{y^2}{2}$ oder, da das Differentiationszeichen hier noch in den Nenner gesetzt wird, daß $w = \frac{y^2}{2d}$ ist. Aus der Quadratur des Dreiecks folgt indessen, wie er sodann bemerkt, $\frac{y^2}{2d} = y$. Also ist $wz = y$. Die gegebene Gleichung ergibt dann $\frac{bz}{y} = y$ oder $z = \frac{y^2}{b}$. Nun ist $\int z = x$, also $x = \int \frac{y^2}{b}$, was der Quadratur der Parabel zufolge $\frac{y^3}{3ba}$ ist, wo a ein Homogeneitätsfaktor ist. Also wird $x = \frac{y^3}{3ba}$ die Gleichung der gesuchten Kurve.

Die Auflösung ist offenbar, da w der Ähnlichkeit der Dreiecke zufolge, die Leibnizens Tangentenbestimmungen zu Grunde liegen, gleich $y\frac{dy}{dx}$ ist, mit der folgenden identisch. Die gegebene Gleichung läßt sich als

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{b}{y}$$

oder durch Trennung der Variabeln als

$$y^2\,dy = b\,dx$$

schreiben, woraus das Resultat hervorgeht. Leibniz rechnet es sich besonders hoch an, daß er das Resultat findet, indem er y und nicht x zur unabhängigen Variablen wählt, und dies ist auch, wie wir bemerkt haben (S. 402), bei seiner damaligen Auffassung ein größerer Schritt als heutzutage oder in Barrows älterer und einfacherer Behandlung ähnlicher Aufgaben. Der Übergang führt sogar einen Sprung mit sich in seinem Gebrauch von Bezeichnungen, indem zu erwarten wäre, daß er durch $\int \frac{y^2}{b}$ dasjenige bezeichnen würde, was wir heute $\int \frac{y^2}{b}\,dx$ schreiben, während es hier $\frac{1}{a}\int \frac{y^2}{b}\,dy$ bedeutet.

Dieser Vergleich mit dem, was uns heute eben durch den Gebrauch der verbesserten Symbole Leibnizens selbst leicht ersichtlich ist, erklärt, daß er teils durch die vollständige Behandlung von dergleichen Aufgaben, teils durch seine vergeblichen Versuche, durch Vertauschung der Variabeln in Gleichungen, wo sich die Variablen gar nicht trennen lassen, etwas Ähnliches zu erreichen, und schließlich durch seine fortgesetzten Untersuchungen überhaupt auf ebendiese Zeichensprache hingeleitet wurde. So wurde er allmählich veranlaßt, das Differential der Variablen, die bei einer Integration als unabhängig betrachtet wird, als Faktor innerhalb des Integralzeichens einzuführen. Es mußte ihm gleichfalls einleuchten, daß es am leichtesten sei, die Regeln für die neuen Rechnungen erst an die Differentiation und das Differentialzeichen anzuknüpfen und dann auf die Integration und das Integralzeichen zu übertragen.

So weit und zu einfachen Formen der Differentiationsregeln hatte Leibniz es zu Ende der Korrespondenz mit Newton gebracht, die 1676—77 (durch Oldenburg) geführt wurde. In Erwiderung seiner Mitteilungen an Oldenburg über seine Reihe für arc tg x hatte er mehrere kurze Aufschlüsse über Gregorys älteren Besitz dieser Reihe sowie über dessen und Newtons Reihenentwickelungen überhaupt erhalten. Mehr erfuhr er durch einen aus England kommenden Reisenden. Er bat nun brieflich um vollen Bescheid. Collins, der die Verhandlungen Newtons und Gregorys vermittelt hatte, ließ ihm nun durch Oldenburg eine wertvolle Mitteilung über die letzten Arbeiten des kürzlich verstorbenen Gregory zufließen, und etwas später schrieb Newton die bereits (S. 362—71) besprochenen ausführlichen Briefe. Leibniz war, wie wir nach allem annehmen können, durchaus im stande, den reichen Inhalt dieser Briefe verstehen zu können, und offenbarte

auch sein gutes Verständnis ihres Inhaltes durch ihre Beantwortung. Er vermag sogar richtige Mutmaßungen über die Methoden aufzustellen, auf die in den Anagrammen hingedeutet wird (S. 56). Dies war ihm möglich, teils weil Newton direkt darüber Aufschluß gibt, wozu diese Methoden gebraucht werden sollen, teils weil er sich täglich, da er stets sein Eigenes mit dem ihm von Newton Mitgeteilten verband, in reicherem Maße solche Methoden aneignete, durch die sich dasselbe erreichen ließ.

In Verbindung mit der *Analysis per aequationes infinitas*, die Leibniz nun auch bei seinem zweiten Besuch in London kennen lernte, geben die Briefe vollständige Auskunft über Newtons Reihenentwickelung von Funktionen, die durch algebraische Gleichungen bestimmt werden, über die damit verknüpften Reihenentwickelungen der Integrale dieser Funktionen, über die Inversion derart gebildeter Reihen und über die Anwendung dieser Methoden zur Reihenentwickelung logarithmischer und exponentieller, circulärer und trigonometrischer sowie einzelner anderer Funktionen. Newtons Äußerungen veranlassen ferner Leibniz in seinem zweiten Brief zu der Mutmaßung, daß er auch Reihen zur Lösung umgekehrter Tangentenaufgaben anwende, was dann wie bei den übrigen Reihenentwickelungen durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten geschehen müsse. Daß er recht hatte, wissen wir nicht bloß aus der erst weit später erschienenen *Methodus fluxionum*; was diesen wichtigen Punkt betrifft, so wurde Newtons Behandlungsweise in demselben Jahre bekannt wie die Leibniz'. In den Briefen an Wallis 1692, die dieser 1693 veröffentlichte, teilt Newton nämlich die betreffende Methode mit und erläutert sie durch ein Beispiel. Die Mitteilung machte jedoch keinen Eindruck auf diejenigen, die schon mit Leibniz' Differentialen bekannt waren und nicht glauben mochten, daß Newton, was die Auflösung der Anagramme jetzt doch klarlegte, an den Fluxionen ein Hilfsmittel habe, das er schon lange besaß. Sie schenkten Leibniz' gleichzeitiger Mitteilung über die Anwendungen derselben Reihenentwickelungsmethode in den *Acta Eruditorum* 1693 größere Aufmerksamkeit. Dieser Aufsatz verdiente auch beachtet zu werden, da er wichtige Anwendungen der Methode enthält, und zwar zu neuen und einfacheren Beweisen für die Reihenentwickelungen der oben genannten einfachsten transcendenten Funktionen, die ihm 1676 von Newton mitgeteilt waren.

Er findet z. B. die Reihenentwickelung der Zahl eines Logarithmus oder, wie wir sagen, einer Exponentialfunktion, indem er versuchsweise

$$ae^{\frac{y}{a}} = a + x = a + ly + my^2 + \cdots$$

setzt. Die aus der Definition des Logarithmus hergeleitete Differentialgleichung

$$a + x - a\frac{dx}{dy} = 0$$

ergibt sodann die Identität

$$a + ly + my^2 + ny^3 \cdots - a(l + 2my + 3ny^2 + \cdots) = 0,$$

aus der man die Koeffizienten $l, m, n, \cdots$ findet.

Newtons interessante Angaben in dem zweiten Brief, dem wir uns jetzt wieder zuwenden, über algebraische Funktionen, die in endlicher Form integrierbar sind (als Kurven, die quadrierbar sind, S. 370), mußten Leibniz interessieren, der damals ihre Richtigkeit leicht durch Differentiation kontrollieren konnte. Obgleich er nicht wie wir über die spätere ausführliche Darstellung in der Schrift *De quadratura curvarum* (S. 371) verfügte, verstand er doch sogleich, daß das Resultat dadurch entsteht, daß die Reihen von selbst aufhören, und daß Newton also darin recht habe, die von ihm angeführten Fälle seien die einzigen. Er stellt es Newton als demjenigen, der es vor allen anderen vermocht hätte, anheim zu entscheiden, ob für ein solches Aufhören allgemeine Regeln aufzustellen seien, was von seinem schon besprochenen Interesse für die Sonderung zwischen algebraischen und transcendenten Funktionen (S. 399) zeugt. Newtons Methode stimmt ja übrigens mit der von ihm selbst in allgemeinen Zügen ersonnenen (S. 403) überein. Diese hatte er kurz nach seiner Abreise von London und noch vor dem Empfang von Newtons zweitem Brief, der die Nachricht von den hier in Frage stehenden Quadraturen enthält, Newton brieflich durch Collins mitgeteilt.

Besonders hatte Leibniz gehofft, durch die Nachricht, er besitze eine Methode zur Lösung von umgekehrten Tangentenaufgaben, auf Newton Eindruck zu machen. In dieser Erwartung täuschte er sich jedoch, da Newton wenigstens nach Leibniz' erstem Brief glauben mußte, daß dessen Behandlung solcher Aufgaben nicht weiter führe als die Barrows. Er begnügte sich damit, in dem letzteren seiner Anagramme (S. 56) die zwei Methoden zu nennen, die er selbst dazu anwendete, von denen Leibniz, wie wir soeben sahen, die eine richtig erriet, nämlich die Reihenentwickelung durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Derselbe Brief enthält jedoch die wichtige Mitteilung, ein Hauptgrund, weshalb Newton seine Fluxionstheorie noch nicht veröffentlichen wolle, liege darin, daß er mit seiner eigenen Behandlung der Aufgaben, die sich nicht auf Quadraturen zurückführen lassen, noch nicht zufrieden sei. Als Beispiel von Aufgaben, bei denen diese Zurückführung möglich ist, führt er (in geometrischer Form) solche an, die nur eine Variable enthalten.

Tatsächlich hätte Leibniz allerdings, wenigstens als er Newtons zweiten Brief beantwortete, viel mehr umgekehrte Tangentenaufgaben auf

Quadraturen zurückführen können als Barrow, da ihm seine Differentiationsregeln die Mittel boten, weit schneller als dieser zu entdecken, ob sich ein vorgegebener Ausdruck durch Differentiation bilden lasse oder nicht. Wenn er so unter Benutzung seiner ähnlichen Dreiecke — die Barrow auch benutzte — eine solche in geometrischer Form vorgelegte Aufgabe in $x\frac{dy}{dx} = f(x) - y$ umgeschrieben hatte, so mußte ihm seine Kenntnis des Differentials eines Produkts zeigen, daß $d(xy) = f(x)\,dx$ ist, wodurch die Zurückführung auf eine Quadratur erreicht ist. Was wir hier $f(x)$ genannt haben, stellt er in seinem Briefe durch eine Reihe dar.

Hinsichtlich der Behandlung umgekehrter Tangentenaufgaben, sowie in jeder anderen Beziehung bleibt Leibnizens bedeutendste Leistung in dieser Korrespondenz die Mitteilung zu Anfang seines zweiten Briefes (1677) über seinen Gebrauch des Differentiationszeichens d und über die einfachsten und daher wichtigsten Regeln für das Rechnen mit diesem Symbol. Er bezeichnet die Differentiale dx und dy als die unendlich kleinen Differenzen zwischen den aufeinander folgenden Werten von x und y, jedoch ohne genauere Erklärung dieses Begriffes. Er gibt die Regel für die Bildung des Differentials einer Potenz und eines Produkts und verbindet damit die Regel für die Differentiation einer ganzen rationalen Funktion von x und y oder einer durch das Nullsetzen einer solchen Funktion gebildeten Gleichung. Er zeigt, daß de Sluses Tangentenregel eine Folge davon sei, bemerkt aber zugleich, daß sich seine eigene Methode auch anwenden lasse, sowohl wenn mehr als zwei Variable, als auch wenn Wurzelgrößen vorkommen. Letztere Größen behandelt er im Anschluß an Newtons in dessen erstem Briefe mitgeteilte Bemerkungen über den Gebrauch von gebrochenen Exponenten in der Binomialformel. Seine Regel für die Differentiation einer Wurzelgröße ist somit in der Formel $dx^z = zx^{z-1}\,dz$ enthalten. Daß er bei der Anwendung auf den Fall, daß $z = \frac{1}{3}$ ist, einen Irrtum begeht, mag daher kommen, daß er, um sich in dieser Beziehung nach Newton zu richten, anders verfährt, als er es gewohnt war; denn ältere Aufzeichnungen zeigen, daß er es tatsächlich verstand, sowohl Wurzelgrößen als Brüche zu differentiieren. Für die Übereinstimmung mit Newtons unbekannter Methode findet er mit Recht eine Bestätigung in dem Umstand, daß auch seine eigene sich umgekehrt zu Quadraturen anwenden lasse.

Wenn wir hieraus ersehen, daß Leibniz zu dieser Zeit die Grundlage seiner Differentialrechnung fix und fertig hatte, so erhebt sich wie früher bei Newton die Frage, weshalb er zauderte, dieser Methode weitere Verbreitung zu geben als durch diesen Brief. Der Brief war zunächst für Newton bestimmt, den er mit Recht im Besitze einer ähnlichen Methode

glaubte; er durfte aber annehmen, daß er auch den Mitgliedern der *Royal Society* vorgelegt werde, welche möglicherweise auch mit Newtons Methode bekannt waren. Vorläufig erwartete er wohl zunächst Aufschluß über diese in dem Gegenschreiben Newtons; ein solches kam aber nicht. Wie gut er auch selbst den Wert seiner Methode kannte, so konnte er doch nicht auf völlige Anerkennung von seiten anderer rechnen, bevor sie noch eingehender für die Öffentlichkeit bearbeitet war, und namentlich nicht, wenn er diesen Wert nicht durch neue Resultate ihrer Anwendung bestätigen konnte. Dies alles erforderte viel Arbeit; als er aber 1677 nach Hannover kam, nahm seine amtliche Stellung ihn ganz außerordentlich in Anspruch. Die Muße, die ein so fleißiger Mann wie Leibniz doch stets für eigene Arbeiten zu finden vermochte, widmete er seinen philosophischen und anderen mathematischen Interessen, die jetzt in den Vordergrund getreten waren, da die Bearbeitung der Differerentialrechnung einmal aufgeschoben war. Man muß auch daran erinnern, daß die Veröffentlichung fertiger Arbeiten damals nicht so schnell erfolgte wie jetzt. Wir brauchen in dieser Beziehung nicht einmal zurückzugreifen und daran zu erinnern, wielange es dauerte, ehe die meisten der Arbeiten Fermats gedruckt wurden, wie freigiebig er sonst auch mit Mitteilungen war. Leibniz' eigene Abhandlung über die arithmetische Quadratur (S. 398), die er schon für den Druck fertig hatte, bevor er nach Hannover kam, ist ja überhaupt nie vollständig im Druck erschienen, und wir haben die in ihr enthaltenen Untersuchungen nach seinen Aufzeichnungen und kleineren, teilweise späteren Mitteilungen wiedergeben müssen.

Wir wissen nicht, welcher von diesen Gründen am meisten zu dem Aufschub beigetragen hat. Wir haben sie nur angeführt, um zu zeigen, daß man nicht gleich nötig hat, zu der Hypothese seine Zuflucht zu nehmen, die auf die Italiener zu Anfang des 16. Jahrhunderts passen mochte, die man oft aber auch auf Newton, Leibniz und andere Mathematiker des nächsten Jahrhunderts ohne hinreichende Gründe hat anwenden wollen, zu der Annahme, daß sie ihre Methoden für sich selbst behielten, um mit den Resultaten desto mehr Aufsehen zu erregen. Durch diese Hypothese hat man auch erklären wollen, daß Leibniz sein Integralzeichen nicht zu derselben Zeit wie sein Differentialzeichen erwähnt, als wenn die Zeichen ohne Erklärung ihrer Anwendung und Darlegung ihres Nutzens irgendwie hätten von Bedeutung sein können; zu einer solchen Erklärung hätte Leibniz aber kaum in seiner ersten öffentlichen Mitteilung über die Differentiation in den *Acta Eruditorum* 1684 Platz finden können.

In dieser Mitteilung läßt er das der einen der variablen Größen x entsprechende Differential dx eine durchaus beliebige Größe sein, während

das Differential dy einer mit x variierenden Größe y definitionsmäßig als $\frac{y\,dx}{S_t}$ bestimmt wird, wenn wir mit S_t die Subtangente der Kurve bezeichnen, deren Abscisse x und deren Ordinate y ist. So hatte er nicht nötig, den undefinierten Begriff der unendlich kleinen Größen einzuführen; dies zu tun, trug er nämlich einigen auf uns gekommenen Aufzeichnungen zufolge selbst damals noch Bedenken, wie er denn auch kaum erwarten konnte, daß man diesen Begriff ohne weiteres gutheißen würde. Die Definition schließt sich ja übrigens ganz an Fermats Tangentenbestimmung (S. 332) an und weist so darauf hin, die Differentiale überall da anzuwenden, wo man sonst die Fermatsche Methode benutzt hatte. Tatsächlich fällt der Begriff ganz mit Newtons Begriff der Fluxion zusammen (den Leibniz damals nicht kannte), da auch die Fluxion einer der Variablen beliebig gewählt werden kann (S. 358).

Leibniz gibt nun in dem hier eingeführten Algorithmus die Formeln zur Bildung des Differentials einer Konstante, einer Summe, eines Produkts und eines Quotienten; späterhin zur Bildung des Differentials einer Potenz und einer Wurzel. Um die Regeln so unmittelbar wie möglich anwenden zu können, vermeidet er hier den Gebrauch gebrochener und negativer Exponenten. Daß er überhaupt nicht wie Hudde und Newton einen Buchstaben eine mit einem Vorzeichen behaftete Größe bezeichnen läßt, veranlaßt ihn zur Aufstellung eines doppelten Vorzeichens für das Differential eines Quotienten, was die Anwendung dieser Regel namentlich auf Ausdrücke mit mehreren Quotienten mehr als nötig erschwert. Kurz und klar sind die Regeln aufgestellt, nach denen man aus dem Vorzeichen des Differentials (dv) der abhängigen Variablen bestimmen kann, ob diese zu- oder abnimmt, ebenso, wie man aus dem Vorzeichen des Differentials (ddv) die Konkavität oder Konvexität der durch die Gleichung zwischen x und v dargestellten Kurve entscheiden kann. Dadurch wird es möglich, die durch $dv = 0$ bestimmten Maxima und Minima zu sondern, und $ddv = 0$ bestimmt die Wendepunkte (vgl. S. 334 und 380).

Es ist für Leibniz von besonderer Wichtigkeit, daß sich seine Regeln anwenden lassen, ohne daß man erst die Gleichungen rational zu machen braucht. Daher treffen wir unter seinen Beispielen naturgemäß auch solche, in denen dies die Rechnung weitläufiger machen würde, wie Fermats Strahlenbrechungsaufgabe (S. 331) und die Bestimmung der Tangente an den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von 6 Punkten einer Geraden eine gegebene Summe haben.

Während die Anwendungen der Differentiale unmittelbar aus ihren Definitionen folgen, weist er, um die Regeln selbst zu beweisen, auf die

Benutzung des Umstandes hin, daß man die Differentiale dx, dy, dz, $\cdots$ als zu den augenblicklichen Zuwüchsen der Größen x, y, z, $\cdots$ oder zu ihren Abnahmen proportional betrachten kann. Die Abnahmen muß er ausdrücklich wegen des unvollständigen Gebrauches berücksichtigen, den er von Größen mit beliebigem Vorzeichen macht. Die angeführte Betrachtung stimmt durchaus mit derjenigen überein, die dem Fluxionsbegriff Newtons zu Grunde liegt; man muß sich nämlich erinnern, daß darin die Zeit eine Hilfsgröße ist, über die man beliebig verfügen kann (S. 358). Durch diese Betrachtung mußte, wie Leibniz selbst bemerkt, ein vollständiger Beweis der von ihm angegebenen Differentiationsformeln jedem, der dergleichen Fragen beherrschte, also allen, die mit Fermats, Barrows und Gregorys Tangentenbestimmungen bekannt waren, ziemlich leicht fallen.

Man darf daher in Leibniz' Differentiationsformeln auch nicht hauptsächlich nach neuen Resultaten suchen. Was ihnen für die ganze Mathematik der folgenden Zeit ihre grundlegende Bedeutung verleiht, ist vielmehr der Umstand, daß sie so ausdrücklich ausgesprochen und als gemeinsamer Ausgangspunkt für alle infinitesimalen Untersuchungen aufgestellt werden, ferner ihre Verknüpfung mit einer Bezeichnung, die sie zur Grundlage einer Rechnung macht, durch die sich die weitergehenden infinitesimalen Untersuchungen gerade so ausführen lassen, wie die Untersuchungen der Analyse des Endlichen durch die Buchstabenrechnung.

Diese Bedeutung als Anfang zu einer *geometria multo sublimior* hebt Leibniz selbst zu Ende seines kurzen Aufsatzes hervor. Als Beispiel zeigt er die Anwendung auf de Beaunes Aufgabe. Damit wies er auf die umgekehrten Tangentenaufgaben hin, die sich ja von jetzt an als Differentialgleichungen gestalteten. Dagegen läßt er hier die Anwendung zur Quadratur unberücksichtigt, bekommt also auch nicht Gelegenheit, sein Integralzeichen und die damit verbundenen Rechnungsregeln anzuwenden, die aus seinen Differentiationsregeln folgen. Er selbst hatte sie, wie wir wissen, teilweise früher als diese gefunden. Um so leichter mußte er sie nun hinterher mit den Differentiationsregeln verbinden können, nachdem er gefunden hatte, daß die Differentiation den rechten Ausgangspunkt bilde. Unter seinen Manuskripten aus dieser Zeit hat man auch den Entwurf zu einer Abhandlung gefunden, welche u. a. auch die Anfangsgründe der Integralrechnung enthält. Die Bedeutung der Differentiationsregeln für die Ausführung von Quadraturen mußte übrigens allen denen einleuchten, die zugleich die Abhandlung kannten, in der er 1682 in derselben Zeitschrift Tangentenbestimmungen benutzte, um die Quadratrix einer Kurve zu finden oder zu beweisen, daß sie sich nicht algebraisch quadrieren lasse. Die Abhandlung aus dem Jahre 1684 bildet somit nicht nur die Grundlage der Diffe-

rentialrechnung, sondern demnach auch die der Integralrechnung. Eben weil man von der rechten Stelle aus begonnen hatte, kam es nur darauf an, in den Infinitesimaluntersuchungen weiter vorwärtszuschreiten, indem man sich durch die Aufgaben leiten ließ, die man sich schon gestellt hatte, oder die zu stellen die neuen Hilfsmittel und die mit ihnen gewonnene größere Leichtigkeit der Behandlung mit sich führten.

13. Anfang einer neuen Periode in der Geschichte der Mathematik.

Eben durch die Begründung eines wirklichen Anfangs einer Infinitesimalrechnung, d. h. durch die Aufstellung von Regeln, die für den Anfang einfach genug waren, und deren Kombination die weitere Arbeit ermöglichten, eröffnete Leibniz' kleiner Aufsatz vom Jahre 1684 eine neue Epoche in der Geschichte der Mathematik. Leibniz hatte ja schon früher infinitesimale Fragen in viel weitergehender Weise behandelt und sich dabei aus Schriften sowie durch brieflichen und persönlichen Verkehr mit anderen Mathematikern die damals existierenden Methoden, teilweise auch die Newtons angeeignet und gründlich und selbständig bearbeitet. So war es ihm sofort möglich, von dem neuen Ausgangspunkt aus schnell und sicher vorwärtszuschreiten. Auch hatte der vorhergehende Aufschwung der ganzen Infinitesimalmathematik, der ihm selbst zu gute gekommen war, die Zeit derart gereift, daß er ziemlich schnell Mitarbeiter fand, die sich von demselben Ausgangspunkt aus lebhaft an der weiteren Arbeit beteiligten.

Von allen tritt Leibniz am unmittelbarsten als derjenige hervor, mit dem die neue Epoche anhebt, und zwar nicht nur, wenn wir die bedeutende Arbeit betrachten, die sogleich in den von ihm geschaffenen Formen geleistet wurde und zur schnellen Entwickelung dieser Formen beitrug, sondern auch wenn wir in ihnen die noch heutigentages von uns selbst benutzten wiedererkennen. Jedoch dürfen wir, wie soeben angedeutet, derer nicht vergessen, die selbst schon Ähnliches wie er zu erreichen gewußt hatten und dabei auch ähnliche Betrachtungsweisen anwendeten; zwar hatten ihre Methoden noch nicht dieselbe formelle Entwickelung wie die seinigen, trugen aber doch zur Vorbereitung seiner zweckmäßigeren Formen bei. Von diesen Forschern haben wir schon im vorhergehenden geredet; einen von ihnen müssen wir hier jedoch besonders wieder namhaft machen, da er neben Leibniz an der Grundlage für die Mathematik der neuen Zeit unmittelbaren Anteil hat, Newton. Ein wesentlicher Teil dieser Grundlage besteht in seinen allgemeinen Reihenentwickelungsmethoden, durch welche Funktionen eine von der geometrischen Darstellung unabhängige Existenz erhalten, und die zur Berechnung der durch Integration entstehenden notwendig sind. Leibniz war ja nicht der einzige, der durch Newtons Mitteilungen mit

diesen Methoden vertraut geworden war; auch andere hatten sie verschiedentlich kennen gelernt. Diese Bekanntschaft erstreckt sich jedoch nicht auf diejenigen seiner Arbeiten, welche die allgemeine Fluxionstheorie behandeln. Auch sie gehören allerdings ganz der vorhergehenden Zeit an, und wir haben sie daher in diesem Buch erörtert; sie wurden aber erst im folgenden Jahrhundert, teilweise erst ziemlich spät bekannt. In diesem gewannen sie eine ähnliche Bedeutung wie die Schriften der Alten zu Anfang der neueren Zeit, als man sie nach und nach genauer kennen lernte. Die späte Veröffentlichung der gedachten Arbeiten Newtons brachte zwar manches, was man bereits durch Leibniz' Methoden gewonnen hatte, daneben aber auch viele neue Ergebnisse und Anregungen. Diese wirkten besonders fruchtbringend in Newtons eigenem Vaterlande, wo man zunächst wohl aus nationalen Rücksichten die von ihm erschaffenen Formen noch lange gebrauchte, auch als die Leibnizschen anderswo bereits allgemein angewendet wurden.

Eins von Newtons Werken wurde jedoch schon zu Anfang der neuen Periode veröffentlicht und bezeichnet neben der Erschaffung der Differentialrechnung einen Grenzstein zwischen dem Alten und Neuen; es waren die *Principia*. Die in diesem Werke in indirekter Weise ausgeführten Integrationen von Differentialgleichungen haben wir bereits besprochen. Ihre Aufnahme in die neue Infinitesimalrechnung, das Streben, den gelösten mechanischen Aufgaben mit dieser Rechnung übereinstimmende Formen zu verschaffen, später die Fortsetzung der Untersuchungen, in denen Newton selbst es schon so weit gebracht hatte, konnten auf lange Zeit hin dazu beitragen, die mathematische Arbeit, die Leibniz in zweckmäßige Formen hineingeleitet hatte, mit entsprechendem Inhalt zu versehen.

Mit Leibnizens Aufsatz (1684) und Newtons *Principia* (1687) endet die Zeit, welche wir in gegenwärtigem Buche zu behandeln hatten, und eine neue fängt an. Der durch Leibniz gekennzeichnete Übergang erinnert in manchem an die Wirkungen der Geometrie Descartes'. Dieser hatte allerdings nur einzelne neue Zeichen eingeführt, aber gleichzeitig die Tragweite der Operationen festgestellt, die durch die damals bereits bekannten Zeichen ausführbar waren (S. 204), so daß sich die Algebra selbst und somit die mathematische Analyse zu einer Buchstabenrechnung ausgestalten konnten; ebenso gestaltete Leibniz die Analyse des Unendlichen zu einem Rechnen mit den von ihm selbst eingeführten Zeichen. In der Hauptsache können wir daher auf diesen neuen Übergang die meisten der Bemerkungen anwenden, die wir schon S. 215 f. anläßlich der Wirkung von Descartes' Geometrie angebracht haben. Auch in der Beziehung herrscht Übereinstimmung, daß man weit mehr darauf bedacht war, die neuen Me-

thoden weiter zu entwickeln und zum Auffinden neuer Resultate anzuwenden, als ihre logische Zuverlässigkeit zu sichern. Früher konnten auch die infinitesimalen Untersuchungen auf die bewährte logische Grundlage bauen, die man vom Altertum ererbt und in vielen Beziehungen den neueren Untersuchungen angepaßt hatte, und zufolge welcher man, wenn es vonnöten war, zu einem Exhaustionsbeweis seine Zuflucht nahm. An dieses Erbe hielt sich auch Newton in seinen Regeln für genaue Grenzübergänge, die er als Einleitung zu den *Principia* aufstellt (S. 384). Da sich die durch Leibniz eingeführten Formen und Betrachtungsweisen dieser Tradition nicht anschlossen, erforderten sie tatsächlich neue logische Stützen. Man verließ sich aber auf die Geläufigkeit, mit der man allmählich diese Operationen auszuführen lernte, und auf die offenbare Richtigkeit einer Menge der gewonnenen Resultate und kümmerte sich nicht weiter um die Entwickelung der nötigen Sicherungsmittel. Man redete von und arbeitete mit unendlich kleinen Größen, ohne diesen Begriff und somit den Bereich der Operationen, die sich mittelst dieser Größen mit voller Sicherheit ausführen lassen, genau abzugrenzen, und ließ sich bald auf allerhand Rechnungen mit Größen ein, die durch unendliche Reihen dargestellt werden, ohne danach zu fragen, ob diese Reihen konvergent seien u. dgl. m. Von einigen isolierten Bestrebungen abgesehen, wurde diese mehr logische Arbeit, die immer notwendiger wurde, um der Mathematik ihre Stellung als exakter Wissenschaft zu sichern, erst zu Anfang des 19. Jahrhunderts ernsthaft in Angriff genommen, namentlich von Gauß, Cauchy und Abel, mit denen wiederum eine neue Epoche in der Geschichte der Mathematik anheben sollte.

Noch eine Übereinstimmung wollen wir berühren. Descartes' analytische Geometrie hatte sogleich ein reiches Material zu bearbeiten, indem nach ihrer Erfindung die vielen aus der altertümlichen Lehre von den Kegelschnitten überlieferten Sätze und Aufgaben in ihrer Sprache bewiesen und gelöst werden sollten. Verlieh die algebraische Darstellung oft tatsächlich den früher benutzten Zusammenhängen nur eine neue Einkleidung, was eben dazu beitrug, die neue Darstellungsform in diesen Fällen so anwendbar zu machen, so mußte sie und der mit ihr verbundene neue Überblick überdies zu neuen Fragen führen, die sich jetzt auch behandeln ließen. Ebenso fanden die Differentialrechnung und die bald mit ihr verknüpfte Integralrechnung in kurzer Zeit reichen Stoff vor, indem sie mit der Wiederaufnahme der vielen infinitesimalen Fragen beginnen konnten, die von den großen Mathematikern der jüngst verstrichenen Zeit gelöst worden waren. Die neue Behandlung durfte sich in vielen Fällen auf eine Übertragung in die neue Sprache beschränken, wie auch wir im vorhergehenden bemüht gewesen sind, durch eine derartige

Übersetzung modernen Lesern den Überblick über die Gedanken der älteren Mathematiker zu erleichtern. Der Überblick über die Sätze aber, den Leibniz und seine nächsten Nachfolger auf diese Weise gewannen, indem sie den verschiedenen Untersuchungen eine gleichförmigere und leichter zu behandelnde Gestalt verliehen, führte schnell sowohl zur Verbesserung der Methoden wie zur Stellung und Beantwortung neuer Fragen.

Der Anfang des 18. Jahrhunderts fällt gerade in eine lebhafte Entwickelung, die bereits anderthalb Jahrzehnt angedauert hatte, und die man in einer Darstellung der Mathematik dieses Jahrhunderts nicht unberücksichtigt lassen darf. Wir brauchen uns daher hier auf die Infinitesimaluntersuchungen dieser 15 Jahre nicht weiter einzulassen. Eine kurze Angabe ihres Inhalts wird indes zeigen können, wie gut es Leibniz gelungen war, eben gerade das in Angriff zu nehmen, was vonnöten war, und was man zu verwerten im stande war. Diese Angabe braucht nur kurz zu sein, weil die Untersuchungen jetzt die uns heute geläufige Gestalt annehmen; man wird also ohne nähere Erklärung verstehen können, wie man es zu den Resultaten brachte, die wir jetzt anführen wollen.

Erst wollen wir jedoch ein paar Arbeiten erwähnen, die in England erschienen und sich zunächst an Newton und seine Vorgänger anschlossen. Die 1685 erscheinende Schrift des in Cambridge wohnhaften Schotten John Craig zeigt zugleich, daß man in England bereits auf Leibnizens Arbeit über Differentiation aus dem vorhergehenden Jahre aufmerksam geworden war, und daß hier auch andere als Newton die Bedeutung der neuen Rechnung für die Quadratur oder Integration einsahen, die Leibniz damals noch nicht gezeigt hatte. Hierzu kann Craig Differentiationen anwenden, indem er auf einige der Formen zurückgeht, in denen Barrow seinen Umkehrungssatz ausspricht (S. 352 u. 355). Im Anschluß an Newton wendet Craig übrigens auch Reihenentwickelungen an, ohne jedoch neue Resultate von Bedeutung zu gewinnen. Besonders bewundert er bei Leibniz die unmittelbare Differentiation irrationaler Größen. Durch seine eigene umgekehrte Anwendung zur Integration erreicht er aber nichts weiter, als was schon in Fermats und Wallis' Quadraturen von Parabeln mit gebrochenen Exponenten vorlag. Die Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten, der Grundlage für Newtons Reihenentwickelungen, wurde 1697 von dem in England lebenden Franzosen de Moivre in den *Philosophical Transactions* dargestellt. Eigentümlicher sind die Formen, in denen Halley 1695 Reihenentwickelungen ausfindig gemacht und zur Berechnung von Logarithmen und Antilogarithmen angewendet hatte.

Indem wir uns jetzt wieder den Arbeiten Leibnizens und seiner Schule zuwenden, haben wir vorläufig zu bemerken, daß sie sich, wenn

nichts anderes angeführt wird, in den *Acta Eruditorum* finden. Übrigens wollen wir die verschiedenen Zweige der Infinitesimalrechnung je für sich betrachten und fangen am besten mit der Differentialrechnung und ihren geometrischen Anwendungen an. Hiermit hatte Leibniz selbst 1684 begonnen. Im Jahre 1686 bespricht er oskulierende Kreise und ihre Anwendung zur Messung der Krümmung; er nimmt aber irrtümlich an, ein solcher Kreis habe im allgemeinen 4 zusammenfallende Schnittpunkte mit der Kurve gemein. Dieser Irrtum wurde 1692 von Jakob Bernoulli berichtigt, indem er dartat, daß es im allgemeinen nur 3 zusammenfallende Schnittpunkte gibt. 1691 hatte dieser die verschiedenen infinitesimalen Bestimmungen an einer gewissen in polaren Koordinaten dargestellten Kurve ausgeführt, an der sogenannten helikoiden Parabel oder parabolischen Spirale mit der Gleichung

$$(a - r)^2 = b\vartheta,$$

wo r und ϑ polare Koordinaten, a und b Konstanten sind. Er bestimmt nicht nur ihre Tangenten, den Flächeninhalt eines Ausschnittes und die Länge eines Bogens, sondern auch ihre Wendepunkte. Dies gelingt ihm dadurch, daß die von einer Wendetangente auf einem festen Leitstrahl abgeschnittene Strecke ein Minimum sein muß. In einem Anhang gibt er Huygens' Bestimmung des Krümmungsradius einer auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Kurve in der Sprache der Differentialgleichung wieder. Ein paar Jahre später (1694) findet er auf diese Weise für den Krümmungsradius den Ausdruck $ds^3 : (dxddy)$. So hatte er die Gelegenheit gehabt, Leibniz' oben erwähnte Behauptung zu prüfen und dessen Irrtum zu entdecken. Er widerlegte die Behauptung teils durch eine graphische Beschreibung, wie ein Schnittpunkt einer Kurve mit einem Berührungskreis mit dem Berührungspunkt zusammenfallen kann, teils durch eine Berechnung für den Fall, daß die Kurve eine Parabel ist. Die dazu notwendige Bestimmung gleicher Wurzeln einer Gleichung führte er, wie sein Bruder schon früher in anderen Untersuchungen getan hatte, durch Huddes Multiplikation der Koeffizienten mit den Gliedern einer arithmetischen Reihe (S. 327) aus, ein Verfahren, das sich jetzt leicht durch die Differentialrechnung begründen ließ. Leibniz, der zwar Jakob Bernoullis Anschluß an seine Betrachtungsweisen wertschätzte, sich aber von seinem eigenen Irrtum nicht überzeugen lassen wollte, beschränkte sich auf eine ziemlich oberflächliche Erwiderung auf dessen allgemeine Betrachtungen; Bernoulli mußte daher auf die Sache zurückkommen. In dieser Diskussion wurde der Unterschied zwischen Berührung gerader und ungerader Ordnung von Bernoulli recht eingehend erläutert; auch ergab sie die Bestimmung paralleler Kurven. Wie sein

Bruder untersuchte Jakob Bernoulli auch Brennlinien (S. 344). Seine verschiedenen geometrischen und optischen Untersuchungen wendete er u. a. auf die logarithmische Spirale an und verweilte mit Interesse bei dem Umstand, daß die Bestimmung der sich an diese anschließenden neuen Kurven, wie Evoluten und Brennlinien, wiederum zu derselben Kurve führt.

Evoluten und Brennlinien sind Beispiele von Kurven, die als Umhüllungskurven gerader Linien erzeugt werden. Die Berührungspunkte dieser Tangenten treten, übereinstimmend mit einer bereits von Descartes gemachten Bemerkung (S. 349), als Schnittpunkte von zwei aufeinander folgenden Tangenten auf. Dies veranlaßte Leibniz, der sich auch mit diesen Fragen beschäftigt hatte, zu einer ganz neuen und sehr bedeutungsvollen Anwendung der Differentialrechnung, und zwar zu einer allgemeinen Bestimmung von Umhüllungskurven nicht nur gerader, sondern auch krummer Linien, deren Gleichungen einen variablen Parameter enthalten. Diese Bestimmung erzielt er, wie es noch heutigentags geschieht, durch Differentiation der Gleichung der veränderlichen Kurve in Bezug auf den variablen Parameter, während die Koordinaten konstant bleiben. Dies Verfahren entwickelte Leibniz 1692 mit voller Klarheit und erläuterte er 1694 durch Beispiele.

Auch hat man Leibniz einige Erweiterungen der Differentialrechnung selbst zu verdanken, namentlich die bekannte zu der Binomialformel stimmende Formel

$$d^m(xy) = d^m x\, d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x\, dy + \frac{m(m-1)}{2} d^{m-2} x\, d^2 y + \cdots.$$

Zugleich gibt er hier zum ersten Male die Anzahl der Differentiationen nicht, wie er es früher getan hatte, durch eine Wiederholung des d, sondern durch einen Exponenten neben dem d (also auch $d^0 y = y$) an. Vorläufig trat diese Formel jedoch nur in einer Korrespondenz mit Johann Bernoulli 1695 auf. Dagegen stellt er 1695 in einem Aufsatz die Formel

$$d(m^n) = m^n \log m\, dn + n m^{n-1} dm$$

auf und kommt in dieser Beziehung Johann Bernoullis ausführlicheren Untersuchungen über exponentielle Funktionen zuvor.

Durch diese verschiedenen Arbeiten gediehen die Differentialrechnung und ihre geometrischen Anwendungen in dem Grade, daß noch vor Schluß des Jahrhunderts über dies Thema ein zusammenfassendes Werk erscheinen konnte, de l'Hospitals *Analyse des infiniment petits* 1696. Von neuen Ergebnissen enthält dies Werk die Anwendung der Differentiation zur Bestimmung der Grenzwerte solcher Größen, welche den Wert $\frac{0}{0}$ annehmen, sowie eine eingehendere Erörterung solcher Punkte einer Kurve, in denen $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder ∞ wird, und der entsprechenden Punkte der Evolute.

Als Leibniz seine Differentiation veröffentlichte, war ihm, wie wir wissen, die Bedeutung völlig klar, die ein eingehendes Studium der Differentiationsresultate für die Ausführung der umgekehrten Operation habe, die bald von den Brüdern Bernoulli den Namen Integration erhielt. Man meinte damit sowohl die Integration von expliziten Differentialen, die mit den älteren Quadraturen zusammenfallen, als auch die allgemeinere Integration von Differentialgleichungen, durch die allgemeinere umgekehrte Tangentenaufgaben gelöst werden. Für die Integration expliziter Differentiale hatte Leibniz selbst schon das Zeichen $\int$ angewendet, noch bevor er sein Differentiationszeichen einführte (S. 404). Öffentlich tritt er zum ersten Male mit seinem Integralzeichen in dem Aufsatz *Geometria recondita* 1686 auf. Er hebt hier hervor, welche Bedeutung es hat, nicht zu versäumen, das Differential dx der unabhängigen Variablen unter dem Integralzeichen hinzuschreiben. Da dx seinen Differentiationsprinzipien vom Jahre 1685 zufolge gleich 1 gesetzt werden darf, gerade wenn x die unabhängige Variable ist und also gleichförmig variiert, ist es allerdings zulässig, dies nicht zu tun; Leibniz erinnerte sich aber sicherlich der Schwierigkeiten, die ihm selbst dadurch entstanden waren (S. 406), namentlich wenn er eine neue unabhängige Variable einführen sollte. In der genannten Arbeit hebt er übrigens auch die Integration und die umgekehrten Tangentenaufgaben im allgemeinen als den Ursprung transcendenter Größen hervor (den Terminus Funktion gebraucht er jedoch noch nicht). Er rügt hier — wie öfters —, daß Descartes sie habe aus der Geometrie ausschließen wollen; er selbst bezeichnet sie durch einen einzelnen Buchstaben und unterzieht sie der Differentiation. Auch bespricht er ihre Darstellung durch Gleichungen von algebraischer Form mit unendlich viel Gliedern; die schöne Form, in der er Reihenentwickelungen der einfachsten Transcendenten aus Differentialgleichungen herleitet, haben wir bereits erwähnt (S. 407). In dieser Verbindung haben wir zu bemerken, daß die noch zu erwähnenden Bestimmungen von Kurven, die gewissen mechanischen Bedingungen unterliegen, Leibniz auch aus dem Grunde interessierten, daß sie zu mechanischen Konstruktionen von Kurven führen, die bei der Darstellung transcendenter Funktionen benutzt werden können, z. B. die Kettenlinie bei der Darstellung logarithmischer Funktionen. Übrigens hatte unter anderen schon Barrow durch die Bank Kurven zur Darstellung algebraischer und solcher Funktionen angewendet, die transcendent werden; Leibniz wollte aber, wie bereits (S. 399) erwähnt, über die nichtalgebraische Natur der transcendenten Kurven Sicherheit gewinnen.

Unter diesen Umständen ist es leicht begreiflich, daß man bei der Entwickelung der Integralrechnung einer direkteren Darstellung der ein-

fachsten transcendenten Funktionen bedurfte als der alten geometrischen, die auf der Abhängigkeit der Flächen von der Abscisse einer begrenzenden Ordinate und umgekehrt auf der Abhängigkeit dieser Abscisse von der entsprechenden Fläche beruht, einer direkteren Darstellung auch als der Newtonschen, welche für die verschiedenen Funktionen Reihenentwickelungen aufstellt. Johann Bernoulli, der besonders zur Förderung der aufkommenden Integralrechnung beitrug, fängt denn auch an, die exponentiellen und verwandten Funktionen einer direkten und mit ihrem algebraischen Ausdruck verknüpften Untersuchung zu unterziehen. Dies geschieht in einem Aufsatz vom Jahre 1697, der u. a. eine durch eine unendliche Reihe dargestellte Quadratur enthält, die Leibniz sehr interessierte, und die wir heute, da wir nicht nur wie Leibniz Zeichen für unbestimmte Integrale, sondern auch für bestimmte gebrauchen,

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

schreiben können.

Übrigens suchte man namentlich die Integration von Differentialgleichungen besser beherrschen zu lernen. Solchen Gleichungen, und zwar erster sowie zweiter Ordnung, begegnet man in den geometrischen und mechanischen Aufgaben, die wir bald zu erwähnen haben, und wußte wie Newton in seinen *Principia* in vielen Fällen die mit der Integration verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden. Die Art und Weise, in der die Differentialrechnung von den Regeln für die einfachsten Operationen ihren Ausgangspunkt genommen und sich die Integralrechnung mit ihr verknüpft hatte, brachte es indes mit sich, daß man sich nicht mit der Behandlung der einzelnen Fälle, welche die einzelnen vorkommenden Aufgaben darbieten mochten, noch mit der Überwindung der Schwierigkeiten begnügte, die sie bereiten mochten. Man benutzte zugleich die schon bekannten Differentiationsregeln, um sich darüber klar zu werden, welche allgemeinen Hilfsmittel zur Integration man besitze, und welche Klassen von Gleichungen man mit ihnen integrieren könne. Ein Beispiel hiervon ist die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung. 1695 stellte Jakob Bernoulli die Aufgabe, die Gleichung

$$dy + Pydx = Qy^n dx$$

zu lösen, in der P und Q allein von x abhängig sind. Leibniz bemerkte 1696, daß sich diese Gleichung leicht in die sogenannte lineare Differentialgleichung umändere, in der $n = 0$ und deren Integration er schon früher seinen Freunden mitgeteilt hatte; Newton hatte ja übrigens in den *Principia* eine solche integriert (S. 392). Johann Bernoulli zeigt 1697, wie

sich diese Umänderung durch die Substitution $y = v^{\frac{1}{1-n}}$ ausführen lasse, und integriert auch unmittelbar die erst vorgeschlagene Gleichung, indem er $y = m \cdot z$ setzt, wo m und z neue Variable sind, von denen er in angemessener Weise über z verfügt.

Er hatte übrigens schon 1694 sowohl (wie Barrow, S. 356) die Bedeutung der Trennung der Variabeln hervorgehoben, als auch eine allgemeine Behandlung von Differentialgleichungen 1. Ordnung und 1. Grades versucht. Aus dieser Behandlung geht hervor, daß die durch sie dargestellten ebenen Kurven eine Gesamtheit bilden, von der je eine durch einen Punkt der Ebene geht, und er bestimmt den geometrischen Ort der Wendepunkte dieser Kurven. Sein damaliges vielseitiges Streben, dies Thema einer umfassenden Behandlung zu unterziehen, offenbart sich übrigens nicht nur in dem, was von ihm vor dem Ende des Jahrhunderts herausgegeben worden war, sondern vollkommen so deutlich in seinem Briefwechsel mit Leibniz und in einigen Vorträgen über die Integralrechnung, die er zu Paris ausarbeitete, um de l'Hospital in diese Rechnung einzuführen, die er aber erst weit später veröffentlicht hat. Wir können uns hier mit einigen Bemerkungen begnügen. Aus den Briefen nennen wir die Umformung von Gleichungen, die in x und y homogen sind, durch die Substitution $y = xz$ in solche, in denen sich die Variablen trennen lassen. Er erwähnt auch Gleichungen der Form

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

als integrierbar. Die genannten Vorträge bilden ein Beispiel dafür, daß man bei Einführung neuer Betrachtungsweisen oft mit Schwierigkeiten zu kämpfen haben kann, die in älteren Behandlungen bereits überwunden sind Die früher durch Quadraturen dargestellten Integrale waren zunächst bestimmte Integrale mit höherer und niedrigerer Grenze. Daher konnte Barrow auch (S. 356) die Schwierigkeit überwinden, die dadurch entstand, daß eine gewisse umgekehrte Tangentenaufgabe zu der Quadratur $\int \frac{dx}{x}$ führte, indem er als niedrigere Grenze nicht wie gewöhnlich 0, sondern eine beliebige positive Konstante benutzte. Die Operation, die Johann Bernoulli als Integration bezeichnete, war dagegen zunächst nur eine Umkehrung der Differentiation; für die mit dieser Umformung verbundene Einführung eines willkürlichen konstanten Addenden hatte Leibniz' Schule damals noch keinen rechten Sinn. Johann Bernoulli wußte allerdings in seinem Aufsatz von den exponentiellen Funktionen, daß $\int \frac{dx}{x} = \log(x)$ wird, was richtig ist, wenn $x = 1$ als niedrigere Grenze betrachtet wird.

In den Vorträgen schließt er dagegen aus $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, daß $\int \frac{dx}{x} = \infty$, was wiederum richtig ist, wenn $x = 0$ zur niedrigeren Grenze gewählt wird; um diese unendliche Größe zu vermeiden, wendet er verschiedene Kunstgriffe an, die Differentialgleichungen so umzugestalten, daß sie nicht zu Integralen von dieser Form führen.

Noch haben wir zu bemerken, daß sich Johann Bernoulli, von Leibniz unterstützt, auch bemühte, die durch Integration entstehenden Größen nicht nur auf Quadraturen, sondern auch auf Rektifikationen zurückzuführen. So stellte er logarithmische Größen nicht durch Hyperbelflächen, sondern durch Parabelbogenlängen dar.

Beim Jahrhundertwechsel war also auf dem Gebiete der Integralrechnung noch so viel in Vorbereitung, daß von einem vorläufigen Abschluß, wie ihn die Differentialrechnung in de l'Hospitals Buche gefunden hatte, keine Rede sein konnte. Es zeigte sich denn auch, daß sich die Entwickelung unmittelbar fortsetzte, indem gleich zu Anfang des neuen Jahrhunderts eine Arbeit von Leibniz über die Zerlegung von Brüchen erschien, ein wichtiges Hilfsmittel, von dessen Gebrauch wir bisher nur ein einziges Beispiel haben anführen können (S. 360). Die erste Gesamtdarstellung eines Abschnittes der Integralrechnung entstammt auch nicht der Leibnizschen Schule, sondern findet sich, wie oben erwähnt, in Newtons Schrift *De quadratura curvarum* (1704). Er läßt hier das von der Leibnizschen Schule Veröffentlichte unberücksichtigt, bringt aber in diesem Werke vieles, was diese unbeachtet gelassen hatte.

Wir führten schon eine unendliche Reihe an, auf die Johann Bernoulli eine gewisse Quadratur zurückführte. Man verdankt ihm indes auch eine allgemeine Reihenentwickelung für ein beliebiges Integral, nämlich

$$\int n dz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 n}{dz^2} + \cdots,$$

was leicht durch Differentiation dargetan wird und übrigens mit der späteren Taylorschen Reihe in enger Verbindung steht. Früher hatte Jakob Bernoulli eine von der Differentialrechnung unabhängige Behandlung einer großen Anzahl unendlicher Reihen in Angriff genommen; veröffentlicht wurde sie 1689—1704, nachdem sie seinen Schülern Themata für akademische Disputationen geliefert hatte. Die Reihen sind derselben Art wie diejenigen, die in der ersten Zeit Leibniz beschäftigt hatten (S. 397), ja, fallen teilweise mit ihnen zusammen. Wir wollen nur ein paar Bemerkungen über den logischen Wert dieser Untersuchungen beibringen. Erst wird ein wirklicher Beweis dafür geliefert, daß a^n, wenn n ins Unendliche wächst, selbst ins Unendliche wächst oder bis auf den Grenzwert 0 schwindet, je nachdem

$a \gtrless 1$. Dies ergibt sich daraus, daß eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $a > 1$ schneller wächst als eine arithmetische mit denselben beiden ersten Gliedern. Ebenso wird bewiesen, daß $\frac{a+nb}{c+nd}$ den Grenzwert $\frac{b}{d}$ erhält, wenn n ins Unendliche wächst. Daß

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1$$

ist, was schon Lord Brouncker exakt bewiesen hatte (S. 313), findet Jakob Bernoulli, indem er diese Reihe als Differenz zwischen den beiden Reihen

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots$$

und

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots$$

betrachtet. Er hegt jedoch selbst einigermaßen Bedenken gegen dieses Rechnen mit zwei divergenten Reihen und zeigt, daß ein ähnliches Verfahren in anderen Fällen zu sinnlosen Ergebnissen führen kann. Daß dies hier nicht der Fall ist, erklärt er daraus, daß das unbenutzte Glied der einen der beiden Reihen, deren Differenz 1 sein soll, den Grenzwert 0 hat. Das Resultat wird somit tatsächlich als der Grenzwert aufgefaßt, dem sich die Differenz zwischen zwei endlichen Reihen nähert, wenn die Anzahl der Glieder gleichzeitig und gleichförmig, und zwar ins Unendliche, wächst. Der Gedankengang selbst mag richtig sein; die Ausdrucksweise hat aber sowohl bei ihm selbst mehrere unhaltbare Vergleichungen zwischen divergenten Reihen vorbereitet, als auch dem häufigen Gebrauch unendlicher Reihen ohne Sicherstellung ihrer Konvergenz im 18. Jahrhundert vorgearbeitet. An Jakob Bernoullis Untersuchungen über Reihen schließt sich seine Wahrscheinlichkeitsrechnung an, die aber erst lange nach seinem Tode erschien; in ihr treten die sogenannten Bernoullischen Zahlen auf.

Fast mehr Aufsehen, als die Fortschritte der Differential- und Integralrechnung selbst, erregten gegen Ende des 17. Jahrhunderts die geometrischen und mechanischen Aufgaben, die man stellte und mittelst der neuen Rechnung löste. Hierzu waren freilich die Zeichensprache und die Formen dieser Rechnung nicht notwendig. Daher konnte Huygens, der selbst kein Bedürfnis nach den neuen Formen fühlte, ja, sich ihnen gegenüber eine Zeitlang ablehnend verhielt, in der Behandlung solcher Aufgaben mit Erfolg mit den Jüngeren wetteifern. Diese Aufgaben kamen auch weder an Anzahl noch an Bedeutung den Aufgaben ähnlicher Art gleich, die Newton, ohne sich, wenigstens in seiner Darstellung, der Fluxions- oder Differentialrechnung zu bedienen, in den *Principia* behandelt hatte. Die von Leibniz und den Brüdern Bernoulli behandelten Aufgaben waren jedoch besonders

geeignet, die großen Vorzüge der neuen Rechnung und der mit ihr verbundenen festen Bezeichnungen hervorzuheben. Die Regeln für die Behandlung einer algebraischen Aufgabe, die durch Descartes zu völliger und allgemeiner Anwendung gelangt waren (S. 205), daß man sämtliche bekannte wie unbekannte Größen durch Buchstaben bezeichnen, sodann die Gleichungen aufstellen und bearbeiten soll, welche die vorgegebenen oder erforderten Verbindungen zwischen den Größen ausdrücken, diese Regeln ließen sich jetzt auch auf infinitesimale Aufgaben anwenden. Gleichungen zwischen den Koordinaten x und y, ihren Differentialen dx und dy und dem Bogenelement ds konnte man jetzt nämlich mittelst des charakteristischen Dreiecks aufstellen; durch Erweiterung der zu Grunde liegenden Betrachtungen erhielt man demnächst auch Differentialgleichungen höherer Ordnung. Gleichzeitig wurden, wie wir gesehen haben, die Hilfsmittel zur Integration solcher Gleichungen weiter entwickelt. Auf diese Weise wurde die Lösung solcher Aufgaben auch größeren Kreisen ermöglicht; die Urheber der Behandlungsweise selbst aber wurden durch die Lösung der gestellten Aufgaben zu neuen Aufgaben geleitet, die eine weitergehende Entwickelung der Hilfsmittel erheischten. Dadurch wurde, wie erwähnt, die Integralrechnung gefördert; zugleich entstanden aber Fragen, die Infinitesimaluntersuchungen noch tieferer Art nötig machten. Durch sie ward der Grund zur Variationsrechnung gelegt.

Dies wird sogleich einleuchten, wenn wir auch nur einige der so behandelten Aufgaben nennen. Leibniz und Huygens beschäftigten sich 1693 beide mit der geometrisch bestimmten Kurve, der letzterer den Namen der Traktorie gegeben hat, welche die Eigenschaft besitzt, daß die Tangentenstrecke vom Berührungspunkte bis zu einer festen Geraden eine gegebene Länge hat. Leibniz wird sich dabei kaum erinnert haben, daß Newton in seinem 2. Brief an ihn 1676 die Bestimmung ebenderselben Kurve als Beispiel für eine umgekehrte Tangentenaufgabe erwähnt hatte, die sich leicht lösen lasse und auf der Quadratur der Hyperbel beruhe, d. h. zu logarithmischen Funktionen führt. Huygens verallgemeinert die Aufgabe dadurch, daß er die feste Gerade durch eine willkürlich gegebene Kurve ersetzte. 1698 führte Johann Bernoulli gewissermaßen in Übereinstimmung mit seiner schon erwähnten Darstellung einer Differentialgleichung erster Ordnung durch ein System von Kurven die sogenannten Trajektorien ein, die ein gegebenes Kurvensystem unter einem gegebenen Winkel schneiden. — Von in mechanischer Weise bestimmten Kurven nennen wir zuerst die sogenannte isochrone Kurve, unter der man nicht die Cykloide, auf der ein schweres Teilchen tautochrone (Huygens) oder isochrone (Newton) Schwingungen ausführt, sondern die Kurve verstand, auf

der sich ein schweres Teilchen so bewegt, daß die Projektionen der in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken auf eine Senkrechte einander gleich sind. Die Bestimmung dieser Kurve verlangte Leibniz 1687 in den *Nouvelles de la République des Lettres;* Huygens teilt schon im nächsten Heft dieser Zeitschrift mit, daß sie eine semikubische Parabel sei. Einen Beweis dafür lieferte Leibniz sodann 1689 in den *Acta Eruditorum.* Hier gebraucht er nicht die Differential- und Integralrechnung, die er jedoch bei seiner privaten Arbeit einem auf uns gekommenen Manuskript zufolge auf diese Aufgabe angewendet hat. Öffentlich erschien dagegen ein Beweis mit diesen Hilfsmitteln 1690 von seiten Jakob Bernoullis. Dieser stellte nun eine Aufgabe von noch größerer Bedeutung, die Auffindung der Gleichgewichtsfigur eines schweren, homogenen, biegsamen Fadens (der Kettenlinie); diese Aufgabe wurde von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli gelöst.

Leibniz hat später darauf aufmerksam gemacht, daß diese Aufgabe auf die Bestimmung einer Kurve hinausläuft, deren Schwerpunkt so tief wie möglich liegt. Dadurch wird die unbekannte Kurve also derart bestimmt, daß ein ihr angehörendes Integral ein Minimum oder ein Maximum wird. Es liegt hier also keine bekannte Funktion vor, deren Maximum oder Minimum man durch Differentiation bestimmen könnte; so müssen zur Aufstellung der Differentialgleichung der betreffenden Kurve besondere Betrachtungen in Anwendung gebracht werden. Eine derartige Aufgabe hatte Newton indes schon früher in den *Principia* behandelt, und zwar die Bestimmung der Meridiankurve einer Umdrehungsfläche, gegen deren Bewegung in der Richtung der Achse in einem Medium dieses den kleinsten Widerstand leistet. Er fand in geometrischer Form für sie die Differentialgleichung $y = k \cdot \frac{ds^4}{dy^3 \cdot dx}$. Sie gehört zu den umgekehrten Tangentenaufgaben, die er seiner Mitteilung an Leibniz zufolge (S. 408) auf andere Weise als durch Reihenentwickelung, also durch Zurückführung auf eine Quadratur lösen konnte.

Eine neue Aufgabe derselben Art rührt 1696 von Johann Bernoulli her. Sie betraf die brachistochrone Kurve, auf der ein schweres Teilchen in möglichst kurzer Zeit von einem Punkt auf einen anderen fällt. Außer ihm fanden auch sein Bruder Jakob, Leibniz, Newton und de l'Hospital bald, daß diese Kurve eine Cykloide in genau bestimmter Lage sei. Dies konnte ihnen allen der besonderen Umstände wegen gelingen, die sich mit dieser Aufgabe verknüpfen. Jakob Bernoulli verfiel jedoch auf eine allgemeinere Behandlung von Aufgaben der hier vorliegenden Art und konnte daher 1697 eine neue Aufgabe allgemeinerer Natur stellen, das sogenannte isoperimetrische Problem. Sie verlangt, von allen gleich langen Kurven

zwischen zwei festen Punkten diejenige zu finden, die bewirkt, daß der teils von einer anderen Kurve, von der jede Ordinate ein gewisses Vielfaches der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate oder Bogenlänge der gesuchten Kurve ausmacht, teils von den Ordinaten in den Endpunkten und der dazwischen liegenden Strecke der Abscissenachse begrenzte Flächenraum ein Maximum oder Minimum sei.

Obgleich namentlich der Bruder bemüht war, die allgemeine Aufgabe zu lösen, so gelang es ihm doch nicht, und eine wirkliche und allgemeine Beantwortung liegt erst in Jakob Bernoullis eigenen auf diese Frage bezüglichen Abhandlungen vor, die 1700—1701 erschienen. Wir wollen hier nicht nur diese Arbeiten, sondern auch die vorausgehende Behandlung der brachistochronen Kurve und anderer Aufgaben ähnlicher Art, die Johann Bernoulli den allgemeinen Aufgaben seines Bruders gegenübergestellt hatte, unerwähnt lassen. Dies alles gehört nämlich zur Vorbereitung der Variationsrechnung, die erst im 18. Jahrhundert ihre weitere Entwickelung erhielt. Nur von der Form, in der die isoperimetrische Aufgabe gestellt wurde, wollen wir noch hervorheben, daß man hier noch zu Ende des Jahrhunderts dieselbe geometrische Darstellung einer ganz beliebigen vorgegebenen Funktion durch eine Kurve wie bisher im 17. Jahrhundert benutzte, die wir besonders bei unserer Besprechung Barrows (S. 354) hervorgehoben haben.

Was wir hier von den Infinitesimaluntersuchungen der letzten 15 Jahre des 17. Jahrhunderts berichtet haben, wird gezeigt haben, daß man die neuen Methoden mit Eifer und Erfolg anzuwenden und weiterzuentwickeln bemüht war, und daß dieses doppelte Streben gegenseitig dermaßen fördernd wirkte, daß man reich an neuen Aufgaben und reich an Hilfsmitteln zu ihrer Lösung ins neue Jahrhundert hineinschreiten konnte.

Verbesserung.

Seite 291, Zeile 15 von unten lies statt „der Ausschnitt der Spirale“ und „der halben Parabelabschnitte“ „die der Spirale gehörige Fläche“ und „der der Parabel gehörigen“.

Namen- und Sachregister.

(Bei den Namen sind die Seiten hervorgehoben, die eine Biographie oder biographische Bemerkungen enthalten. Übrigens gibt das Register nur ausnahmsweise das Vorkommen des betreffenden Wortes in dem historisch-biographischen Überblick an, auch nicht jedes zufällige Vorkommen des Wortes, wohl aber solche Besprechungen der Sache selbst, wo das Wort nicht gebraucht wird. So wird z. B. S. 246 nicht die brachistochrone Kurve selbst, sondern die irrige Annahme erwähnt, daß ein Kreis die diese Kurve charakterisierende Eigenschaft besitzen solle).

Abel 233, 363, 415.
Abû'l-Wafâ 112, 124.
Académie des Sciences 34, 46.
Acta Eruditorum 70—72.
Ahmes 144.
Al Battânî 112.
Al Chodschandî 161.
Alkarchî 151.
Analytische Geometrie 192—215, 219, 223—226, 228—229, 325—326, 415.
Anderson **24**, 52, 116, 252.
Anthonisz, Adriaen 126.
Anziehung, allgemeine 381—382, 385—387, 389—390.
— der Kugel 381, 389—390.
—, mit dem Abstande proportional 388.
Apollonius 2, 43, 50, 62, 109, 121, 175—178, 180, 181, 184, 187—190, 192—199, 209, 210, 223—228, 317, 318, 320, 322, 346, 383.
Apollonius Gallus 175.
Archimedes 2, 3, 5, 7—9, 42, 82. 83, 118, 122, 126, 145, 167, 200, 201, 236, 237, 241, 243, 248, 249, 253, 255, 259, 260, 262, 265, 269, 275, 279, 280, 290, 291, 292—294, 296, 302, 307, 308, 310, 312, 316, 317, 335.
Aristoteles 3, 6, 16, 65, 235.
Arithmetische Algebra 204—205, 208, 218—223.
Arithmetische Progressionen s. Reihen.
Arithmetisches Dreieck 102, 168, 172, 397.
Arnauld 67.
Asymptotenkurve 365.
Asymptotischer Raum 262.
Auzout 295—297.

Bachet de Méziriac **28**, 29, 145—155, 160—162, 194.
Bacon von Verulam 4, 22.
Barrow, Isaac **52—53**, 54, 55, 59, 66—68, 74, 276, 351—361, 394, 401, 402, 406, 408, 409, 412, 416, 419, 421, 426.
—, sein Umkehrungssatz 351—357, 360, 401, 416.
Basreliefs, Konstruktion von 186.
Beaugrand 181, 189, 192.
Beaune, Florimond de **36**, 349, 356, 412.
—, seine Aufgabe 349—350, 356, 412.
Benedetti **7**, 243.
Bernoulli, Jakob 34, 41, 71, 72, **77—79**, 344, 417—420, 422, 423, 425, 426.
Bernoullische Zahlen 423.
Bernoulli, Joh. 34, 41, 71, 72, **77—79**, 344, 400, 418—426.
Bernoullische Gleichung, s. Differentialgleichungen.
Bernoulli, Nikolaus 78.
Betafunktionen 286.
Bewegung 234—236, 243—248, 340—342, 382—383, 385—389, 391—393, vgl. Fall-, Wurf- und Zentralbewegung.
Binomialformel u. Binomialkoeffizienten 101—102, 116—117, 124, 166—168, 362—363, 369, 395.
Boineburg 65.
Bombelli, **7**, 90, 93—97, 103, 151, 302.
Bosse 35, 36, 185, 186.
Boyle 49, 51.
Brachistochrone Kurve 246, 425—426.
Bradwardinus 26.
Brahe, Tycho VI, 2, 13, 14, **15—18**, 19—21, 113—115, 129, 142.
Brennkurven 344—345, 418.
Brianchon 192.
Briggs IV, **27—28**, 48, 138—142, 173, 230, 252, 320.
Brouncker, Lord **49**, 165, 303, 304, 308—313, 315, 423.
Buchstabenrechnung 97, 208, 218—219, 224.
Bürgi, Jobst 18, **21**, 94, 95, 110, 122—126, 129, 130, 132—134.

Campanus 1, 118.
Carcavy, Pierre de **34**, 39, 51, 296.
Cardano **6**, 7, 12, 83—94, 96, 100, 103, 104, 106—109, 124, 145, 169, 170.
Carl I., englischer König 52.
Carl II., englischer König 53.
Carnots Satz 187.
Castelli 10.
Cataldi **11**, 151, 302.
Catherine de Parthenay 23.
Cauchy 415.
Cavalieri VI, **10—11**, 22, 42, 45, 47, 67, 238, 240, 241, 256—267, 278—280, 289—291, 293, 298, 319, 397, 402
Cavalieris Satz 259.
Ceulen, Ludolf von **26**, 126.

Chasles 190, 201, 202.
Christian IV., König v. Dänemark 16.
Christine, Königin v. Schweden 32.
Chuquet 22, 95, 100, 131, 132, 145.
Cissoide 286—287, 323.
Clavius, Christoph **15**, 42, 130.
Colbert 34.
Collins **51**, 52, 53, 55, 56, 65, 66, 68, 69, 360, 361, 367, 371, 373, 395, 406, 408.
Commandino **7**, 236, 241.
Cossisten **11**.
Cotes 64.
Craig **416**.
Cramer 79.
Cromwell 48, 51.
Curtius 129.
Cykloide 246, 272, 295—296, 322—323, 325, 333, 338—342, 369, 381, 398, 425.
—, Fall auf der Cykloide 341—342, 347, 388, 392.
—, Epi- und Hypocykloiden 345, 381, 388.
Decimalbrüche u. Decimalsystem 123—124, 133, 138, 166.
Desargues **35—36**, 37, 38, 40, 41, 175, 178—192, 202, 204, 225, 345.
Desargues' Satz 183.
Descartes 4, 28, 29, **30—33**, 34—38, 40, 42—47, 54, 65, 74, 76, 99, 101, 110, 155, 159, 178, 190, 191, 195, 197, 199, 201—227, 233, 244, 247, 278, 289, 294, 295, 323—329, 332—334, 338, 340, 344—346, 348—350, 356, 363, 366, 383, 401, 414, 415, 418, 419, 424.
Descartes' Blatt 271, 332—333.
Descartes' Ovalen 211, 323, 326, 346,
Descartes' Zeichenregel 212, 233.
Dettonville, Amos s. Pascal.
Differentiale 401, 405, 409—412, 424.
—, höherer Ordnung 411, 418.
Differentialgleichungen 134, 142, 346—351, 355—357, 377—379, 384, 388, 390-393, 405—408, 420—422, 423—426.
—, unmittelbar integrierbare 377.
—, Integration durch Trennung der veränderlichen 356—357, 421.
—, homogene 421.
—, lineare 388, 392, 420—421.
—, Bernoullis 420—421.
—, höherer Ordnung 388, 391—393, 424.
—, lineare in x und y 421.
—, totale 379.
—, Darstellung durch ein Kurvensystem 421, 424.
Differentialgleichungen, Integration durch Reihen 377—378, 407—408, 419.
Differentialquotienten durch $\frac{y}{S_t}$ dargestellt 332, 337, 349—357, 359, 403, 411.
Differentialrechnung 218, 276, 394—395, 397, 406, 409—413, 415—419.
Differentialzeichen 405—406, 409—413, 418—419.
Differentiation 316—338, vgl. Tang.-Best.
—, Fermats 159, 329—336.
—, Newtons 361, 375—376, 384.
—, Leibnizens 394—395, 409—412.
—, Verhältnis zur Integration 300, 330, 351, 360, 400—403.
—, wiederholte 375—376, 392—393, 411, 418.
—, irrationaler Größen 361, 395, 409, 416.
Differenzen, endliche 230, 393, 397.
Differenzenreihen, s. Reihen.
Diophant 2, 28, 29, 83, 94, 130, 147, 148, 153—155, 161.
Diorismus 85, 87, 316—317, 329.
Doppelverhältnisse 187, 189—190.
Dreiteilung des Winkels 81, 117—119.
Ductus plani in planum 262, 270.
Duhamel 323.
Dürer, Albrecht 4, **13**, 176, 345.

Einschiebung 109, 117—118, 213.
Elisabeth, Gräfin von der Pfalz 32.
Elliptische Funktion 369.
Epicykloiden s. Cykloide.
Eudoxus 99, 130, 235.
Euklid 1, 12, 21, 35, 40, 54, 96, 99, 106, 111, 118, 121, 130, 145, 158, 182, 183, 189, 204, 220—222, 302, 303, 366.
Euler, Leonhard 78, 160, 165, 231, 283, 286, 289.
Euler, Paul 78.
Eutokius 82, 87, 317, 318.
Evoluten 342—345, 379—381, 418.
Exhaustionsmethode VI, 221, 235, 240, 248—249, 264, 274, 295, 302, 415.
Exponenten 130—132, 206.
—, gebrochene 132, 282, 288, 362—363, 409, 411.
—, negative 282, 288, 362—363, 370, 411.
—, Null 132.
—, unendlich 422—423.
Exponentialfunktion 367, 407, 418, 420; vgl. Reihen.

Faille, de la **42**, 238—240, 336.
Fallbewegung 243—246.
—, in einem widerstehenden Medium 391—392.
Faulhaher, Johann **12**, 166, 167.
Fermat 28, **29—30**, 33—34, 36—38, 40, 42, 45, 48, 50, 67, 154—172, 175, 189, 190, 192—203, 207—211, 215, 223, 224, 226, 227, 244, 260, 261, 263—275, 279—281, 287, 289—292, 294—297, 317, 326, 329—338, 340, 344, 349, 351, 354, 359, 360, 363, 373, 380, 398, 401, 402, 410—412, 416.
Fermats Satz 159.
Fermats Konoide 261, 292.
Ferrari **7**, 92, 93, 103, 345.
Ferro, Scipione del **4**, 5, 6, 83—85, 93, 99, 104, 106.
Fincke, Thomas 15, **18**, 23, 113, 143.
Fiore od. Floridus 4, 5, 84.
Flächen 2. Ordnung 185, 200, 237—238, 260.
Flächeninhalte als Summen indivisibler Größen 257—261; vgl. Integration.
Fluxionen und Fluenten 358—359, 361, 373—384, 392—394, 412, 414.
Fluxionen, höhere 375—376, 392—393, 396.
Fluxionsgleichungen 377—379, vgl. Differentialgleichungen.
Fluxionszeichen 361, 374—376, 396.
Frénicle de Bessy **28**, 29, 156, 157.
Friedrich II., König v. Dänemark 15.
Funktion, willkürliche (vgl. Transcendenz), geometrisch dargestellt 270, 354—355, 394, 420, 426.
—, durch eine Reihe 366, 369, 420.
—, durch Bogenlänge 422.
—, als Integral 419—420.

Galilei 2—4, **7—9**, 10—11, 13—14, 16, 20, 31, 32, 45, 46, 52, 75, 235, 236, 238, 242—246, 256, 260, 262, 292, 318, 320, 321, 338, 347, 351, 353.
Gauß 166, 415.
Geometrische Algebra der Griechen 81, 193, 203, 218, 220, 223.
Geometrische Progressionen s. Reihen.
Geschwindigkeit 243—245, 358.
—, Zusammensetzung von Geschwindigkeiten 321—326, 340, 352—353, 382.
—, vgl. Prinzip der lebendigen Kraft und der virtuellen Geschwindigkeiten.
Ghetaldi **11**, 194, 213.
Girard **25—26**, 91, 94—96, 109, 110, 213, 233.
Gleichungen, Theorie der algebraischen 88—90, 103—110, 212, 231—233, 329.
—, 3. Grades 81—91, 99, 103, 104, 106—109, 174, 213—215, 232, 317—318.
— —, der irreduzible Fall 85—88, 90—91, 117—118.
—, 4. Grades 91—94, 103, 106, 212—214, 232.
—, 5. und höheren Grades 215, 231—233.
—, trinomische 98, 104—105, 107, 125.
—, Kreis- u. Winkelteilungsgleichungen 91, 102, 117—122, 126.
—, Ausdrücke der Koeffizienten durch die Wurzeln 89, 107.
—, Potenzsummen der Wurzeln 109, 233.
—, Zusammensetzg aus Faktor. 106-110.
—, auf Null gebracht 110.
—, Zeichenregel Descartes' 212, 233.
—, gleiche Wurzeln 89, 231, 316—317, 326—330, 417.
—, numerische Auflösung 124—126, 367.
—, Auflösung durch geometrische Konstruktion 117—119, 199, 212—215.
—, Elimination 193—194, 231, 233.
—, unbestimmte 1. Grades 145—151, 153.
—, unbestimmte höheren Grades 153, 161—166.
Gregorius v. St. Vincentius **42**, 45, 67, 200, 201, 262—263, 267, 270, 291, 319, 397.
Gregory, James **51—52**, 55, 230, 303—306, 351, 354, 361, 370, 396, 399, 401, 406, 412.
Grenzbegriff, infinitesimaler 384, 415.
Grenzwert 418, 422—423.
Guldin **21—22**, 239—241, 252, 256, 275, 290, 292, 293, 296, 301.

Halley **50—51**, 60, 61, 173, 385, 416.
Harriot **26**, 94, 101, 108—110.
Harvey 33.
Hasardspiel 169.
Heinrich III., König v. Frankreich 23.
Heinrich IV., König v. Frankreich 23, 24, 120.
Heraklit 109.
Heron 236.
Heuraet, van **43**, 50, 295, 334.
Hire, de la **41**, 191, 192, 225.
Homologe Figuren 179, 185.
Hooke **49**, 54, 59—61, 385.

l'Hospital, Marquis de **41**, 72, 78, 231, 418, 421, 422, 425.
Hudde **43—44**, 64, 72, 99, 206, 327—329, 334, 362, 411, 417.
Huygens 33, 34, 39, 41—43, **44—47**, 49—52, 54, 57, 59, 60, 64, 66, 67, 72, 74, 75, 78, 152, 172, 173, 213, 246—248, 278, 286, 287, 290, 294, 296—300, 305—308, 310, 329, 330, 334, 336—338, 340—345, 347, 369, 380, 381, 385, 386, 388, 397, 399, 417, 423—425.
Hydrostatik 241—242.
Hyperbeln höherer Ordnung, vgl. Quadratur.
Hypocykloide s. Cykloide.

Jakob von Speier 153.
Ibn Jûnus 128.
Imaginäre Zahlen, Größen und Wurzeln 90—91, 109—110, 212, 233.
Indices s. Stellenzeiger.
Indivisible Größen VI, 256—257.
Induktionsbeweis, vollständiger 168, 172.
Induktion, unvollständige, bei Kepler 248, 249, 251, 254—255.
—, bei Wallis 279—288, 363.
Infinitesimaluntersuchungen 142, 219, 223, 234—426.
Inhalt von Oberflächen, vgl. Quadratur.
Integrale, algebraische 260—261, 264—267, 271—272, 280—282, 370—372.
—, circulare 260, 269, 271—272, 282—287, 301, 371, 373.
—, logarithmische 263, 267—268, 294, 301, 356, 360, 371, 373, 391, 424.
—, elliptische 298, 368—369.
—, $\int \sin \vartheta \, d\vartheta$ 254—255, 275—276, 301.
—, anderer trigonometrischer Funktionen 276—277, 360.
—, binomischer Differentiale 370.
Integralrechnung 218, 402, 404—406, 416, 419—426.
Integralzeichen 402, 404—406, 410, 419.
Integration, der Name 419.
—, unter verschiedenen Formen 195, 237—241, 244, 248—300.
—, bei Kepler 248—256, 259, 279, 301.
—, Cavalieri 256—261, 263—267, 273, 279—280, 289—291.
—, Torricelli 262, 291, 293—294.
—, Gregorius von St. Vincentius 262-263, 267, 270.
—, Fermat 261, 263—272, 279—280, 289—292, 294—297.
Integration, bei Pascal 270-277, 279-280, 290, 294, 296—298.
—, Roberval 257, 265, 272—273, 280, 294, 297—298, 301.
—, Wallis 278—289.
—, Huygens 278, 286—287, 294, 296—300.
—, Newton 360—362, 370—374, 376, 403.
—, Leibniz 398—399, 402—406, 418—419.
—, Johann Bernoulli 418—422.
—, durch Substitution 269—272, 276—277, 360, 372.
—, teilweise 269—272, 275, 277, 296—297, 373, 404.
—, durch Zerlegung von Brüchen 360, 422.
—, durch successive Reduktion 272, 287, 372.
—, wiederholte 373.
—, durch Reihenentwickelung 308—315, 362—367, 372, 377—379, 403, 407—408, 422.
—, Verhältnis zur Differentiation 300, 335, 351, 360, 400—403.
—, vgl. Quadratur und Differentialgleichungen.
Integrationskonstanten 356, 373, 379, 421—422.
Integrationsresultate, von Differentiationsresultaten hergeleitet 349, 360—361, 371—374, 401—403, 408, 416, 419—422.
Interpolation, numer. 124—126, 139—142; vgl. Induktion, unvollständige b. Wallis.
Interpolationsformeln 230—231, 371.
Involution 181—185, 317.
Jordanus Nemorarius 118.
Journal des Savants 34.
Isochrone Kurve 424—425.
Isochronismus s. Tautochronismus.
Isoperimetrisches Problem 425—426.

Kegelschnitte(n), die Lehre (von den) 177—192, 195, 197—201, 208—211, 214, 223—229, 318—319, 344, 383, 415.
—, Asymptotengleichung 176, 198.
—, Beziehung auf konjugierte Durchmesser 198—199, 209—210, 223—226.
—, Bestimmung der Achsen 184, 225-226.
—, Pol und Polare 179—181, 184, 191.
—, Allgemeine Punktsätze 183, 186-189, 227.
—, Allgemeiner Tangentensatz 227—228.
—, Bewegung auf Kegelschnitten 244—245, 321—322, 385—388.
—, vgl. Ort zu 3 etc. Geraden.

Kepler 2, 4, 8, 9, 11, 13, 16, 17, **19—21**, 22, 32, 49, 94, 110, 122, 131, 142, 173, 177, 240, 241, 243, 248—256, 259, 275, 279, 289, 290, 293, 301, 319, 320, 330, 369, 381, 385, 387.
Keplers Gesetze 252—253, 381—383, 385—387.
Keplers Problem 254, 369.
Kettenbrüche 151—152, 302—303.
Kettenlinie 347—348, 419, 425.
Kollineare Figuren 179, 185.
Kombinationen und Permutationen 167—168, 397.
Konchoiden 211, 273, 322, 324.
Konkavität 353, 411.
Konvergenz 121—122, 302, 304, 310—316, 365—366, 370, 400, 415, 423.
Koordinaten 218, 379.
—, Parallel- 176, 192—201, 208—215, 223—229.
—, Polar- 177, 200—201, 291—294, 379, 417.
—, bipolare 323, 346, 379.
—, sphärische 112, 195.
—, Raum- 200, 212.
Koppernikus 2, 8, 13, **14**, 17, 19, 20, 113, 345.
Kraft, Zusammensetzung und Auflösung 242.
—, -begriff Newtons 381—382.
—, vgl. Prinzip der lebendigen Kraft.
Kreismessung; vgl. π.
Kreismessung, Vietas 121, 303.
—, Wallis' 282—285, 303.
—, Gregorys 303—304.
—, Huygens' 307—308, 369.
—, Newtons 368—369.
—, Leibnizens 398—399.
Krümmung 343—344, 379—381, 417.
Kubatur s. Rauminhalt.
Kurven, algebraische 210—211, 215.
—, 3. Ordnung 227—229.
Kurvensingularitäten 418.

Lagrange 165.
Lalouvère 39, 40, 294, 297.
Lambert 192.
Legendre 166.
Lebendige Kraft s. Prinzip der l. K.
Leibniz 4, 22, 33, 38, 41, 44, 47, 51, 53, 55—58, 62—64, **65—77**, 78, 79, 188, 230—233, 247, 267, 276, 297, 305, 332, 344, 359, 362, 364, 367, 369—372, 374, 376, 379, 384, 393—425.
Leibnizens characteristica geometrica 76, 231.
Leibnizens charakteristisches Dreieck 276, 400—401,
Leibrenten 173.
Leonardo von Pisa 2, 82, 124, 144, 147, 153.
Lincei dei, päpstliche Akademie 8.
Lindemann 305.
Lionardo da Vinci 4, 236.
Locke 63.
Logarithmen 127, 130—143, 347—348, 350, 356; vgl. Integrale, Quadratur und Reihen.
Logarithmische Tafeln 132—143.
Logistica speciosa u. numeralis 97.
Longomontanus **18**, 130, 142.
Loxodrome 348.
Ludolphische Zahl (π) 126.
Ludwig XIV., König v. Frankreich 44, 66.
Luther, Martin 11—12.

Maestlin 19, 20.
Mathematikerkreis in Paris 33—35, 37, 188, 192, 197.
Maurolico **7**, 166, 176, 236, 237, 241.
Maximal- und Minimalbestimmungen 87, 252, 316—321, 327—331, 333, 336—338, 379, 411, 425—426.
Mechanik 234—248, 341—342, 381—394, 424—425.
Melanchthon 12.
Menächmus 176, 366.
Menelaus 111, 182, 183, 186, 190.
Mercator, Nikolaus **50**, 55, 57, 66, 306, 313, 314, 316, 367, 397, 399.
Mercator, Gerhard, Geograph 348.
Méré, de 38, 170.
Mersenne 30, **33—34**, 45, 51, 156, 208, 322.
Methode der unbestimmten Koeffizienten 211, 213, 326, 362—366, 371—372, 378, 403, 407—408, 416.
Möbius 190.
Moivre 416.
Momentensatz in der Statik 240, 274—275, 404.
Monge 192, 323.
Montalte, Louis de s. Pascal.
Montucla 323.
Moritz, Fürst v. Nassau-Oranien 25, 30.
Muhammed ibn Mûsâ 11.
Mydorge **34—35**, 178.

Näherung, Methoden der unendlichen 300-316; vgl. Produkt, Kettenbrüche u. Reihen.

Naṣîr Eddîn 111, 115, 222, 345.
Negative Zahlen, Größen, Wurzeln 86—87, 89, 96, 99—100, 104, 108—110, 149, 206—207, 212, 233, 282, 337—338, 370, 411; vgl. Exponenten.
Neil **50**, 295.
Neper IV, 21, **26—27**, 63, 110, 131—138, 142, 143, 174, 235, 267—268, 347, 348, 350, 376.
Newton 2, 20, 41, 44, 47, 49—52, **53—64**, 65, 67—74, 79, 214, 227—231, 233, 243, 276, 288, 302, 306, 313, 329, 345, 347, 357—396, 399—401, 403, 406—416, 420, 422—425.
Newtons Anagramme 56, 374, 407—408.
Newtons Interpolationsformel 230.
Newtons Parallelogramme 364.
Newtons Satz (Potenzsatz) 187—188, 227.
Nikolaus Cusanus 127.
Numerische Berechnung 122—143; vgl. Gleichungen, Kettenbrüche, Logarithmen, Produkt, Reihen.
Nuñez, Pedro 348.

Oberflächeninhalt s. Quadratur.
Oldenburg 42, 43, **51**, 66, 68, 367, 369, 396, 403, 406.
'Omar Alchaijâmî 99.
Oresme 131, 132, 195, 319, 330.
Ort zu 3, 4 oder mehr Geraden 183—184, 197, 208—210, 227.
Oskulierende Kreise 320, 387, 417; vgl. Krümmung.
Otho 14, 115, 126.
Oughtred **28**, 222.
Ozanam 145.

π (vgl. Kreismessung) 121, 126—127, 282—285, 303—305, 307—308, 370, 399.
Paciuoli 145, 170.
Papin 46.
Pappus 2, 7, 121, 181, 189, 196, 208, 210, 236, 241, 249, 255, 296, 317, 330.
Parabeln höherer Ordnung, vgl. Quadratur.
Pascal, Blaise 4, 36, **37—40**, 42, 45, 48, 66, 67, 102, 155, 166—168, 170—173, 175, 186—192, 225, 227, 228, 263, 270—277, 279, 284, 287, 290, 294, 296—298, 332, 333, 354, 360, 363, 373, 397, 401, 402, 404.
Pascals arithmetisches Dreieck 102, 168, 274, 397.
Pascals onglets 270.
Pascals Satz 186.
Pascal, Etienne 30, **37**, 189.
Pell 165.
Pemberton 64.
Pendellänge, reduzierte 246-247, 298-300.
Personne, Giles s. Roberval.
Perspektive, die praktische Lehre der 176, 178—179, 185; vgl. Zentralprojektion.
Philosophical Transactions 49.
Picard 18, 55.
Pirckheimer **13**.
Pitiscus **15**, 27, 126, 140.
Planudes, Maximus 145.
Plato 8.
Poinsot 122.
Polardreiek oder Supplementardreieck 111—112, 114, 115.
Polarkoordinaten s. Koordinaten.
Poncelet 186, 192.
Postulate, Euklids 222.
Potenzsummen der natürlichen Zahlen 167, 265, 280—281.
Prinzip der lebendigen Kraft 46, 74—75, 247—248, 341, 388.
Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 243.
Produkt, ein unendliches 121, 285.
Projektion (rechtwinklige) 112, 176; vgl. Zentralprojektion.
Projektivgeometrie 180—192, 225, 227—228.
Prosthaphäretische Methode VI, 127-130, 143.
Ptolemäus 2, 16, 112, 113, 128, 176, 182.
—, Analemma 112, 176.
Pujos 185, 186.

Quadratrix 288, 323, 369; Leibnizens 402—403.
Quadratur (vgl. Integration) 195, 260—261, 263—272, 280—287, 296—298, 301, 338—339.
—, in Polarkoordinaten 291—292.
—, näherungsweise 230.
—, des Kreises als Darstellung circularer Integrale 260, 269, 271—272, 282—287, 301, 371, 373; vgl. Kreismessung.
—, höherer Parabeln und Hyperbeln 260—261, 264—267, 272, 278, 280—282, 361, 398.
—, der Hyperbel als Darstellung logarithmischer Integrale 263, 267—268, 294, 301, 308—315, 371, 373, 391, 424.

Quadratur, krummer Flächen 241, 255, 296—298.
Quotientenreihen s. Reihen.

Ramus 4, **22—23**, 36.
Rauminhalt 241, 249—252, 259—260, 262—263, 270, 290, 339; vgl. asymptotischer Raum.
Raumkurven 212, 263.
Rechenmaschinen 38, 66, 166.
Rechtwinklige Dreiecke, rationale 153—154, 157, 163—164.
Recorde, Robert **26**, 101.
Regiomontanus 2, **13**, 27, 111—115, 123, 126, 143, 153.
Rektifikationen 292—296, 340, 342, 344—345, 368—369, 379, 422.
Reihen; Differenzenreihen (arithmetische Progressionen) 131, 327—328, 417, 423.
— —, höherer Ordnung 102, 166—168, 265, 397.
—; Quotientenreihen (geometrische Progressionen) 105, 131, 423.
Reihen, unendliche
—, bei Archimedes 302, 307, 310, 312.
—, Gregory, 306, 396.
—, Brouncker 308—313, 315.
—, Mercator, 314—316, 397.
—, Newton 362—370, 372, 377—379, 396, 407—408, 413—414, 416.
—, Leibniz 370, 396—399, 407—408.
—, Halley 416.
—, Jakob Bernoulli 422—423.
—, Johann Bernoulli 420, 422.
—, summierbare 309, 313, 397, 423.
—, circularer Funktionen 306, 368, 399, 407.
—, exponentieller 367, 370, 407—408.
—, logarithmischer 306, 308—315, 367—368, 397, 407—408, 416.
—, trigonometrischer 368, 407.
—, anderer transcendenter 368—369, 407—408.
—, ihre Umkehrung 364—365.
—, als Darstellung von Funktionen 366.
—, als Integrationsmittel; vgl. Differentialgleichungen und Integration.
Rhaeticus, Georg Joachim **14**, 15, 113, 115, 126, 127, 140, 143.
Riese, Adam **11**.
Roberval 30, 33—34, **36—37**, 39, 40, 171, 247, 257, 265, 272, 280, 294, 297, 298, 301, 320—323, 325, 333, 338—340, 351.
Rolle **41**, 151, 329.
Roemer **18—19**, 345.
Roomen, Adriaen van **26**, 119—122.
Royal Society 42, 46, 49, 50, 410.
Rudolff (der Cossist), **11**, 12, 96, 123.
Rudolf II., Kaiser v. Deutschland 16, 21.

Saccheri 222.
Sainte-Croix 28, 155, 157, 159, 161.
Saint Martin 155—157.
Savile 27.
Schiefe Ebene 242—243, 245.
Schooten, Franz van 24, 32, 36, **43**, 45, 213, 224, 326, 327, 334.
Schwenter, Daniel **13**, 145, 152.
Schwerpunkte 236—242, 275—278, 290, 299—300, 335—336, 339, 404.
Seilvieleck 348.
Setîsch 148.
Simson 50.
Simpsons Formel 230.
Sluse, René de 39, **42—43**, 45, 51, 199, 329, 334, 336, 337, 403, 409.
Snellius **26**, 115, 127, 348.
Spiele, mathematische 144—147.
Spinoza 64, 70.
Spirale, die Archimedessche 200—201, 291—294, 323.
—, die Galileische 292.
—, die logarithmische 293—294, 348—349, 356, 387, 418.
—, parabolische 417.
—, höherer Ordnung 292, 294.
v. Staudt 186.
Steiner 190.
Stellenzeiger 230—231.
Stetigkeit 234—236.
Stetigkeitsprinzip 76.
Stevin **25**, 26, 94—97, 100, 119, 123, 124, 131, 132, 203, 241—243.
Stifel 4, **11—12**, 19, 63, 91, 93, 100—103, 110, 117, 124, 131—133, 153, 166—168, 283.
Stirlings Formel 231.
Stoß, die Lehre vom 247—248.
Sturm 233.
Supplementardreieck s. Polardreieck.
Symptoma (einer Kurve) 195, 200.

Tabellarische Aufstellung 101—102, 115.
Thâbit ibn Kurra 158.
Tangentenaufgabe, die umgekehrte 345—357, 401—402, 405—406, 408—409, 412, 419, 424—425; vgl. Differentialgleichungen.

Tangentenbestimmungen 201, 224, 316—338, 340, 359, 361, 379, 400—401, 409—412.
—, als Differentiation 344 (vgl. Differentialquotient).
—, Torricellis und Robervals 321—323, 340, 351—352.
—, Descartes' 211, 323—326, 340.
—, Huddes 328.
—, Fermats 331—335, 398, 401, 411.
—, de Sluses 336—337, 403.
—, Gregorys 361, 396, 401.
—, Wallis' 224, 320.
—, Barrows 359, 401.
—, Newtons 361, 379.
—, Leibnizens 400—401, 409—412.
Tartaglia **5**, 6, 7, 83—90, 93, 94, 99, 102, 104, 106, 109, 124, 145, 168, 169, 245, 283, 318.
Tautochronismus 341—342, 345, 388, 424.
Taylors Formel 393, 422.
Torricelli **9—10**, 37, 38, 40, 47, 52, 242, 245, 262, 291, 293, 319—323, 338—339, 348, 351—353.
Trajektorien 424.
Traktorie 424.
Trägheitsgesetz 243, 382.
Trägheitsmoment 247, 298—300.
Transcendenz 304—306, 399—400, 408, 419—420.
Trigonometrie 110—117, 126—130, 143, 154, 222.
—, ihre Anwendung auf die Algebra 116—122.
Trigonometrische Tafeln 112—113, 115—117, 126—127.
Tschirnhaus **64—65**, 67, 68, 70, 232—233, 344, 396, 403.

Ubaldo, Guido **7**, 178, 179, 195.
Ulûg Beg 82.
Umdrehungskörper u. -flächen 237—238, 241, 250—252, 259—261, 296—297.
Umhüllungskurven und -flächen 227, 318—319, 322, 344, 346, 418.
Umkehrungssatz s. Barrow.
Unabhängige Variable 358—359, 361, 376, 402, 406, 419.
Unbestimmte Größen s. Grenzwert.
Unendlich kleine Größen 249, 343, 359, 393—394, 401, 409, 411, 415.
Raimarus Ursus 129, 130.

Valerio Luca **237—238**.
Variationsrechnung 424—426.
Varignon **34**, 41, 78.
Vieta V, **4**, 14, 17, **23-25**, 26-29, 43, 52, 91, 93, 95—109, 111, 115—126, 128, 131, 153—155, 164, 174, 175, 189, 193, 203, 204, 206, 212, 252, 303, 354.
Virtuelle Geschwindigkeit s. Prinzip.
Viviani **10**, 297, 318—319, 338, 346.
Vlack, Adriaen 27.
Volumenbestimmungen s. Rauminhalt.
Wahrscheinlichkeitsrechnung 168—173, 423.
Wallenstein 19.
Wallis 26, 39, **47—48**, 49—52, 54, 57, 165, 220—225, 278—290, 301, 303, 314, 315, 320, 340, 348, 350, 351, 356, 362, 363, 374, 376, 378, 407, 416.
Wendepunkte 325, 334, 380—381, 411, 417, 421.
Werner, Johannes VI, **13**, 129, 176.
Widmann, Johannes **11**, 94.
Wilhelm III., König v. England 63.
Wilhelm IV., Landgraf von Hessen 18, 21, 129.
Witt, Jan de **44**, 173, 224—226.
Wittich, Paul 18, 129.
Wright 27.
Wren 39, **49**, 54, 60, 295, 298, 340, 385.
Wurfbewegung 244-245, 321-322, 353, 387.
Zahlen, vollkommene und befreundete 143, 158.
—, figurierte 101—102, 161, 166—168, 397.
—, Zerlegbarkeit in Produkte 157-160, 166.
—, Zerlegbarkeit in Summen von Quadraten etc. 161—166.
Zahlentheorie 143—168.
—, Fermats Sätze, 154—168.
—, Fermats Beweisführung 162—164.
Zauberquadrate u. -kuben 144, 156.
Zeichensprache, algebraische 93—103, 153, 174, 192, 203—208, 212, 218, 220, 222, 224, 231, 288.
—, trigonometrische 95—96, 222.
—, infinitesimale 288, 361, 374—376, 395—396, 402, 404—406, 409—412, 418—419, 423—424.
—, logische 231.
Zeit, Begriff der 357—358, 375.
Zenon von Elea 235.
Zentralbewegung 385—389.
Zentralprojektion als geometrisches Hilfsmittel 173—192, 228—229.
Zentrifugalkraft 248, 385—386.

Im Verlage von **B. G. Teubner** in Leipzig ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Abhandlungen

zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften

mit Einschluß ihrer Anwendungen.

In zwanglosen, einzeln käuflichen Heften. gr. 8. geh.

Heft I—X auf einmal bezogen (statt Mk. 83.40) Mk. 40.—

Bisher erschienen:

I. Heft: Mit zwei lithographierten Tafeln. [198 S.] 1877. n. *M.* 5.—

Inhalt: I. Das Rechnen im 16. Jahrhundert. Von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. II. Die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles. Mémoire, gelesen im lombardischen Institut zu Mailand am 26. November 1871, ven G. A. Schiaparelli, ins Deutsche übersetzt von W. Horn, königl. Lehrer der Mathematik in München.

II. Heft. [240 S.] 1879 . . . . . n. *M.* 5.—

Inhalt: I. die deutsche Coss (= Algebra des 15. und 16. Jahrhunderts). Von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. II. Der Traktatus des Jordanus Nemorarius „de numeris datis". Herausgegeben von P. Treutlein. III. Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta. Von Dr. H. Weißenborn, Professor am Realgymnasum zu Eisenach. IV. Zur Boetius-Frage. Von demselben.

III. Heft. [276 S.] 1880 . . . . . n. *M.* 6.40

Inhalt: I. משנת המדות *Mischnath Ha-MMiddoth* (Lehre von den Maßen), aus einem Manuskripte der Münchener Bibliothek, bezeichnet Cod. Hebr. 36, als erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache herausgegeben und mit einigen Bemerkungen versehen von Dr. M. Steinschneider (Berlin 1864); ins Deutsche übersetzt, erläutert und mit einem Vorwort versehen von Hermann Schapira. — II. Abraham Ibn Esra (Abraham Judaeus, Avenare). Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im XII. Jahrhundert. Von Moritz Steinschneider. — III. Prologus Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum. Fragment sur la multiplication et la division publié pour la première fois par M. Charles Henry. — IV. Die Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath nach zwei Handschriften der kgl. Bibliothek in Erfurt. Von Prof. Dr. H. Weißenborn. — V. Fortolfi Rythmimachia von R. Peiper. — VI. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Von Dr. Arnold Sachse.

IV. Heft. [278 S. mit einer lithogr. Tafel.] 1882 . . n. *M.* 6.40

Inhalt: Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Dr. Siegmund Günther. (Mit einer lithogr. Tafel.) — Der Traktat Francos von Lüttich „de quadratura circuli". Herausgegeben von Dr. Winterberg. — Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer. Aus dem Jahre 1630. Von Eugen Gelcich, Direktor der nautischen Schule in Lussinpiccolo. — Descartes und das Berechnungsgesetz des Lichtes. Von Dr P. Kramer in Halle a. d. S.

V. Heft. [169 S.] 1890 . . . . . n. *M.* 6.—

Inhalt: I. Neue Studien zu Archimedes. Von Dr. J. L. Heiberg in Kopenhagen. — II. Der arithmetische Tractat des Radulph von Laon. Von Dr. Alfred Nagl. — III. Das Quadripartium des Ioannes de Muris und das praktische Rechnen im vierzehnten Jahrhundert. Von Dr. Alfred Nagl. — IV. Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Dr. E. Wappler.

VI. Heft. [206 S. mit einer lithogr. Tafel.] 1892 . . . n. *M.* 5.—

Inhalt: I. Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Jebûb an-Nadîm. Zum ersten Mal vollständig ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Heinrich Suter, Prof. in Zürich. — II. Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur. Von Armin Wittstein. — III. Die Anfänge der Gruppentheorie von Paolo Ruffini. Von Heinrich Burkhardt in Göttingen. — IV. Über die Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus abgeleiteten Gesetze. Von C. Isenkrahe.

VII. Heft. [III u. 244 S. mit 1 lith. Tafel u. 16 Fig. i. Text.] 1895. n. *M.* 7.60.

Inhalt: I. Ptolemäus de Analemmate. Von J. L. Heiberg in Kopenhagen. — II. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert. Von Maximilian Curtze. — III. Die Handschrift No. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München. Von Maximilian Curtze. — IV. Eine Autobiographie von Gotthold Eisenstein. Mit ergänzenden biographischen Notizen. Herausgegeben von F. Rudio. — V. Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern. Herausgegeben von A. Hurwitz und F. Rudio. — VI. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der kaiserlichen Universität Kasan am 22. Oktober 1893 von Professor A. Wassiljef. Aus dem Russischen übersetzt von Professor Friedrich Engel.

VIII. Heft. [214 S. mit 3 lithogr. Taf. u. 45 Fig. i. Text.] 1898. n. *M.* 8.—

Inhalt: Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts. Von Maximilian Curtze in Thorn. — De inquisicione capacitatis figurarum. Anonyme Abhandlung aus dem fünfzehnten Jahrhundert. Herausgegeben von Maximilian Curtze in Thorn. — Die erste Entwicklung der Elektrisirmaschine. Von Ferdinand Rosenberger. — Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya, k. k. Hauptmann im Geniecorps (1802—1860). Von Franz Schmidt in Budapest. — Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung. Von Dr. Max Simon, Professor am Kaiserl. Lyceum in Strassburg i. E. — Zur Geschichte des Thermoskops. Von Wilhelm Schmidt. — Heron von Alexandria, Konrad Dasypodius und die Strassburger astronomische Münsteruhr. Von demselben.

IX. Heft. [VIII u. 657 S. mit 22 Taf. u. 55 Fig. i. Text.] 1899. n. *M.* 20.—

A. u. d. T.: Festschrift zu M. Cantors 70. Geburtstage. Mit M. Cantors Porträt in Heliogr.

X. Heft. [IX u. 277 S.] 1900 . . . . . n. *M.* 14.—

Enthaltend: Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Von Heinrich Suter in Zürich.

XI. Heft. [VII u. 141 S. mit 192 Textfiguren.] 1901. n. *M.* 5.—

Enthaltend: Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. Kommentierte Ausgabe von Dr. Max Simon in Strafsburg i. Els.

XII. Heft. [X u. 336 S.] Mit 127 Textfiguren. 1902. n. *M.* 16.—

Inhalt: Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance I. Teil: I. Der „Liber Embadorum" des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli II. Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Röder. Hrsg. von Maximilian Curtze in Thorn.

XIII. Heft. [IV u. 292 S.] Mit 117 Textfiguren. 1902. n. *M.* 14.—

Inhalt: Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. II. Teil: III. Die „Practica Geometriae" des Leonardo Mainardi aus Cremona. IV. Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem Geometram magistrum suum. Hrsg. v. Maximilian Curtze in Thorn.

XIV. Heft. [VIII u. 337 S.] Mit 113 Figuren im Text. 1902. n. *M.* 16.—

Inhalt: Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. Von Axel Anton Björnbo in München. — Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". Von Heinrich Suter in Zürich. — Antoine Arnauld, der grofse Arnauld, als Mathematiker Von Karl Bopp in Rastatt.

XV. Heft. [VI u. 166 S.] Mit 76 Abbild. im Text. 1902. n. *M.* 8.—

Enthaltend: Einleitung in die analytische Geometrie der höh. algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Von Prof. Dr. Paul Sauerbeck in Reutlingen.

XVI. Heft. I. Teil. [XXXVI u. 416 S.] 1903. n. *M.* 14.—, geb. n. *M.* 15.—

Enthaltend: Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Von Prof. Dr. E. Wölffing in Stuttgart. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik.

XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] 1903 . . . . . n. *M.* 16.—

Enthaltend: Geschichte der Mathematik im 16. u. 17. Jahrhundert. Von H. G. Zeuthen in Kopenhagen.

In Vorbereitung:

The British mathematicians of the nineteenth century: Peacock, De Morgan, Hamilton Boole, Cayley, Clifford, H. J. S. Smith, Sylvester, Clerk-Maxwell, Tait, Kelvin, Rankine, Babbage Adams, Stokes, Rayleigh, Kirkman a. o. Von Alexander Macfarlane in South Bethlehem, V. S. A.

Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen und technischen Inhalts. Von E. Gerland in Clausthal.

Mathematisches zu Aristoteles. Von Dr. J. L. Heiberg in Kopenhagen.

☞ Die Sammlung wird fortgesetzt. Beiträge erbittet **B. G. Teubner** in **Leipzig.**